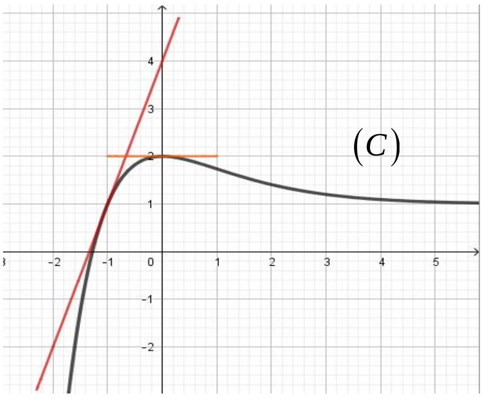
المؤسسة : متقن سرار عبد الحميد - زغاية　　　　　　　　　**السنة الدراسية :** 2018 - 2019

المستوى : 3 علوم تجريبية　　　　　　　　　　　　　　**المدة :** $e^{\ln 1}$ سا و $\ln e^{30}$ د

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

مسألة

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. المنحنى (C) في الشكل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a ؛ b عددان حقيقيان .



① أ – بقراءة بيانية عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النهاية الأخيرة بيانيا.

ب - عين كلا من $f(0)$ ؛ $f(-1)$ ؛ $f'(0)$ ؛ $f'(-1)$.

ج - اعتمادا على ما سبق جد قيمة كل من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$.

② أ / بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4 \prec \alpha \prec -1,2$.

ب / استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

③ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x)=(|x|+1)e^{-x}+1$

– احسب كلا من $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{h(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{h(x)-2}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .　　(نقبل أن : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$)

II) نضع فيما يلي : $f(x)=(x+1)e^{-x}+1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x-\dfrac{x+2}{e^{x}}$

(C_g) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.　　($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

① أ / احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب / بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

② أ / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)=f(x)$

ب / استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

③ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1 .

④ بين أن $g(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $g(\alpha)$.

⑤ أ / احسب $g(0)$ ثم أنشيء كلا من (Δ) ؛ (T) والمنحنى (C_g) .

ب / m وسيط حقيقي . ناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x)=x+m$.

بالتوفيق

I) f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

1) أ – بقراءة بيانية تعيين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **ثم تفسير النهاية الأخيرة بيانيا :**

● $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ● $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

تفسير النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ **بيانيا :** المستقيم ذو المعادلة $y=1$ هو مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل بجوار $(+\infty)$.

ب - تعيين كلا من $f(0)$ ؛ $f(-1)$ ؛ $f'(0)$ ؛ $f'(-1)$ **:**

● $f(0)=2$ ● $f(-1)=1$

● $f'(0)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 والموازي لحامل محور الفواصل وعليه : $f'(0)=0$.

● $f'(-1)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 1- وبما أن $(0;4)$ و $(-2;-2)$ هما إحداثيات نقطتين منه فإن :

$$f'(-1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-(-2)}{0-(-2)}=3$$

ج - اعتمادا على ما سبق إيجاد قيمة كل من a **و** b **ثم استنتاج عبارة** $f(x)$ **:**

لدينا $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(-1)=1 \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} (a(0)+b)e^{0}+1=2 \\ (a(-1)+b)e^{1}+1=1 \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} b+1=2 \\ (-a+b)e+1=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} b=1 \\ (-a+1)e=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$

ومنه $f(x)=(x+1)e^{-x}+1$

2) أ / تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث** $-1,4 \prec \alpha \prec -1,2$ **:**

● f مستمرة على $]-1,4;-1,2[$.

● $f(-1,4)\times f(-1,2)\prec 0$ ($f(-1,4)=-0,62$ ؛ $f(-1,2)=0,33$)

● f رتيبة على $]-1,4;-1,2[$ (متزايدة تماما) .

● ومنه وحسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4 \prec \alpha \prec -1,2$

ب / استنتاج إشارة $f(x)$ **على** $\mathbb{R}$ **:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

3) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x)=(|x|+1)e^{-x}+1$

● **حساب كلا من** $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h(x)-2}{x}$ **و** $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)-2}{x}$ **ثم تفسير النتيجة هندسيا :**

●

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h(x)-2}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x}\right]=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{(x+1)e^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{xe^{-x}}{x}+\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=1-1=0$$

●

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)-2}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x}\right]=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{(-x+1)e^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{-xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{-\cancel{x}e^{-x}}{\cancel{x}}+\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=-2$$

التفسير الهندسي :

● الدالة h لاتقبل الاشتقاق في النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل نصف مماس على يمين الصفر معامل توجيهه 0 ويقبل نصف مماس على يسار الصفر معامل توجيهه **2-** .

