الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الشهيد محمد بوجمعة لوطاية بسكرة — الموسم الدراسي : 2020/2019

المستوى : الثالثة ثانوي — الشعبة : العلوم التجريبية

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات — المدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (06 نقط):

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-x-\ln x$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56<\alpha<0,57$ ثم استنتج إشارة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فان $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$.

4) بين أن $f(\alpha)=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) (γ) هو المنحنى الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق .

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$ ،فسر النتيجة بيانيا ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

6) أ) احسب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(e)$ ثم ارسم (γ) و (C_f) .

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلتين التاليتين : $f(x)=f(m)$ ، $f(x)=m$.

التمرين الثاني (05 نقاط):

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه ابراهيم وامرأة واحدة اسمها فاطمة ،

نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية : A " تكوين لجنة تضم 3 رجال " ، B "تكوين لجنة تضم رجل وامرأتين" .

C " تكوين لجنة تضم ابراهيم " ، D " تكوين لجنة تضم اما ابراهيم أو فاطمة".

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار للجنة بعدد الرجال فيها.

أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

ج) أحسب التباين $V(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الثالث (05نقاط):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $3 \le u_n \le 11$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{u_n - 2}\right)\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة وبرر تقاربها .

3) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \le u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n - 3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 2)$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n , ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

5) احسب قيمة المجموع S حيث: $S = v_{1441} + v_{1442} + \ldots + v_{2020}$.

ثم استنتج قيمة الجداء: $P = (u_{1441} - 2)(u_{1442} - 2)\ldots(u_{2020} - 2)$.

التمرين الرابع (04نقاط):

1) نعتبر العدد المركب $z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

أ) أحسب z^2 ثم عين طويلة وعمدة للعدد المركب z^2 .

ب) عين طويلة وعمدة للعدد المركب z .

ج) استنتج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و M ذات اللواحق $z_A = 1$ ، $z_B = i$ و z حيث $z \ne i$ على الترتيب

نضع $L = \frac{3-3z}{1+iz}$: أ) بين أن : $|L| = 3\frac{AM}{BM}$.

ب) (E) مجموعة النقط من المستوي التي تحقق $|L| = 3$ عين ثم انشيء (E) .

ج) (F) مجموعة النقط من المستوي بحيث يكون L حقيقي ، عين ثم انشيء المجموعة (F) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (06 نقاط):

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$

(C_f):التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ)اثبت أن المستقيمين (Δ) ،(Δ') اللذين معادلتهما $y = x + \ln 4$ ، $y = x + 2 + \ln 4$ على الترتيب مستقيمين مقاربين مائلين لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، $-\infty$ على الترتيب

ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ')

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.4 < \alpha < -3.3$

5) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان : $f(-x) + f(x) = 2 + 2\ln 4$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

6) أنشئ (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ') في المستوي المنسوب الى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

التمرين الثاني (05 نقاط):

نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح بالشكل .

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

2) نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

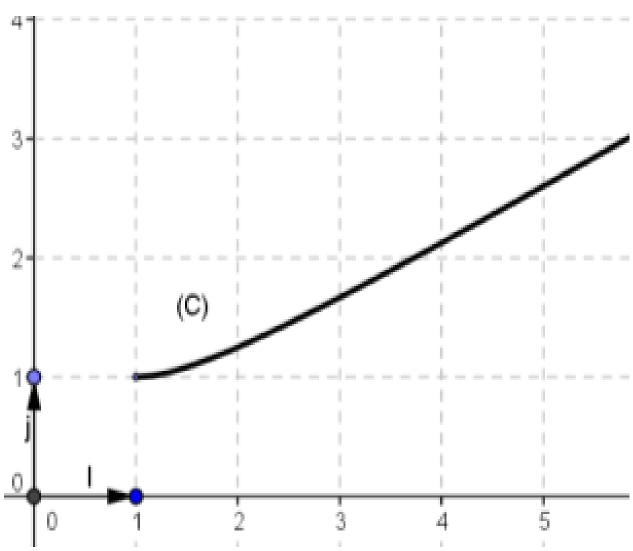
أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود الثلاث الأولى للمتتالية (U_n) موضحا خطوط الإنشاء.

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

ج) برهن أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 1$.

د) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

هـ) برّر تقارب المتتالية (U_n) .



3) نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

أ) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1} = V_n^2$.

ب) برهن أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < V_n < \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

ج) استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

د) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^n}$

هـ) عبر بدلالة n عن الجداء P_n حيث : $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

التمرين الثالث (05 نقاط):

يحتوي صندوق على تسع كريات ، منها أربع حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و خمس بيضاء مرقمة من 5 إلى 9

جميع الكريات لا نميز بينها باللمس .

1) نسحب عشوائيا و على التوالي ثلاث كريات دون إرجاع ، و نشكل هكذا عددا ذا ثلاثة أرقام . الكرية الأولى نسجل بها رقم المئات و الكرية الثانية نسجل بها رقم العشرات و الكرية الثالثة نسجل بها رقم الأحاد .

أ) احسب إحتمال تحقق الحدثين التاليين :

A " العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 "

B " العدد المحصل عليه زوجي "

ب) احسب إحتمال أن يكون العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 علما أنه زوجي . هل الحدثان A و B مستقلان ؟

2) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إمكانية عدد الكريات البيضاء المحصل عليها .

