المدة: 02 (ساعتان)

التمرين الأول:

4) أكتب في ترتيب تصاعدي قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 24.
5) أثبت أنّ العدد 577 أولي.
6) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2885x - 1731y = 577.......(E)$
أ) عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين: 2885 و1731.
ب) بسّط المعادلة (E)، حيث نرمز إلى المعادلة المبسّطة الناتجة بـ: (E').
ج) تحقق أنّ الثنائية $(2; 3)$ حل خاص للمعادلة (E')، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E').
د) في معلم متعامد ومتجانس نعتبر الدائرة (C) التي مركزها المبدأ O، ونصف قطرها $\sqrt{233}$.
- أكتب معادلة للدائرة (C).
- جد الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة التي هي حل للمعادلة (E') وتكون إحداثيات نقط من الدائرة (C).

التمرين الثاني:

تتكون مجموعة من الأشخاص من 6 رجال و4 نساء، من بينهم رجل واحد اسمه علي، وامرأة واحدة اسمها فاطمة.

نريد تشكيل لجنة تضم ثلاثة أعضاء.

3) نعرّف الحوادث التالية:
A : "اللجنة تضم 3 رجال" B : " اللجنة تضم رجلا وامرأتين"
C : " اللجنة تضم عليّا" D : " اللجنة لا تضم فاطمة"

- أحسب الاحتمالات الأتية: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(C)$ ، $p(D)$ و $p(C \cap D)$

4) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المشكلة.
أ) عين القيّم الممكنة للمتغير العشوائي X، وعرّف قانون احتماله.
ب) أحسب أمله الرياضياتي، وانحرافه المعياري.

التمرين الثالث:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$. نعرّف النقط A، B وC لواحقها الأعداد المركبة على الترتيب $z_A = -2$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z}$

5) أكتب على الشكل المثلثي الاعداد z_A ، z_B و z_C ، وعلّم النقط A، B وC.
6) استنتج أنّ النقط A، B وC تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعين مركزها ونصف قطرها.
7) علّم النقطة D التي لاحقتها العدد z_D ذو الطويلة 2 و $\frac{5\pi}{4}$ عمدة له، وأكتب z_D على شكله الجبري.
8) نعتبر العدد المركب z الذي صورته M، ومن أجل $z \neq -2$ نعرّف العدد المركب L بـ: $L = \frac{z-i}{z+2}$
أ) عيّن مجموعة النقط M حتى يكون L تخيليا صرفا.
ب) عين مجموعة النقط M حتى يكون $|L| = 1$
ج) جد العدد المركب z حتى يكون $L = 2 + i$

انتهى بالتوفيق

المدة: 02 (ساعتان)

التمرين الأول: (06 نقاط)

1) أكتب في ترتيب تصاعدي قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 24. .... 0.75ن

الحل: القائمة: $(2;3;5;7;11;13;17;19;23)$

2) أثبت أنّ العدد 577 أولي. 0.75ن

حل: لدينا: $\sqrt{577} \approx 24.02$ و 577 لا يقبل القسمة على 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19 و 23. ومنه 577 عدد أولي.

3) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2885x-1731y=577 ......(E)$

أ) عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين: 2885 و 1731. .... 1ن

حل: باستعمال خوارزمية إقليدس نجد: $gcd(2885;1731)=577$

ب) بسّط المعادلة (E)، حيث نرمز إلى المعادلة المبسّطة الناتجة بـ: (E'). 0.5ن

التبسيط: $5x-3y=1 ....(E')$

ج) تحقق أنّ الثنائية $(2;3)$ حل خاص للمعادلة (E')، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E'). ..... 1ن + 0.5

التحقق: $5(2)-3(3)=1$ محققة

حل المعادلة (E') : نشكل الجملة $\begin{cases} 5x-3y=1 ....(E') \\ 5(2)-3(3)=1 .....(E'') \end{cases}$ بطرح (E'') من (E') نجد:

$5(x-2)-3(y-3)=0$ ومنه: $5(x-2)=3(y-3)$ ومنه: 3 يقسم $5(x-2)$ و 3 أولي مع 5

وحسب مبرهنة غوص ينتج 3 يقسم $(x-2)$ ومنه $x-2=3k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ومنه: $x=3k+2$

وبالتعويض عن x في المعادلة (E') نجد: $y=5k+3$

إذن: $(x=3k+2;\quad y=5k+3)$

د) في معلم متعامد ومتجانس نعتبر الدائرة (C) التي مركزها المبدأ O، ونصف قطرها $\sqrt{233}$.