II) $f(x)=(x+1)e^{-x}+1$ ؛ g معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=x-\frac{x+2}{e^x}$

① أ / حساب كلا من $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ **:**

- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x+2}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1+\frac{2}{x}}{e^x}\right)=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x+2}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$

ب / تبيان أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x+2}{e^x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى g بجوار $(+\infty)$.

② أ / تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)=f(x)$

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$g'(x)=\left(x-\frac{x+2}{e^x}\right)'=\left(x-(x+2)e^{-x}\right)'=1-\left(e^{-x}-(x+2)e^{-x}\right)=1-\left((1-x-2)e^{-x}\right)=1-(-x-1)e^{-x}$$

ومنه $g'(x)=1+(x+1)e^{-x}=f(x)$

ب / استنتاج اتجاه تغير الدالة g ثم إنشاء جدول تغيراتها :

لدينا $g'(x)=f(x)$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $f(x)$

- $g'(x)=0$ تكافيء $f(x)=0$ ومنه $x=\alpha$.
- $g'(x)\prec 0$ تكافيء $f(x)\prec 0$ ومنه $x\in\left]-\infty;\alpha\right[$ ومنه g **متناقصة تماما** على المجال $\left]-\infty;\alpha\right[$.
- $g'(x)\succ 0$ تكافيء $f(x)\succ 0$ ومنه $x\in\left]\alpha;+\infty\right[$ ومنه g **متزايدة تماما** على المجال $\left]\alpha;+\infty\right[$.
- **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	**0**	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(\alpha)$	↗ $+\infty$

③ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1 :

$(\Delta): y=g'(-1)\left(x-(-1)\right)+g(-1)$

لدينا $g'(-1)=f(-1)=1$ و $g(-1)=-1-e$

ومنه $(\Delta): y=1(x+1)-1-e$

ومنه $(\Delta): y=x-e$

④ تبيان أن $g(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتاج حصر للعدد $g(\alpha)$:

لدينا $g(\alpha)=\alpha-(\alpha+2)e^{-\alpha}$

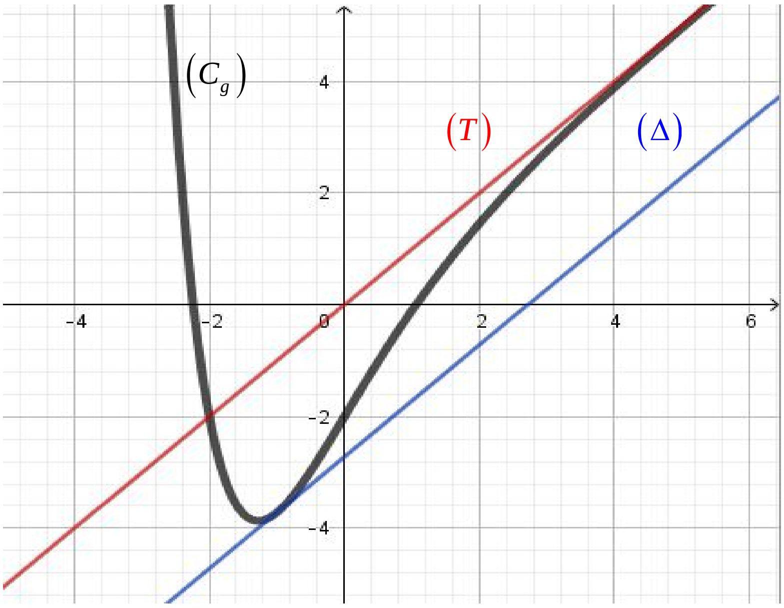
ولدينا $f(\alpha)=0$ تكافيء $(\alpha+1)e^{-\alpha}+1=0$ ومنه $e^{-\alpha}=\frac{-1}{\alpha+1}$

وبالتعويض بقيمة $e^{-\alpha}$ في عبارة $g(\alpha)$ نجد :

$$g(\alpha)=\alpha-(\alpha+2)\frac{-1}{\alpha+1}$$
$$=\alpha+\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$
$$=\alpha+\frac{(\alpha+1)+1}{\alpha+1}$$
$$=\alpha+\frac{\alpha+1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}$$
$$g(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha+1}$$

5 أ / **حساب** $g(0)$ **ثم إنشاء كلا من** (Δ) ؛ (T) **والمنحنى** (C_g) **:**

- $g(0)=-2$
- **الإنشاء :**



ب / **المناقشة حسب قيم** m **عدد وإشارة حلول المعادلة** $g(x)=x+m$

حلول المعادلة $g(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ والموازي للمستقيمين (Δ) و (T) .

- من أجل $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل $m=-e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما.
- من أجل $m\in]-e;-2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل $m=-2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب والآخر معدوم .
- من أجل $m\in]-2;0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل $m\in[0;+\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب تماما .

بالتوفيق والنجاح في شهادة الباكالوريا 2019