الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ– بيّن أن العددين 1111 و 10^4 أوليان فيما بينهما.

ب– حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $1111x-10^4y=1\,\ldots\ldots\ldots(E)$.

2) n عدد طبيعي

أ– بيّن أنّه إذا وجد عددان صحيحان p و q حيث: $n=1111p$ و $n=1+10^4q$ فإنّ $(p;q)$ حل للمعادلة (E).

ب– عين إذن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $\begin{cases} n\equiv 0[1111] \\ n\equiv 1\left[10^4\right] \end{cases}$.

ج– أستنتج أصغر عدد طبيعي مضاعف للعدد1111 ويكون باقي القسمة الإقليدية له على 10^4 هو 1 .

التمرين الثاني (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

1) أ– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z^2-2z\sqrt{3}+4\right)\left(2\overline{z}-\sqrt{3}+i\right)=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

ب– نرمز بـــz' ، z'' و z''' حلي(1)، أكتب z' ، z'' و z''' على الشكل الأسي .

2) نعتبر متتالية النقط (M_n) لواحقها : $z_n=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$ من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي1 .

2) أ– تحقق أنّ z_1 هو حل للمعادلة(1)،ثم أكتب z_2 و z_3 على الشكل الجبري .

ب– مثل النقطM_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 في المستوي المعطى .

3) أ– بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}i\right)$.

ب–أحسب الطولي القطعتين $[M_1M_2]$ و $[M_2M_3]$.ثم خمّن النتيجة وبيّن أنّ : $M_nM_{n+1}=2^n\sqrt{3}$.

4) نضع: $l_n=M_1M_2+M_2M_3+\cdots\cdots+M_nM_{n+1}$.

أ – بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $l_n=2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$.

ب– عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون: $l_n\geq 1000$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;-1;2)$، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$.

والمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $D(-1;-2;0)$ و $\vec{u}(2;-2;8)$ شعاع توجيها له .

1) أ- بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا .

ب- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

2) لتكن I و G نقطتان من الفضاء بحيث I منتصف القطعة $[AC]$ و G مرجح الجملة $\{(A;3);(B;-2);(C;1)\}$.

أ- جد إحداثيات I و G .

ب- ما طبيعة الرباعي $ABIG$.

3) أ- أحسب AG^2 ، BG^2 و CG^2 .

ب- عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$.

4) لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $3\sqrt{2}$ و (P) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MG}.\vec{U}=3$ حيث $\vec{U}(1;1;0)$.

أ- جد معادلة ديكارتية لــ (P).

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يمر بالنقطة G ويعامد (P)، ثم أستنتج إحداثيات النقطة H المسقط

العمودي للنقطة G على (P) .

ج- حدد العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

5) بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) يتقطعان وفق المستقيم (Δ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-\frac{x^3}{3}-2\ln x$.

1) أ- أدرس تغيرات الدّالة g .

ب- بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]1;\sqrt{2}[$.واستنتج إشارة $g(x)$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}-\frac{x}{3}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

أ) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=-\frac{1}{3}x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f). ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج−بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ واستنتج تغيرات الدالة f .

د− بين أنّ : $f(\alpha)=\frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$.

هـــ− عين النقطة A من المنحنى (C_f) التي يقبل عندها مماس (T) موازيا للمستقيم (Δ). ثم أكتب معادلة له.

− أنشئ (Δ)، (T) و المنحنى (C_f) .

3) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدوال الأصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

أ) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 . أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $y=-\frac{1}{3}x$ ، $x=\lambda$. ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

------------------حل الموضوع الأول------------------------

التمرين الأول :

* العددان 10^4 و 1111 أوليان فيما بينهما لأنّ: $pgcd(10^4;1111)=1$ − استخدم الخوارزمية أو التحليل أو أي طريقة. أو مبرهنة بيزو: أي يوجد عددان صحيحان α و β بحيث: $10^4\alpha+1111\beta=1$ (خذ على سبيل المثال $(\alpha=1;\beta=-9)$

1) إيجاد حل خاص للمعادلة: $1111x-10^4y=1$.

نلاحظ أنّ $(-9;-1)$ حل خاص للمعادلة (E) وعليه يكون : $1111(-9)-10^4(-1)=1$.