أ) عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X .

ب) احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (04 نقاط):

1) ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرف على C بـ: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ) أحسب $P(-1)$.

ب) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و G صور الأعداد المركبة : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ و $z_G=3$

أ) علم النقط A ، B ، C و G .

ب) أحسب AB ، BC و AC . ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

ج) عين عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث GAC.

سؤال بونيس (+1) Bonis :

أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{C_n^{1000}}{n^{1000}}$

بالتوفيق للجميع

المستوى: 3 ع ت — الإجابة النموذجية وسلم التنقيط لاختبار الفصل الثاني لمادة الرياضيات

العلامة		عناصر الإجابة
المجموع		الموضوع الاول

<u>تصحيح التمرين الأول:</u>

1) $g(x)=-x-\ln x$ ، $D_g=]0;+\infty[$.

أ) دراسة تغيرات الدالة g :

* حساب النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-1-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$.

*اتجاه التغير: الدالة g تقبل الاشتقاق على $D_g=]0;+\infty[$ حيث $g'(x)=-1-\frac{1}{x}=-\left(1+\frac{1}{x}\right)<0$ لان $x>0$ ومنه g متناقصة على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

ب) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56<\alpha<0,57$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$: الدالة g مستمرة على المجال $D_g=]0;+\infty[$ وبالتالي فهي مستمرة على $]0,56;0,57[$ ،

$g(0,56)\simeq 0,02$ ، $g(0,57)\simeq -0,01$ ينتج ان $g(0,56)\times g(0,57)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]0,56;0,57[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ولدينا من جدول التغيرات ان الدالة رتيبة تماما وعليه فان هذا العدد وحيد.

- إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$: من جدول التغيرات نستنتج الإشارة كما يلي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

2) $f(x)=\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ ، $D_f=]0;+\infty[$

أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}=\dfrac{+\infty}{0^+}=+\infty$ وتفسر هندسيا او بيانيا ان محور التراتيب مقارب للمنحني (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x}+\ln x-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ ،

ب)

$$f'(x)=\left(\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}\right)'=\frac{\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)x-(-1+(x-1)\ln x)}{x^2}$$
$$=\frac{x\ln x+x-1+1-x\ln x+\ln x}{x^2}=\frac{x+\ln x}{x^2}=\frac{-(-x-\ln x)}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

نستنتج ان إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ وحسب ما سبق نجد ان الدالة f متزايدة على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة على $]0;\alpha[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$: لاثبات هذا يكفي ان نثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حل في كل من المجالين من $]0,2;0,3[$ ، $]2,2;2,3[$

الدالة f مستمرة على $D_f=]0;+\infty[$ ومنه فهي مستمرة على كل من $]0,2;0,3[$ ، $]2,2;2,3[$.كما يتضح لنا أيضا انها رتيبة تماما على كل منهما لان $0,56<\alpha<0,57$ أي العدد α خارج عنهما.

$f(0,2)=\frac{-1+(0,2-1)\ln 0,2}{0,2}\simeq 1,44$ ، $f(0,3)=\frac{-1+(0,3-1)\ln 0,3}{0,3}\simeq -0,52$ نجد

$f(0,2)\times f(0,3)<0$ أي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها في المجال $]0,2;0,3[$.

وبنفس الطريقة نجد أيضا ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة اخرى فاصلتها في المجال $]2,2;2,3[$. ومنه نجد ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$.

4) تبيين أن $f(\alpha)=\alpha-1-\frac{1}{\alpha}$ ، ثم إستنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا $g(\alpha)=-\alpha-\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=-\alpha$

لدينا أيضا $f(\alpha)=\frac{-1+(\alpha-1)\ln\alpha}{\alpha}$ بالتعويض نجد $f(\alpha)=\frac{-1-(\alpha-1)\alpha}{\alpha}=-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}$.

الحصر: لدينا $0,56<\alpha<0,57$ ومنه $1,75<\frac{1}{\alpha}<1,79$ ومنه $-1,79<-\frac{1}{\alpha}<-1,75$ ....(1)

أيضا لدينا $0,56<\alpha<0,57$ ومنه $-0,57<-\alpha<-0,56$ ومنه $0,43<-\alpha+1<0,44$ ....(2)

بالجمع (1) مع (2) نجد $-1,36<-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}<-1,31$ أي $\boxed{-1,36<f(\alpha)<-1,31}$.

5)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+(x-1)\ln x-x\ln x}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1-\ln x}{x}\right]=0$$

التفسير الهندسي ان المنحني (γ) مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي بين (γ) و (C_f) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-\ln x$:

$$f(x)-\ln x=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}-\ln x=\frac{-1+(x-1)\ln x-x\ln x}{x}=\frac{-1-\ln x}{x}$$

ومنه نستنتج ان إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من نفس إشارة $-1-\ln x$:

إشارة $-1-\ln x$:

$-1-\ln x=0$ ومنه $\ln x=-1=\ln\frac{1}{e}$ أي $x=\frac{1}{e}$.

