التحضير الجيد لبكالوريا2017 / الشعب رياضيات وتقني ر+ ع ت

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{4+u_n}$.

1) أحسب u_1 و u_2 .ثم بيّن أنّ (u_n) ليست حسابية وليست هندسية .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : (u_n) متزايدة .

4) أ– بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $(1-u_{n+1})-\dfrac{2}{3}(1-u_n)=\dfrac{2\left(u_n^2-1\right)}{3(u_n+4)}$.

ب– وأنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|1-u_{n+1}|\le\dfrac{2}{3}|1-u_n|$.

ج– أستنتج أنّه من كل عدد طبيعي n : $|1-u_n|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني (4.5 نقاط)

$p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $p(z)=z^3-(6+i)z^2+(9+4i)z-2-9i$.

1) أ– بيّن أنّ المعادلة $p(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .

ب– عين العددين المركبين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا:

$$p(z)=(z-z_0)(z-2+i)(az+b)$$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $p(z)=0$.

3) نسمي z_0، z_1 و z_2 حلول المعادلة $p(z)=0$ حيث: $|z_1|<|z_2|$. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من

أجلها $\left(\dfrac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$ عددا حقيقيا .

5) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط من المستوي لواحقها i ، $2-i$ و $4+i$ على الترتيب .

أ –ما طبيعة المثلث ABC ؟

ب –جد إحداثيي النقطة D صورة النقطة B بالدّوران R الذي مركزه A وزاويته $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ج– عين زاوية ونسبة التشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C .

د– تعرف على طبيعة التحويل $S\circ R$.ثم عين عناصره المميزة .

التمرين الثالث (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(-\sqrt{2};1;0\right)$، $B\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$ والمستوي (P)

ذو المعادلة الديكارتية: $x-y-z+\sqrt{3}=0$.

1) أ- بيّن أنّ المستقيم (AB) ليس عموديا على المستوي (P) .

أ -شكل معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار بالنقطتين A و B والعمودي على المستوي (P) .

2) لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها O ومماسية للمستوي (P).

أ -أكتب معادلة ديكارتية لــ (S).

ب -تحقق أنّ المستوي (Q) يمس (S) .

أ -نعتبر I و J نقطتي التماس لـــ (S) مع المستويين (P) و (Q). بيّن أنّ $IJ=\sqrt{2}$.

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق:

$x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ حيث m وسيط حقيقي.

أ -بيّن أنّ (S_m) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m .

ب -عين مجموعة النقط I_m لمّا m يتغير في $\mathbb{R}$.

ج- بيّن أنّ كل الكرات (S_m) تمر بدائرة ثابتة (C) موجودة في مستو يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=x(\ln x)^2$ إذا كان $x\in]0;+\infty[$ و $f(0)=0$ وليكن (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$. خذ الوحدة: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=5cm$.

1) أ- أثبت أنّ الدّالة f مستمرة على $\mathbb{R}^+$. (مساعدة لإثبات استمرارية f عند $x=0$ ضع : $(t>0)$ $x=t^2$) .

ب-أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

ج- أدرس قابلية اشتقاق f من اليمين عند 0،ثم أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .

2) أدرس تغيرات f .

3) أ- شكل معادلة المماس (T) للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها e.

ب- أرسم (T) و (C_f) .

4) m وسيط حقيقي ،ناقش بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة: $x(\ln x)^2-3x+m=0$.

5) لتكن الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x(\ln x-1)$.

أ- أحسب $g'(x)$ ثم أستنتج مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة f على $]0;+\infty[$.