إذن لدينا: $1111x-10^4y=1$ ....(1)

$1111(-9)-10^4(-1)=1$ ....(2) وبطرح (2) من(1) نجد:

$\boxed{1111(x+9)-10^4(y+1)=0}$

أي: $1111(x+9)=10^4(y+1)$ ....(3)

لدينا: $10^4/10^4(y+1)$ ومنه: $10^4/1111(x+9)$ وبما أنّ 10^4 و 1111 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإنّ $10^4/x+9$ أي يوجد عدد صحيح k بحيث: $x+9=10^4k$ أي: $\boxed{x=-9+10^4k}$.

وبتعويض $\boxed{x=-9+10^4k}$ في المعادلة(3) نجد : $y+1=1111k$ أي: $\boxed{y=-1+1111k};k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجوعة الحلول $\boxed{S=\{(-9+10^4k;-1+1111k);k\in\mathbb{Z}\}}$.

2) n عدد طبيعي .

أ) أ− لنبيّن أنّه إذا وجد عددان صحيحان p و q حيث: $n=1111p$ و $n=1+10^4q$ فإنّ $(p;q)$ حل للمعادلة (E).

لدينا: $n=1111p=1+10^4p$ أي: $1111p-10^4p=1$ وهذا يعني أنّ $(p;q)$ حل للمعادلة (E).

ب) ب− لنعين إذن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $\begin{cases} n\equiv 0[1111] \\ n\equiv 1\left[10^4\right] \end{cases}$ أي: حسب ما سبق ينتج أنّ:

$n=1111p=1111\left(10^4k-9\right)=1111\times10^4k-9999$ و $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه مجموعة الحلول : $S'=\left\{n=1111\times10^4k-9999;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

ج−استنتاج أصغر عدد طبيعي مضاعف للعدد1111 ويكون باقي القسمة الإقليدية له على 10^4 هو 1 .

$n=1111p=1111\left(10^4k-9\right)=1111\times10^4k-9999\geq0$ أي: $k\geq\frac{9999}{1111\times10^4}$ و $k\in\mathbb{N}$ أي:

$k\geq0.0009$ أي $k=1$ وتكون عندئذ $\boxed{n=11100001}$.

حل التمرين الثاني

أ− لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z^2-2z\sqrt{3}+4\right)\left(2\overline{z}-\sqrt{3}+i\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\left(z^2-2z\sqrt{3}+4\right)\left(2\overline{z}-\sqrt{3}+i\right)=0$ معناه: $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$ أو $2\overline{z}-\sqrt{3}+i=0$

لنحل المعادلة: $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$ لدينا: $\Delta'=\left(\sqrt{3}\right)^2-4=-1=i^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين

حيث: $z'=\sqrt{3}-i$ و $z''=\sqrt{3}+i$.

ولدينا: $2\overline{z}-\sqrt{3}+i=0$ معناه: $2\overline{z}=\sqrt{3}-i$ أي $\overline{z}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ومنه: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

$S=\left\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$.

ب− كتابة z'، z'' و z''' على الشكل الأسي .

$z'=\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ، $z''=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z'''=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2) نعتبر متتالية النقط (M_n) لواحقها : $z_n=2^ne^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$ من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي1 .

3) أ− لدينا: $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{6}}=z'$ هو حل للمعادلة (1)، لنكتب z_2 و z_3 على الشكل الجبري . لدينا:

$$z_2=4e^{i\frac{\pi}{6}}=4\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}+2i$$

. $z_3=8e^{-i\frac{\pi}{6}}=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=4\sqrt{3}-4i$

***تمثيل النقط في المستوي المركب :

4) أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}i\right)$.

لنميز الحالتين: 1) إذا كان n زوجيا و $n\geq 1$: فإنّ: $(-1)^n=1$ وعليه يكون:

$z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}i\right)=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2^n e^{i\frac{\pi}{6}}$ وإذا كان n فرديا و $n\geq 1$ يكون:

$z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}i\right)=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$. إذن من أجل كل $n\geq 1$ لدينا: $z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}i\right)$

لدينا: $M_1M_2=|z_2-z_1|=\left|2\sqrt{3}+2i-\sqrt{3}+i\right|=\left|\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

$M_2M_3=|z_3-z_2|=\left|4\sqrt{3}-4i-2\sqrt{3}-2i\right|=\left|2\sqrt{3}-6i\right|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}=2^2\sqrt{3}$

ولدينا أيضا : $M_3M_4=2^3\sqrt{3}$ و $M_4M_5=2^4\sqrt{3}$ و وبصفة عامة: $M_nM_{n+1}=2^n\sqrt{3}$.