و $-1-\ln x>0$ أي $\ln x<\ln\frac{1}{e}$ ومنه $x\in\left]0;\frac{1}{e}\right[$ و $-1-\ln x<0$ نجد $x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

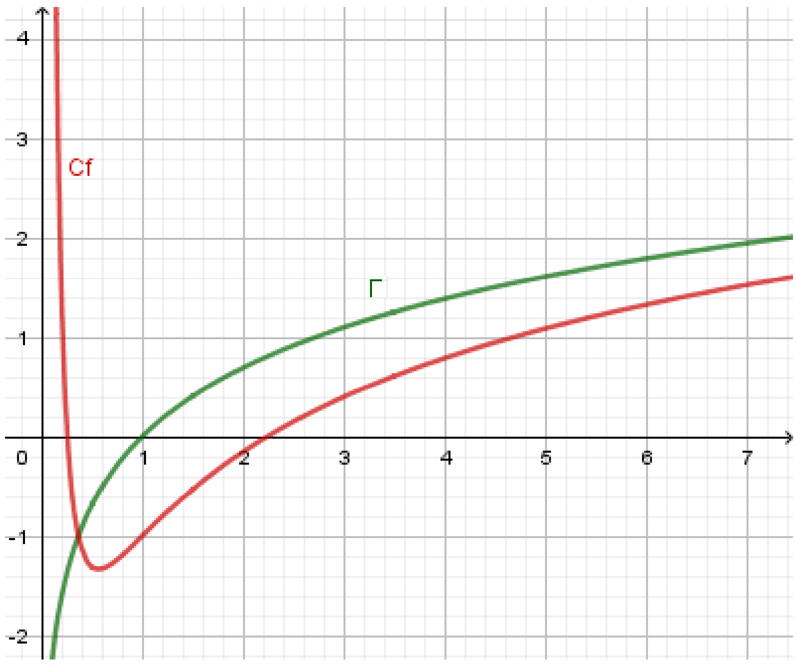
اذن نستنتج ان المنحنيان يتقاطعان في النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{e}$ و (C_f) فوق (γ) لما $x\in\left]0;\frac{1}{e}\right[$ وتحته لما $x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

6) أ) حساب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(e)$ **ثم رسم** (γ) و (C_f) :

$f(1)=\frac{-1+(1-1)\ln 1}{1}=-1$ ، $f(2)=\frac{-1+(2-1)\ln 2}{2}\simeq -0{,}15$ ،

$f(e)=\frac{-1+(e-1)\ln e}{e}\simeq 0{,}26$.

الرسم:



ب) مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلتين التاليتين : $f(x)=f(m)$ ، $f(x)=m$:

* <u>المعادلة $f(x)=m$:</u> عدد حلولها هو عدد النقط المشتركة بين المنحني (C_f) والمستقيم الافقي الذي معادلة له $y=m$ حسب الشكل نجد:لما $m\in\left]-\infty;f(\alpha)\right[$ ليس للمادلة حلول و لما $m=f(\alpha)$ فان للمعادلة حل واحد هو α و لما $m\in\left]f(\alpha);+\infty\right[$ فان للمعادلة حلين مختلفين موجبين.

*المعادلة $f(x)=f(m)$: بوضع $m'=f(m)$ تصبح معادلة من الشكل $f(x)=m'$، : وجدنا حسب ما سبق لما $m'\in]-\infty;f(\alpha)[$ ليس للمعادلة حلول أي لما $f(m)\in]-\infty;f(\alpha)[$ وهنا قيم m غير موجودة.

ولما $m'=f(\alpha)$ فان للمعادلة حل واحد أي لما $f(m)=f(\alpha)$ أي لما $m=\alpha$. ولما $m'\in]f(\alpha);+\infty[$ فان للمعادلة حلين مختلفين موجبين أي لما $f(m)\in]f(\alpha);+\infty[$ أي لما $m\in]\alpha;+\infty[$.

تصحيح التمرين الثاني:

عدد الأشخاص هو 12 من بينهم 8 رجال و 4 نساء ونريد تشكل لجنة تضم ثلاثة اشخاص لهم نفس المهام يعني هنا الترتيب غير مهم كما ان التكرار غير موجود اذن نستعمل هنا قانون التوفيقات.

العدد الكلي للجان الممكن تكوينها هو $C_{12}^3=220$.

1) حساب احتمال كل حدث:

A " تكوين لجنة تضم 3 رجال " ومنه $P(A)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$.

B "تكوين لجنة تضم رجل وامرأتين" ومنه $P(B)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}=\frac{12}{55}$.

C " تكوين لجنة تضم ابراهيم " ومنه $P(C)=\frac{C_1^1\times C_{11}^2}{C_{12}^3}=\frac{55}{220}=\frac{1}{4}$.

D " تكوين لجنة تضم اما ابراهيم أو فاطمة" ومنه $P(D)=1-\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}=1-\frac{120}{220}=\frac{100}{220}=\frac{5}{11}$

(شرح: لجنة تضم إبراهيم او فاطمة معناه اما تضم احدهما ولا تضم الاخر او تضمهما معا ويساوي الاحتمال العكسي لتكوين لجنة لا تضمهما معا).

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار للجنة بعدد الرجال فيها: ومنه $X\in\{0;1;2;3\}$.