ب- β عدد حقيقي حيث $0<\beta<1$ أحسب المساحة $A(\beta)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها : $x=\beta$ ، $x=1$ و $y=0$. ثم أحسب $\lim\limits_{\beta\to 0} A(\beta)$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الثاني : إجابة مختصرة

أ -المعادلة $p(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 لدينا: $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$p(z)=z^3-(6+i)z^2+(9+4i)z-2-9i$.

$$p(\lambda i)=0=(\lambda i)^3-(6+i)(\lambda i)^2+(9+4i)(\lambda i)-2-9i=-\lambda^3 i+\lambda^2(6+i)+9\lambda i-4\lambda-2-9i=0$$

$$p(\lambda i)=\left(6\lambda^2-4\lambda-2\right)+i\left(-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9\right)=0$$

وهذا يعني أنّ : $\begin{cases}-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=0\\ 6\lambda^2-4\lambda-2=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=0\\ (\lambda=1)\vee\left(\lambda=-\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$ أي $\lambda=1$ وهو الحل المشترك . إذن:

$z_0=i$ وعليه يكون: من أجل كل عدد مركب z لدينا: $p(z)=(z-i)(z-2+i)(az+b)$. ولإيجاد a و b نكتب:

$(1)\ldots\ p(z)=z^3-(6+i)z^2+(9+4i)z-2-9i$ و $(2)\ldots\ldots\ldots\ p(z)=(z-i)(z-2+i)(az+b)$

وبمطابقة (2) و(1) نجد: $a=1$ و $b=-4-i$،إذن:من أجل كل عدد مركب z لدينا:

$p(z)=(z-i)(z-2+i)(z-4-i)$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $p(z)=0$ معناه $z=i$ أو $z=2-i$ أو $z=4+i$. $S=\{i;2-i;4+i\}$

3) نسمي $z_0=i$ ، $z_1=2-i$ و $z_2=4+i$ حلول المعادلة $p(z)=0$ حيث: $|z_1|<|z_2|$. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\dfrac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$ عددا حقيقيا .

$\left(\dfrac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$ عددا حقيقيا معناه $(1+i)^n=\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^n=\left(\dfrac{4}{2-2i}\right)^n=\left(\dfrac{4+i-i}{2-i-i}\right)^n=\left(\dfrac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$ حقيقيا

أي $e^{i\frac{n\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$ حقيقيا معناه $n\frac{\pi}{4}=\pi k\ ;k\in\mathbb{N}$ أي $n=4k$ و $k\in\mathbb{N}$.

$A(i)$ ، $B(2-i)$ و $C(4+i)$. * المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين (عدة طرق لتبيين ذلك)

ت تعيين إحداثيي النقطة D صورة النقطة B بالدّوران R الذي مركزه A وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

$R\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)(B)=D$ أي: $z_D-z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$ أي: $z_D=-2-i$.

ث عين زاوية ونسبة التشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C .

$$S:M(z)\mapsto M'(z')\ /\ z'=az+b$$

لدينا: $\begin{cases}S(B)=C\\S(A)=A\end{cases}$ أي $\begin{cases}z_C=az_B+b\\z_A=az_A+b\end{cases}$ أي: $z_C-z_A=a(z_B-z_A)$ فنجد: $a=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

أو نكتب: $z_C-z_A=ke^{i\theta}(z_B-z_A)$ ثم نستخرج مباشرة: $ke^{i\theta}$ وهي نسبة وزاوية $k=\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

د- طبيعة التحويل $S\circ R$: عدة طرق :

1- $S\circ R$ هو تشابه مباشر للمستوي مركزه A ونسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته: $\theta=-\frac{\pi}{4}$. أو نستخدم: العبارة المركبة لكل من التحويلين R و S .

لدينا: $R:M(z)\mapsto M_1(z_1)\ /\ z_1=-iz-1+i$ و $S:M_1(z_1)\mapsto M'(z')\ /\ z'=(1+i)z_1+1$

ومنه يكون: $S\circ R$: $S\circ R:M(z)\mapsto M'(z')\ /\ z'=-i(1+i)z-1$ وعندها يكون التحويل المركب تشابه مباشر نسبته $|-i(1+i)|=\sqrt{2}$ وزاويته هي $arg(-i(1+i))=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi k=-\frac{\pi}{4}+2\pi k\ /\ k\in\mathbb{Z}$.

$$S\circ R=S'\left(A;\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$$

حل التمرين الثالث :

لدينا النقط $A\left(-\sqrt{2};1;0\right)$، $B\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$ والمستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية: $x-y-z+\sqrt{3}=0$.