5) نضع: $l_n=M_1M_2+M_2M_3+\cdots\cdots+M_nM_{n+1}$. من أجل كل $n\geq 1$.

$l_n=2\sqrt{3}+2^2\sqrt{3}+2^3\sqrt{3}+\cdots\cdots+2^n\sqrt{3}=\left(2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n\right)\sqrt{3}$ ومنه:

$l_n=\left(2\frac{2^n-1}{2-1}\right)\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$

ب- تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون: $l_n\geq 1000$.

$l_n\geq 1000$ معناه: $2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)\geq 1000$ أي: $2^n-1\geq\frac{1000}{2\sqrt{3}}$ أي: $2^n\geq\frac{1000}{2\sqrt{3}}+1$

أي $n\ln 2\geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}}+1\right)$ أي $n\geq 8.18$ ومنه يكون أصغر عدد طبيعي n يحقق: $l_n\geq 1000$ هو 9 .

ويمكن التحقق بكل بساطة: $l_8=510\sqrt{3}\approx 883<1000$ و $l_9=1022\sqrt{3}\approx 1770>1000$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$.

والمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $D(-1;-2;0)$ و $\vec{u}(2;-2;8)$ شعاع توجيها له .

1) أ- بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا معناه النقط A ، B و C ليست في استقامية أي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا . لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنّ $\frac{1}{4}\neq\frac{2}{-4}$.

ب- كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ):

$M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) معناه يوجد عددحقيقي k بحيث: $\overrightarrow{DM}=k\vec{u}$ أي: $\begin{cases}x=-1+2k\\y=-2-2k\\z=0+8k\end{cases}$ و k عدد حقيقي

$$(\Delta):\begin{cases}x=-1+2k\\y=-2-2k\\z=0+8k\end{cases};\ k\in\mathbb{R}$$

2) لتكن I و G نقطتان من الفضاء بحيث I منتصف القطعة $[AC]$ و G مرجح الجملة $\{(A;3);(B;-2);(C;1)\}$.

G مرجح الجملة $\{(A;3);(B;-2);(C;1)\}$ معناه: $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ- جد إحداثيات I و G . لدينا: $I(2;1;0)$ و $G(0;0;-2)$. ولدينا: $\overrightarrow{GI}(2;1;2)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GI}$ وهذا يعني أنّ الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع .

3) أ- أحسب AG^2 ، BG^2 و CG^2 .

لدينا: $\overrightarrow{AG}(-1;1;-4)$ ، $\overrightarrow{BG}(-3;0;-6)$ و $\overrightarrow{CG}(-3;-3;0)$

ومنه: $AG^2=1+1+16=18$ ، $BG^2=9+36=45$ و $CG^2=9+9=18$.

ب- تعيين (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$.

$M\in(E)$ معناه: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$.

$M\in(E)$ معناه: $3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=18$

$M\in(E)$ معناه: $2MG^2=36$ أي $MG^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$ أي $MG=3\sqrt{2}$ وهذا يعني أنّ (E) سطح كرة التي مركزها G ونصف قطرها $3\sqrt{2}$. $\vec{U}(1;1;0)$

$M\in(P)$ معناه $\overrightarrow{MG}.\vec{U}=3$. لدينا: $\overrightarrow{MG}(-x;-y;-2-z)$ و $\vec{U}(1;1;0)$

$M\in(P)$ معناه: $-x-y-3=0$ أي: $(P):x+y+3=0$

ت -تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يمر بالنقطة G ويعامد (P)

(d) يمر بالنقطة G ويعامد (P) معناه : يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{GM}=t\vec{n}_p$ أي: $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-2\end{cases}$ و $t\in\mathbb{R}$

$$(d):\begin{cases}x=t\\y=t\quad ;t\in\mathbb{R}\\z=-2\end{cases}$$

ث استنتاج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة G على (P) . $\{H\}=(P)\cap(\Delta)$

$H\in(P)$ معناه: $t+t+3=0$ أي : $t=-\frac{3}{2}$ وعليه تكون إحداثيات النقطة $H\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2};-2\right)$.