أ) قانون الاحتمال لـX : $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}=\frac{1}{55}$ ، $P(X=1)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}=\frac{12}{55}$ ، $P(X=2)=\frac{C_8^2\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{112}{220}=\frac{28}{55}$ ، $P(X=3)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$. ومنه فان قانون احتمال المتغير العشوائي X يتلخص في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	**1/55**	**12/55**	**28/55**	**14/55**

ب) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\times P(X=x_i)=0\times\frac{1}{55}+1\times\frac{12}{55}+2\times\frac{28}{55}+3\times\frac{14}{55}=2$$

ج) حساب التباين $V(X)$ **والإنحراف المعياري** $\sigma(X)$:

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=0^2\times\frac{1}{55}+1^2\times\frac{12}{55}+2^2\times\frac{28}{55}+3^2\times\frac{14}{55}-2^2=\frac{6}{11}\ .$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{6}{11}}\simeq 0,74\ .$$

<u>تصحيح التمرين الثالث :</u>

المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ **كما يلي** (u_n) :

$$\begin{cases}u_0=11\\ u_{n+1}=2+\sqrt{u_n-2}\end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n **فإن:** $3\le u_n\le 11$:

*** الخاصية الابتدائية:** $n=0$ **نجد** $u_0=11$ **ومنه** $3\le u_0\le 11$ **اذن الخاصية الابتدائية صحيحة.**

*** الخاصية الوراثية: نفرض ان الخاصية** $3\le u_n\le 11$ **صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن ان الخاصية** $3\le u_{n+1}\le 11$ **صحيحة أيضا: لدينا** $3\le u_n\le 11$ **ومنه** $1\le u_n-2\le 9$ **ومنه** $1\le\sqrt{u_n-2}\le 3$ **ومنه** $3\le 2+\sqrt{u_n-2}\le 5\le 11$ **ومنه** $3\le u_{n+1}\le 11$ **ومنه الخاصية الوراثية صحيحة.**

*** نستنتج مما سبق ان الخاصية** $3\le u_n\le 11$ **صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n .**

2) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n **فإن:** $u_{n+1}-u_n=\left(\sqrt{u_n-2}\right)\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$:

$$u_{n+1}-u_n=2+\sqrt{u_n-2}-u_n=\sqrt{u_n-2}-(u_n-2)=\sqrt{u_n-2}-\left(\sqrt{u_n-2}\right)^2=\left(\sqrt{u_n-2}\right)\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$$

ب) تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة وتبرير تقاربها :

وجدنا $u_{n+1}-u_n=\left(\sqrt{u_n-2}\right)\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$ ووجدنا $1\le\sqrt{u_n-2}\le 3$ ومنه

$-1\le -\sqrt{u_n-2}\le -3$ ومنه $-2\le 1-\sqrt{u_n-2}\le 0$ وأيضا لنا $\sqrt{u_n-2}\ge 0$ اذن الجداء

ر $\left(\sqrt{u_n-2}\right)\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$ سالب ومنه المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $3\le u_n\le 11$ أي ان هذه المتتالية محدودة ومتناقصة فهي متقاربة.

3) أ) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$:

لدينا $3\le u_n\le 11$ أي $3\le u_{n+1}\le 11$ أي $u_{n+1}-3\ge 0$ ....(1)

أيضا

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}-3-\frac{1}{2}(u_n-3)=2+\sqrt{u_n-2}-3-\frac{1}{2}(u_n-3)\\
&=\sqrt{u_n-2}-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(-2\sqrt{u_n-2}+u_n-1\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left[u_n-2+1-2\sqrt{u_n-2}\right]=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{u_n-2}^{\,2}+1^2-2\sqrt{u_n-2}\times 1\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n-2}-1\right)^2\le 0
\end{aligned}$$

نستنتج ان $u_{n+1}-3-\frac{1}{2}(u_n-3)\le 0$ ومنه $u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$ ....(2)

من (1) و (2) نجد $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$ وهو المطلوب.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n-3\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتاج : $\lim_{n\to+\infty}u_n$:

وجدنا سابقا $\left(u_n-3\right)\frac{1}{2}\geq 0\leq u_{n+1}-3\leq$ ومنه أيضا $\left(u_{n-1}-3\right)\frac{1}{2}\geq 0\leq u_n-3\leq$ ومنه

$$0\le u_n-3\le\frac{1}{2}\left(u_{n-1}-3\right)$$
$$0\le u_{n-1}-3\le\frac{1}{2}\left(u_{n-2}-3\right)$$
.
.
$$0\le u_2-3\le\frac{1}{2}\left(u_1-3\right)$$
$$0\le u_1-3\le\frac{1}{2}\left(u_0-3\right)$$

بالجداء طرف الى طرف نجد

$0\le\left(u_n-3\right)\left(u_{n-1}-3\right)...\left(u_1-3\right)\le\frac{1}{2}\left(u_{n-1}-3\right)\times\frac{1}{2}\left(u_{n-2}-3\right)\times...\times\frac{1}{2}\left(u_0-3\right)$ بالاختزال نجد

$0\le\left(u_n-3\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(u_0-3\right)$ ومنه نجد $0\le\left(u_n-3\right)\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وهو المطلوب.

لدينا $0\le\left(u_n-3\right)\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}0\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n-3\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه

$0\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n-3\right)\le 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n-3\right)=0$ أي $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3}$.