أ- لنبيّن أنّ المستقيم (AB) ليس عموديا على المستوي (P) . لدينا: $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{2};-1;-\sqrt{2}\right)$ و $\vec{n}_P(1;-1;-1)$

نلاحظ أنّ: $\overrightarrow{AB}.\vec{n}_P=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+1\neq 0$ وهذا يعني أنّ المستقيم (AB) ليس عموديا على المستوي (P)

ب -إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار بالنقطتين A و B والعمودي على المستوي (P) .

ليكن $\vec{n}_Q(\alpha;\beta;\gamma)$ شعاع ناظم لـــ (Q)

لدينا: $\begin{cases}\vec{n}_Q\perp(AB)\\\vec{n}_Q\perp\vec{n}_P\end{cases}$ أي $\begin{cases}\sqrt{2}\alpha-\beta-\sqrt{2}\gamma=0\\\alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}$ وبطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد:

$\alpha\left(\sqrt{2}-1\right)=\gamma\left(\sqrt{2}-1\right)$ وهذا يعني أنّ : $\alpha=\gamma$ وعليه تكون : $\beta=0$ إذن $\vec{n}_Q(1;0;1)$ ومنه

تكون للمستوي (Q) معادلة ديكارتية من الشكل: $x+z+d=0$ وبما أنّ $B\left(0;0;-\sqrt{2}\right)\in(Q)$ فإنّ: $d=\sqrt{2}$ وعليه تكون :

$$\boxed{(Q): x+z+\sqrt{2}=0}$$

3) (S) سطح الكرة التي مركزها O ومماسية للمستوي (P). معناه: $x^2+y^2+z^2=r^2$ و

$d\left(O;(P)\right)=r=\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|=1$ ومنه: $(S): x^2+y^2+z^2=1$.

ب- المستوي (Q) يمس (S) معناه $d\left(O;(Q)\right)=1$ ولدينا: $d\left(O;(Q)\right)=\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|=1=r$. ومنه المستوي (Q) يمس (S).

ج- I و J نقطتي التماس لــ (S) مع المستويين (P) و (Q). لنبيّن أنّ $IJ=\sqrt{2}$.

*ط1: لدينا: (P) و (Q) متعامدان إذن (OI) عمودي على (OJ) ومنه المثلث OIJ قائم في O وحسب مبرهنة فيثاغورس : $IJ^2=IO^2+OJ^2=1+1=2$ ومنه: $IJ=\sqrt{2}$.

*ط2: وكذلك يمكن إيجاد إحداثيات النقطتين I و J .

لدينا: $\overrightarrow{OI}\parallel\vec{n}_P$ و $\overrightarrow{OJ}\parallel\vec{n}_Q$ وعليه تكون: $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $J\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ومنه:

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ومنه: $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|=\sqrt{2}$.

3) (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق:

$x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ حيث m وسيط حقيقي.

أ- بيّن أنّ (S_m) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m .

$M\in(S_m)$ معناه: $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$

$M\in(S_m)$ معناه:

$$\left[x-(m+1)\right]^2-(m+1)^2+(y+m)^2-m^2+\left[z+(m-1)\right]^2-(m-1)^2-2m\sqrt{3}=0$$

$M\in(S_m)$ معناه:

$$\left[x-(m+1)\right]^2-(m+1)^2+(y+m)^2-m^2+\left[z+(m-1)\right]^2-(m-1)^2-2m\sqrt{3}=0$$

$$\left[x-(m+1)\right]^2+(y+m)^2+\left[z+(m-1)\right]^2=(m+1)^2+m^2+(m-1)^2+2m\sqrt{3}=3m^2+2m\sqrt{3}+2$$

نلاحظ أنّه من أجل كل $m\in\mathbb{R}: 3m^2+2m\sqrt{3}+2>0$ وعليه تكون (S_m) سطح كرة مركزها $I_m(m+1;-m;-m+1)$.