- أكتب معادلة للدائرة (C). 0.5ن

حل: $M(x;y) \in (C)$ تكافئ: $x^2+y^2=233$

- جد الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي هي حل للمعادلة (E') وتكون إحداثيات نقط من الدائرة (C).

حل: 1ن

لدينا $x^2+y^2=233$ و $(x=3k+2;\quad y=5k+3)$ بالتعويض عن x و y في معادلة الدائرة (C) ينتج: $34k^2+42k+13=233$ وتكافئ: $34k^2+42k-220=0$

وتكافئ $17k^2+21k+110=0$ وتكافئ: $k=2$ أو $k=-\dfrac{55}{17}$ و $k \in \mathbb{Z}$

إذن: $k=2$ وبالتعويض في عبارتي x و y نجد: $(x;y)=(8;13)$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

تتكون مجموعة من الأشخاص من 6 رجال و 4 نساء، من بينهم رجل واحد اسمه علي، وامرأة واحدة اسمها فاطمة.

نريد تشكيل لجنة تضم ثلاثة أعضاء.

المدة: 02 (ساعتان)

1) نعرّف الحوادث التالية:

A : "اللجنة تضم 3 رجال" B : " اللجنة تضم رجلا وامرأتين"

C : " اللجنة تضم عليّا" D : " اللجنة لا تضم فاطمة"

- أحسب الاحتمالات الأتية: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(C)$ ، $p(D)$ و $p(C \cap D)$ .... 5×0.5 ن

حل: $p(A)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$ ، $p(B)=\dfrac{C_6^1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

$p(C)=\dfrac{C_9^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$ ، $p(D)=\dfrac{C_9^3}{C_{10}^3}=\dfrac{84}{120}=\dfrac{7}{10}$

$p(C\cap D)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{28}{120}=\dfrac{7}{30}$.

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المشكلة.

أ) عين القيّم الممكنة للمتغير العشوائي X، وعرّف قانون احتماله. ....$2+0.5$ن

حل: مجموعة القيّم الممكنة لـ X: $X\in\{0;1;2;3\}$

قانون احتمال المتغير X:

$p(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$ ، $p(X=1)=p(B)=\dfrac{3}{10}$

$p(X=2)=\dfrac{C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{20}$ ، $p(X=3)=p(A)=\dfrac{1}{6}$.

$X=x_i$	0	1	2	3	$\sum p_i$
$p_i=p(X=x_i)$	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$	1

ب) أحسب أمله الرياضياتي، وانحرافه المعياري. ....$1+1$ن

الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=\sum x_i p_i=0+\frac{3}{10}+\frac{2}{2}+\frac{3}{6}=\frac{9+30+15}{30}=\frac{54}{30}=\frac{9}{5}=1.8$$

التباين:

$$V(X)=\sum x_i^2 p_i-E(X)^2=0+\frac{3}{10}+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}-\left(\frac{9}{5}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{9+60+45}{30}-\frac{81}{25}=\frac{54}{30}=\frac{14}{25}=0.56$$

الانحراف المعياري: $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.56}\approx0.75$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$. نعرّف النقط A، B وC لواحقها الأعداد المركبة على الترتيب $z_A=-2$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أكتب على الشكل المثلثي الاعداد z_A ، z_B وz_C ، وعلّم النقط A، B وC. .... $3\times(0.25+0.75)$ن

حل:

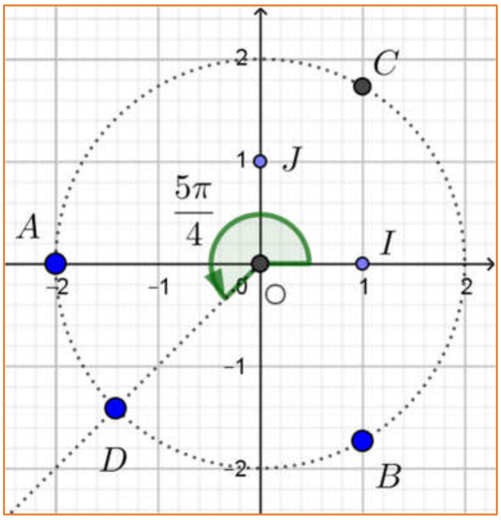
الشكل المثلثي للعدد z_A : $|z_A|=|-2|=2$ ، $\boxed{\theta_A=\pi}$; $\arg(z_A)=\theta_A:\begin{cases}\cos\theta_A=-1\\ \cos\theta_A=0\end{cases}$

إذن: $\boxed{z_A=2(\cos(\pi)+i\sin(\pi))}$

الشكل المثلثي للعدد z_B : $|z_B|=\sqrt{1+3}=2$ ،

$\arg(z_B)=\theta_B:\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{1}{2}\\ \cos\theta_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$; $\boxed{\theta_B=-\frac{\pi}{3}}$

إذن: $\boxed{z_B=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$



الشكل المثلثي للعدد z_C : $|z_C|=|z_B|=2$ ،

$\arg(z_B)=\theta_C=-\arg(z_B)$; $\boxed{\theta_C=\frac{\pi}{3}}$

إذن: $\boxed{z_C=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

2) استنتج أنّ النقط A، B وC تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعين مركزها ونصف قطرها.

حل: 0.5ن

مما سبق لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ يكافئ: $OA=OB=OC=2$ ومنه النقط A، B وC تنتمي إلى الدائرة التي مركزها المبدأ O، ونصف قطرها 2.

3) علّم النقطة D التي لاحقتها العدد z_D ذو الطويلة 2 و $\frac{5\pi}{4}$ عمدة له، وأكتب z_D على شكله الجبري.

حل: .... 0.5+0.5ن

تعليم D: انظر الرسم.

الشكل الجبري: $z_D=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=2\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

المدة: 02 (ساعتان)

وأخيرا: $\boxed{z_D = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

4) نعتبر العدد المركب z الذي صورته M، ومن أجل $z \neq -2$ نعرّف العدد المركب L بـ: $L = \dfrac{z-i}{z+2}$

أ) عيّن مجموعة النقط M حتى يكون L تخيليا صرفا. 1ن

حل: يكون L تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان: $L = -\overline{L}$ ويكافئ: $\dfrac{z-i}{z+2} = -\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}+2}$

ويكافئ: $(z-i)(\overline{z}+2) = -(\overline{z}+i)(z+2)$

ويكافئ: $z\overline{z} - i\overline{z} + 2z - 2i = -(z\overline{z} + 2\overline{z} + iz + 2i)$

ويكافئ: $2z\overline{z} + i(z-\overline{z}) + 2(z+\overline{z}) = 0$

وبفرض: $z = x + iy$ ينتج: $2(x^2+y^2) + i(2iy) + 2(2x) = 0$

ويكافئ: $x^2 + y^2 - y + 2x = 0$

وتكافئ: $(x+1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1^2 = 0$ ويكافئ: $\boxed{(x+1)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}}$

إذن: مجموعة النقط هي الدائرة -التي قطرها $[AJ]$-، مركزها $\Omega\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$، باستثناء النقطة A.

ب) عيّن مجموعة النقط M حتى يكون $|L| = 1$ 1ن

حل: يكون $|L| = 1$ يكافئ $\dfrac{|z-i|}{|z-(-2)|} = 1$ ويكافئ: $|z-i| = |z-(-2)|$

ويكافئ: $JM = AM$ ويكافئ: النقطة M تمسح محور القطعة المستقيمة $[AJ]$.

ج) جد العدد المركب z حتى يكون $L = 2 + i$ 0.5ن

حل: حتى يكون $L = 2+i$ يكافئ: $\dfrac{z-i}{z+2} = 2+i$ ويكافئ: $z - i = (z+2)(2+i)$

ويكافئ: $z - i = 2z + 4 + iz + 2i$ ويكافئ: $(1+i)z = -4 - 3i$

ويكافئ: $z = \dfrac{-4-3i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i}$ أخيرا $\boxed{z = -\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

انتهى

بالتوفيق

نص الاختبار في الصفحة الموالية