4) $\left(v_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\ln\left(u_n-2\right)$:

أ) برهان أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و تعيين حدها الأول v_0 :

$$v_{n+1}=\ln\left(u_{n+1}-2\right)=\ln\left(2+\sqrt{u_n-2}-2\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-2}\right)=\ln\sqrt{\left(u_n-2\right)^{1/2}}=\frac{1}{2}\ln\left(u_{n+1}-2\right)=\frac{1}{2}v_n$$

نستنتج ان المتتالية $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_n=\ln\left(u_n-2\right)=\ln 9$

ب) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n , ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = v_0 q^n = \ln 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln 9}{2^n}$ ، لدينا $v_n = \ln(u_n - 2)$ ومنه

$u_n = e^{v_n} + 2 = e^{\frac{\ln 9}{2^n}} + 2 = \left(e^{\ln 9}\right)^{\frac{1}{2^n}} + 2 = 9^{\frac{1}{2^n}} + 2$.

5) حساب قيمة المجموع S حيث: $S = v_{1441} + v_{1442} + \ldots + v_{2020}$:

$$S = v_{1441} + v_{1442} + \ldots + v_{2020} = v_{1441} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2020-1441+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\ln 9}{2^{1441}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{580}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\ln 9}{2^{1441}}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{580}\right] = \left(\frac{1}{2^{1441}} - \frac{1}{2^{2020}}\right)\ln 81$$

استنتاج قيمة الجداء: $P = (u_{1441} - 2)(u_{1442} - 2)\ldots(u_{2020} - 2)$:

لدينا $P = (u_{1441} - 2)(u_{1442} - 2)\ldots(u_{2020} - 2)$ ومنه

$\ln P = \ln\left[(u_{1441} - 2)(u_{1442} - 2)\ldots(u_{2020} - 2)\right]$ ومنه

$\ln P = \ln(u_{1441} - 2) + \ln(u_{1442} - 2) + \ldots + \ln(u_{2020} - 2) = S$ ومنه

$P = e^S = e^{\left(\frac{1}{2^{1441}} - \frac{1}{2^{2020}}\right)\ln 81} = 81^{\left(\frac{1}{2^{1441}} - \frac{1}{2^{2020}}\right)}$.

تصحيح التمرين الرابع:

1) أ) حساب Z^2 ثم تعيين طويلة وعمدة له :

لدينا $z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ ومنه

$$z^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}} = \boxed{-\sqrt{3} + i}$$

ومنه $\left|z^2\right| = \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

لتكن θ عمدة للعدد المركب Z^2 فهي معرفةكما يلي حسب الدرس:

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ **حسب جدول النسب المثلثية الشهير الزاوية الموجهة β المعرفة بـ :**

$$\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{1}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ **هي من الشكل $\beta = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ والزاوية الموجهة θ التي نبحث عنها حسب ما سبق تقع**

في الربع الثاني من الدائرة المثلثية اذن فهي نظيرة β بالنسبة لمحور التراتيب ومنه

$\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$ **وهي عمدة لـ** Z^2 .

ب) تعيين طويلة وعمدة للعدد المركب Z :

حسب خواص الطويلة والعمدة نجد $\left|z^2\right| = |z|^2 = 2$ **ومنه** $|z| = \sqrt{2}$.

أيضا العدد المركب Z كلا من جزئيه الحقيقي والتخيلي موجب اذن عمدة له تقع في الربع الأول.

$\mathrm{Arg}\left(z^2\right) = \mathrm{Arg}(z \times z) = 2\mathrm{Arg}(z)$ **ومنه**

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(z^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} + 2k'\pi\right) = \frac{5\pi}{12} + k'\pi$$

اذن هناك عمدتين واحدة مقبولة والأخرى مرفوضة :

$k' = 0$ **نجد** $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{5\pi}{12}$ **وهي مقبولة لانها تقع في الربع الأول من الدائرة المثلثية.**

$k' = 1$ **نجد** $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{5\pi}{12} + \pi = \dfrac{17\pi}{12}$ **وهي مرفوضة لانها تقع في الربع الثالث من الدائرة المثلثية .**

وعليه نستنتج ان عمدة للعدد المركب Z معرفة بالشكل: $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$:

الشكل المثلثي للعدد المركب z هو: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$

ولدينا $z=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\\ \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\end{cases}.$$

2) نعتبر النقط A ، B و M ذات اللواحق $z_A=1$ ، $z_B=i$ و z حيث $z\neq i$ على الترتيب

أ) تبيين أن : $|L|=3\frac{AM}{BM}$: لدينا $L=\frac{3-3z}{1+iz}$ ومنه

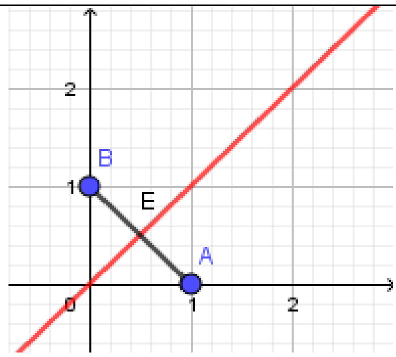
$L=\frac{3-3z}{1+iz}=\frac{-3}{i}\left(\frac{z-1}{z+\frac{1}{i}}\right)=\frac{-3\times i}{i^2}\left(\frac{z-1}{z+\frac{i}{i^2}}\right)=3i\times\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$ ومنه بحساب الطويلة نجد

$$|L|=\left|3i\times\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\right|=|3i|\times\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=3\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=3\frac{|z-z_A|}{|z-z_B|}=3\frac{AM}{BM}.$$

ب) تعيين مجموعة النقط (E) من المستوي التي تحقق $|L|=3$ ثم انشاؤها:

$|L|=3$ معناه $3\frac{AM}{BM}=3$ أي $AM=BM$ اذن هي النقط المتساوية البعد عن النقطتين A و B اذن المجموعة المطلوبة هي نقط محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

انشاؤها: انشاء محور قطعة مستقيمة يكون بالمسطرة والمدور ويكون كما يلي:



اذن المجموعة (E) هي نقط المنصف الأول.