لنحسب $d(G;(P))=GH=\frac{3}{2}\sqrt{2}<r=3\sqrt{2}$ ومنه: $(P)\cap(S)$ هي الدّائرة التي مركزها H

ونصف قطرها r' حيث: $r'=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-HG^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

** بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) يتقطعان وفق المستقيم (Δ).

لدينا: $(\Delta):\begin{cases}x=-1+2k\\y=-2-2k\quad ;\ k\in\mathbb{R}\\z=0+8k\end{cases}$ نلاحظ أنّ $(\Delta)\subset(P)$ لأنّ: $(-1+2k)+(-2-2k)+3=0$

ومن جهة أخرى: لدينا: (Δ) يشمل النقطة $E(-1;-2;0)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(2;-2;8)$ أي $\overrightarrow{AE}(-2;-1;-2)$

و $\vec{U}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. أي النقطة E نقطة من (ABC) و $\vec{U}$ شعاع من (ABC) وعليه يكون

$(\Delta)\subset(ABC)$ ولأنّ $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}$. ومنه المستويان (P) و (ABC) يتقطعان وفق المستقيم (Δ).

أو يمكن استخدام أي طريقة أي البحث عن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ثم تتأكد أنّ $(\Delta)\subset(ABC)$ و $(\Delta)\subset(P)$.

التمرين الرابع:

الحل : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=1-\frac{x^3}{3}-2\ln x=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1-\frac{x^3}{3}-2\ln x=\lim_{x\to+\infty}1-x\left(\frac{1}{3}-2\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

حساب $g'(x)$: الدّالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنّها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال

$]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة g' حيث: $g'(x)=-x^2-\frac{2}{x}=-\frac{x^3+2}{x}$ وبما أنّ $x>0$ فإنّ $x^3+2>0$ ومنه:

$-\frac{x^3+2}{x}<0$ إذن من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)<0$ وعليه تكون الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات g .

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
إشارة $g'(x)$	$-$
تغيرات g	$+\infty$ ↘ $-\infty$

– لنبين أن ا لمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left]1;\sqrt{2}\right[$. واستنتج إشارة $g(x)$.

الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص في أيضا مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]1;\sqrt{2}\right[$ و لدينا $g(1)=\frac{2}{3}>0$ و $g\left(\sqrt{2}\right)=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\ln 2<0$ أي: $g\left(\sqrt{2}\right)\approx-1.34$.وعليه يكون: $g(1)\times g\left(\sqrt{2}\right)<0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left]1;\sqrt{2}\right[$.

– استنتاج إشارة $g(x)$.

من أجل $0<x<\alpha$ لدينا: $g(x)>0$

من أجل $x>\alpha$ لدينا: $g(x)<0$

من أجل $x=\alpha$ لدينا: $g(x)=0$

2) دراسة الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}-\frac{x}{3}$

أ– حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x^2}-\frac{x}{3}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -\frac{x}{3}=0$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-+\infty} \frac{\ln x}{x^2}-\frac{x}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(\frac{\ln x}{x}\right)-\frac{x}{3}=-\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

ب) لنبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=-\frac{1}{3}x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

نلاحظ أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(-\frac{x}{3}\right)$.

وعليه يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{3}x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f(x)-\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\ln x}{x^2}$

* $f(x)-\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\ln x}{x^2}=0$ إذا وفقط إذا كان $\ln x=0$ إي : $x=1$

* $f(x)-\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\ln x}{x^2}<0$ معناه $\ln x<0$ معناه $0<x<1$

* $f(x)-\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\ln x}{x^2}>0$ معناه $\ln x>0$ معناه $x>1$

الخلاصة : المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $\left(1;-\frac{1}{3}\right)$ ويقع فوق (Δ) في المجال $]1;+\infty[$ ويقع تحت (Δ) في المجال $]0;1[$.

دراسة تغيرات f : f دالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\times \ln x}{x^4}-\frac{1}{3}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}-\frac{1}{3}=\frac{1-2\ln x}{x^3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{x^3}\left(1-2\ln x-\frac{x^3}{3}\right)=\frac{g(x)}{x^3}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$ وذلك من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

إشارة $f'(x)$: $f'(x)=0$ معناه $g(x)=0$ معناه $x=\alpha$ و $\alpha\in\left]1;\sqrt{2}\right[$.

$f'(x)<0$ معناه $g(x)<0$ معناه $x>\alpha$.

$f'(x)>0$ معناه $g(x)>0$ معناه $0<x<\alpha$.

جدول تغيرات f :

x	0		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

د- بين أنّ : $f(\alpha)=\frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$.