ج) تعيين مجموعة النقط (F) من المستوي بحيث يكون L حقيقي ثم انشاؤها:

وجدنا سابقا $L = 3i \times \left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)$ وحتى يكون حقيقيا يجب ان تكون $ArgL = k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

حسب خواص العمدة والطويلة نجد

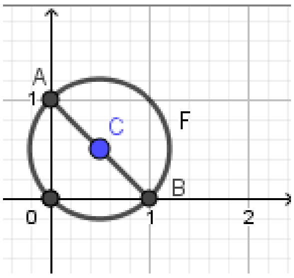
$$ArgL = Arg\left[3i \times \left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)\right] = Arg3i + Arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k'\pi$$

$ArgL = k\pi$ معناه $\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k'\pi = k\pi$ ومنه نجد

$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{2} + k''\pi / k'' \in \mathbb{Z}$ أي يجب ان تكون الزاوية الهندسية $[[BM),[AM)]$

وهندسيا مجموعة هذه النقط هي نقط الدائرة ذات القطر $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .

انشاؤها:



تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$

1) حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ)اثبات أن المستقيمين (Δ)،(Δ') **اللذين معادلتهما** $y=x+\ln 4$ ، $y=x+2+\ln 4$ **على الترتيب**

مستقيمين مقاربين مائلين لـ (C_f) **بجوار** $+\infty$ ، $-\infty$ **على الترتيب:**

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}-x-\ln 4\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{e^x+1}\right]=0$ **ومنه المستقيم** (Δ)

الذي معادلته $y=x+\ln 4$ **مقارب مائل لـ** (C_f) **بجوار** $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}-x-2-\ln 4\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2}{e^x+1}-2\right]=2-2=0$ **ومنه**

المستقيم (Δ') **الذي معادلته** $y=x+2+\ln 4$ **مقارب مائل لـ** (C_f) **بجوار** $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) **و المستقيمين** (Δ) ، (Δ'):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

بين (C_f) **و** (Δ): $f(x)-y=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}-x-\ln 4=\dfrac{2}{e^x+1}>0$ **نستنتج ان** (C_f) **فوق** (Δ) **دوما.**

بين (C_f) **و** (Δ'): $f(x)-y=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}-x-2-\ln 4=\dfrac{-2e^x}{e^x+1}<0$ **نستنتج ان** (C_f) **تحت** (Δ) **دوما.**

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f **على** $\mathbb{R}$ **، ثم تشكيل جدول تغيراتها :**

الدالة f **تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها حيث**

$$f'(x)=1+\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}>0$$

اذن الدالة f **متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.**

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) تبيين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.4<\alpha<-3.3$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن فهي مستمرة على $]-3,4;-3,3[$ و

$f(-3,4)=-3,4+\ln 4+\frac{2}{e^{-3,4}+1}\simeq -0,08$ ، $f(-3,3)=-3,3+\ln 4+\frac{2}{e^{-3,3}+1}\simeq 0,02$ نستنتج

ان $f(-3,4)\times f(-3,3)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد على الأقل عدد حقيقي α حيث

$-3.4<\alpha<-3.3$ يحقق $f(\alpha)=0$ وحسب جدول الاغيرات فان f رتيبة تماما اذن هذا العدد وحيد.

5) تبيين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان : $f(-x)+f(x)=2+2\ln 4$ ثم تفسير النتيجة هندسيا:

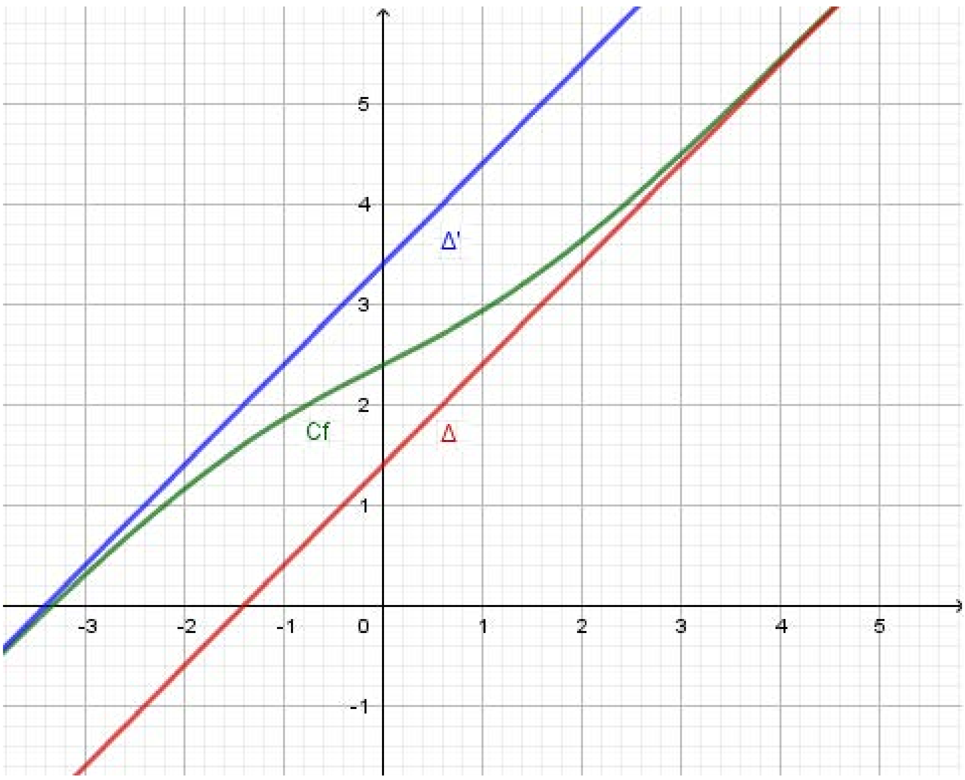
$$f(-x)+f(x)=-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}+x+\ln 4+\frac{2}{e^{x}+1}=2\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}+\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$=2\ln 4+\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{2}{e^{x}+1}=2\ln 4+\frac{2e^{x}+2}{e^{x}+1}=2\ln 4+\frac{2\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}+1}=2\ln 4+2$$

تفسير النتيجة: المساواة تكتب بالشكل: $f(2(0)-x)+f(x)=2(\ln 4+1)$ حسب الخواص نستنتج ان

النقطة $\omega(0;\ln 4+1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

6) إنشاء المنحني (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ') في المستوي المنسوب الى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$:



تصحيح التمرين الثاني:

1) تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$:

لدينا $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$ ومنه

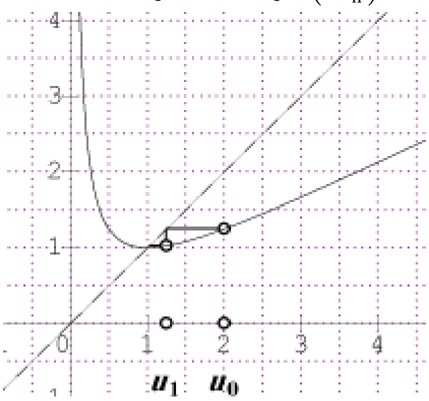
$f'(x)=\dfrac{2x(2x)-2(x^2+1)}{(2x)^2}=\dfrac{4x^2-2x^2-2}{4x^2}=\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{2x^2}$ نستنتج ان إشارة

الدالة المشتقة من إشارة الجداء $(x-1)(x+1)$ وبما ان $x\in[1,+\infty[$ أي $x\geq 1$ اذن فهذا الجداء موجب دوما

ومنه فالدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$.

2) نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود الثلاث الأولى للمتتالية (U_n) موضحا خطوط الإنشاء:



ب) أعطاء تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

من خلال الرسم السابق نجد ان المتتالية (U_n) متناقصة ومتقاربة.

ج) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n\geq 1$:

نبرهن بالتراجع: * الخاصية الابتدائية: من اجل $n=0$ نجد $U_0=2$ أي $U_0\geq 1$: والخاصية الابتدائية صحيحة.

* نفرض ان الخاصية $U_n\geq 1$: صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي **n** ونبرهن ان $U_{n+1}\geq 1$: صحيحة أيضا :

لدينا $U_n\geq 1$ و الدالة f متزايدة أي تحفظ الترتيب ومنه $f(u_n)\geq f(1)$ ومنه $U_{n+1}\geq 1$: اذن الخاصية الوراثية

صحيحة. ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n\geq 1$.

د) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) : ندرس إشارة الفرق :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^{\,2}+1}{2u_n}-u_n=\frac{u_n^{\,2}+1-2u_n^{\,2}}{2u_n}=-\frac{u_n^{\,2}-1}{2u_n}=-\frac{(u_n-1)(u_n+1)}{2u_n}<0$$

بما ان من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n\geq 1$ فان الفرق سالب دوما ومنه المتتالية متناقصة.

هـ) برِّر تقارب المتتالية (U_n) : بما المتتالية محدودة من الأسفل بالعدد 1 ومتناقصة فهي اذن متقاربة.

3) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$:

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1} = V_n^2$:

لدينا $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ ومنه

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{u_n^{\,2} + 1}{2u_n} - 1}{\frac{u_n^{\,2} + 1}{2u_n} + 1} = \frac{\frac{u_n^{\,2} + 1 - 2u_n}{2u_n}}{\frac{u_n^{\,2} + 1 + 2u_n}{2u_n}} = \frac{u_n^{\,2} + 1 - 2u_n}{u_n^{\,2} + 1 + 2u_n} = \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n + 1)^2} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)^2 = v_n^{\,2}$$

ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < V_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$: نبرهن بالتراجع:

- الخاصية الابتدائية : من اجل n=0 نجد $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = \frac{1}{3}$ اذن $0 < V_0 < \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ومنه الخاصية الابتدائية صحيحة و أيضا من اجل n=1 نجدها صحيحة بالتعويض.
- الخاصية الوراثية : نفرض ان $0 < V_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 2$ ونبرهن ان

$0 < V_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ صحيحة أيضا: لدينا $0 < V_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه بالتربيع نجد:

$0 < V_n^{\,2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ أي $0 < V_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+n} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ وعليه الخاصية الوراثية صحيحة.