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}-\frac{\alpha}{3}$ ومن جهة أخرى لدينا: $g(\alpha)=1-\frac{\alpha^3}{3}-2\ln\alpha=0$ أي: $1-\frac{\alpha^3}{3}=2\ln\alpha$

أي: $\ln\alpha=\frac{1-\frac{\alpha^3}{3}}{2}=\frac{\frac{3-\alpha^3}{3}}{2}=\frac{3-\alpha^3}{6}$

$$f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}-\frac{\alpha}{3}=\frac{3-\alpha^3}{6\alpha^2}-\frac{\alpha}{3}=\frac{3-\alpha^3-2\alpha^3}{6\alpha^2}=\frac{3-3\alpha^3}{6\alpha^2}=\frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$$

هــ- تعيين النقطة A من المنحنى (C_f) التي يقبل عندها مماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) .

(T) موازيا للمستقيم (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس معامل توجيه أو (نفس الميل) أي من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

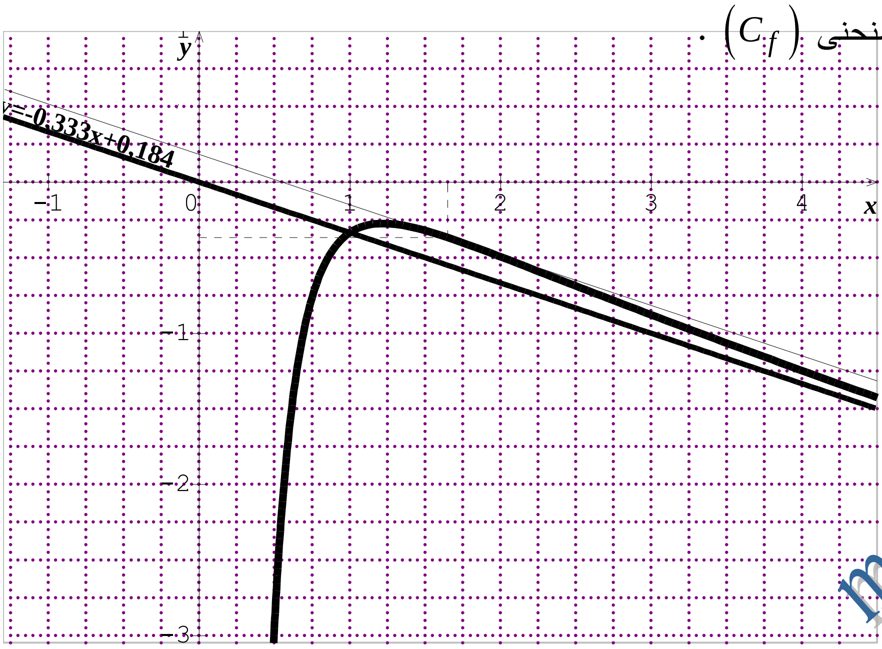
أي: $f'(x)=-\frac{1}{3}$ أي: $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{3}-\frac{2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}=-\frac{1}{3}$ أي: $\frac{1-2\ln x}{x^3}=0$ أي: $\ln x=\frac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}$

إذن توجد نقطة وحيدة يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) وهي $A\left(\sqrt{e};\frac{1}{2e}-\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$.

ومنه معادلة المماس (T) عند A : $y=-\frac{1}{3}\left(x-\sqrt{e}\right)+\frac{1}{2e}-\frac{\sqrt{e}}{3}=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2e}$ أي: $\boxed{(T): y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2e}}$

رسم (Δ)، (T) و المنحنى (C_f) .

(C_f)



2) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدوال الأصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1} u'(x)v(x)dx$$ أي:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}-\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_{x_0}^{x_1}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_1}$$

وذلك بوضع : $u'(x)=\frac{1}{x}$ ، $u(x)=\ln x$ ، $v(x)=-\frac{1}{x}$ ، $v'(x)=\frac{1}{x^2}$ ومنه: $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_1}$

ومنه تكون الدّالة الأصلية للدّالة $h: x\mapsto\frac{\ln x}{x^2}$ هي الدّالة: $H: x\mapsto-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

أ) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 . حساب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $y=-\frac{1}{3}x$ ، $x=\lambda$. ثم أحسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$$A(\lambda)=\int_{1}^{\lambda}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]dx=\int_{1}^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_{1}^{\lambda}u.a=\left(-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)-(0-1)=\left(1-\frac{1}{\lambda}-\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)u.a$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=1$.