- مما سبق نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < V_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

ج) استنتاج $\lim_{n \to +\infty} V_n$ ثم $\lim_{n \to +\infty} U_n$:

وجدنا سابقا $0 < V_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه $\lim_{n \to +\infty} 0 < \lim_{n \to +\infty} V_n < \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ أي $0 < \lim_{n \to +\infty} V_n < 0$ ومنه $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$.

لدينا $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ ومنه $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$ ومنه $u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1}$ بإدخال النهاية نجد

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1$$

د) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$:

نبرهن بالتراجع:

- الخاصية الابتدائية: من اجل n=0 نجد $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^0} = V_0$ اذن فهي صحيحة.

- الخاصية الوراثية: نفرض ان $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن ان $V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$

صحيحة أيضا: لدينا مما سبق $v_{n+1} = v_n{}^2$ اذن لدينا $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ بالتربيع نجد $v_n{}^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}\right]^2$ ومنه

$v_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$ اذن الخاصية الوراثية صحيحة.

- مما سبق نستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$.

هـ) التعبير بدلالة n عن الجداء P_n حيث : $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$ ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$:

$$P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2^1} \times \ldots \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^0+2^1+\ldots+2^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1} = 0 \ .$$

تصحيح التمرين الثالث :

1) أ) حساب إحتمال تحقق الحدثين التاليين :

$$P(A) = \frac{A_2^1 \times A_8^2}{A_9^3} = \frac{112}{504} = \frac{2}{9} \ ، \ P(B) = \frac{A_4^1 \times A_8^2}{A_9^3} = \frac{224}{504} = \frac{4}{9}$$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{A_4^1 \times A_2^1 \times A_7^1}{504}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$ بما ان $P_B(A) \neq P(A)$ اذن الحدثان ليسا مستقلين.

2) $X \in \{0;1;2;3\}$

أ) تعيين قانون إحتمال المتغير العشوائي X :

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} \ ، \ P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14} \ ،$$

$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_4^1}{C_9^3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$ ، $P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$ ومن القانون ملخص في الجدول التالي:

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	**4/84**	**30/84**	**40/84**	**10/84**

ب) حساب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\times P(X=x_i)=0\times\frac{4}{84}+1\times\frac{30}{84}+2\times\frac{40}{84}+3\times\frac{10}{84}=\frac{5}{3}.$$

تصحيح التمرين الرابع:

1) ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرف على C بـ: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ) حساب $P(-1)$: $P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$

ب) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث لدينا $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$:

لدينا $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b$ بالمطابقة نجد:

$\begin{cases}a+1=-3\\a+b=3\\b=7\end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases}a=-4\\b=7\end{cases}$ اذن نجد $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$.

ج) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ معناه $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ ومنه اما $z+1=0$ أي $z=-1$ او $z^2-4z+7=0$:

$\Delta=(-4)^2-4(1)(7)=-12<0$ اذن للمعادلة $z^2-4z+7=0$ حلين مركبين مترافقين هما

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4-i\sqrt{12}}{2}=\frac{4-i2\sqrt{3}}{2}=2-i\sqrt{3}$ ، $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=2+i\sqrt{3}$.

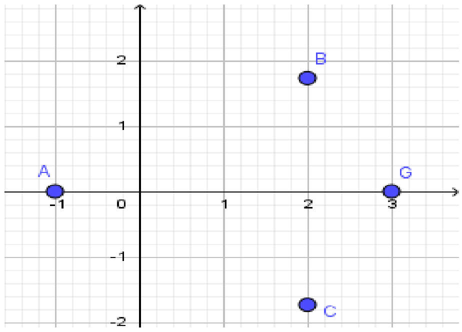
اذن حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{-1;2-i\sqrt{3};2+i\sqrt{3}\}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ،

النقط A ، B ، C و G صور الأعداد المركبة : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ و $z_G=3$

معناه: $A(-1;0)$ ، $B(2;\sqrt{3})$ ، $C(2;-\sqrt{3})$ ، $G(3;0)$.

أ) تعليم النقط A ، B ، C و G :



ب) حساب الأطوال AB ، BC و AC . ثم إستنتاج طبيعة المثلث ABC:

$AB=|z_B-z_A|=|2+i\sqrt{3}+1|=|3+i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ،

$BC=|z_C-z_B|=|2-i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}|=|-2\sqrt{3}i|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ،

$AC=|z_C-z_A|=|2-i\sqrt{3}+1|=|3-i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ نستنتج ان المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ج) تعيين عمدة للعدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ ، ثم استنتاج طبيعة المثلث GAC:

$$\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{-3+3\sqrt{3}i+i\sqrt{3}+3}{-2}=\frac{4\sqrt{3}i}{-2}=-2\sqrt{3}i$$

نستنتج ان هذا العدد تخيلي صرف جزءه التخيلي سالب اذن عمدته هي $\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$.

هندسيا وحسب الدرس عمدة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ هي الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA})$ اذن المثلث GAC قائم في C.

لوطـــــاية في 2020/03/04