ونصف قطرها $R_m=\sqrt{3m^2+2m\sqrt{3}+2}$.

تعيين مجموعة النقط I_m لمّا m يتغير في $\mathbb{R}$. لدينا: $I_m(m+1;-m;-m+1)$; $m\in\mathbb{R}$ وعليه تكون $\begin{cases}x=1+m\\ y=-m\\ z=1-m\end{cases}$

مجموعة النقط I_m لمّا m يتغير في $\mathbb{R}$ هو مستقيم يشمل النقطة $K(1;0;1)$ و $\vec{v}(1;-1;;-1)$ شعاع توجيها له.

ج- بيّن أنّ كل الكرات (S_m) تمر بدائرة ثابتة (C) موجودة في مستو يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .

$M\in(S_m)$ معناه: $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ تعني أن:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z+m\left(-2x+2z+2y-2\sqrt{3}\right)=0$$

وهذا يعني أنّ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2z=0\\ -2x+2y+2z-2\sqrt{3}=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\\ -x+y+z-\sqrt{3}=0\end{cases}$

وهي عبارة عن تقاطع سطح كرة مع مستو لذا نحسب :

$$d\left(\omega(1;0;1);(p')\right)=\left|\frac{-1+0+1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|=\frac{\left(\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{3}=1<\sqrt{2}=r'$$ ومنه تقاطعهما هي دائرة مركزها H

ونصف قطرها r حيث: $r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=1$ و $H\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ لدينا: $\overrightarrow{\omega H}\parallel\vec{n}_{p'}$ حيث $\omega(1;0;1)$.

التمرين04 : لدينا: $f(x)=x(\ln x)^2$ إذا كان $x\in]0;+\infty[$ و $f(0)=0$

1)أ-إثبات أنّ الدّالة f مستمرة على $\mathbb{R}^+$. (مساعدة لإثبات استمرارية f عند $x=0$ ضع : $x=t^2$ $(t>0)$) .

* هل f مستمرة عند $x=0$ من اليمين ؟

الدّالة f مستمرة على $\mathbb{R}^{+*}$ لأنّ الدّالة $x\mapsto \ln x$ مستمرة على $\mathbb{R}^{+*}$ إذن يكفي أن نبين أنّ f مستمرة عند $x=0$ من اليمين

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} x(\ln x)^2=\lim_{t\xrightarrow{>}0} t^2\left(\ln t^2\right)^2=4\lim_{t\xrightarrow{>}0} t^2\ln^2 t=4\lim_{t\xrightarrow{>}0}(t\ln t)^2=0=f(0)$$

ومنه الدّالة f مستمرة عند $x=0$ من اليمين . إذن f مستمرة على $\mathbb{R}^+$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to\infty}(\ln x)^2=+\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x)^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\ln t^2\right)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(2\ln t)^2}{t^2}=4\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

ج- قابلية اشتقاق f من اليمين عند 0 : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(\ln x)^2=+\infty$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين . والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازيا لحامل محور التراتيب عند النقطة $O(0;0)$.

1) دراسة تغيرات f : f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ودالتها المشتقة هي f' حيث:

$$f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}=(\ln x)^2+2\ln x=\ln x(\ln x+2) \ .$$

$f'(x)=\ln x(\ln x+2)=0$ معناه: $\ln x=0$ أو $\ln x=-2$ معناه: $x=1$ أو $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

$f'(x)=\ln x(\ln x+2)<0$ معناه $e^{-2}<x<1$ و $f'(x)=\ln x(\ln x+2)>0$ معناه $\left(0<x<e^{-2}\right)\vee(x>1)$.

جدول التغيرات

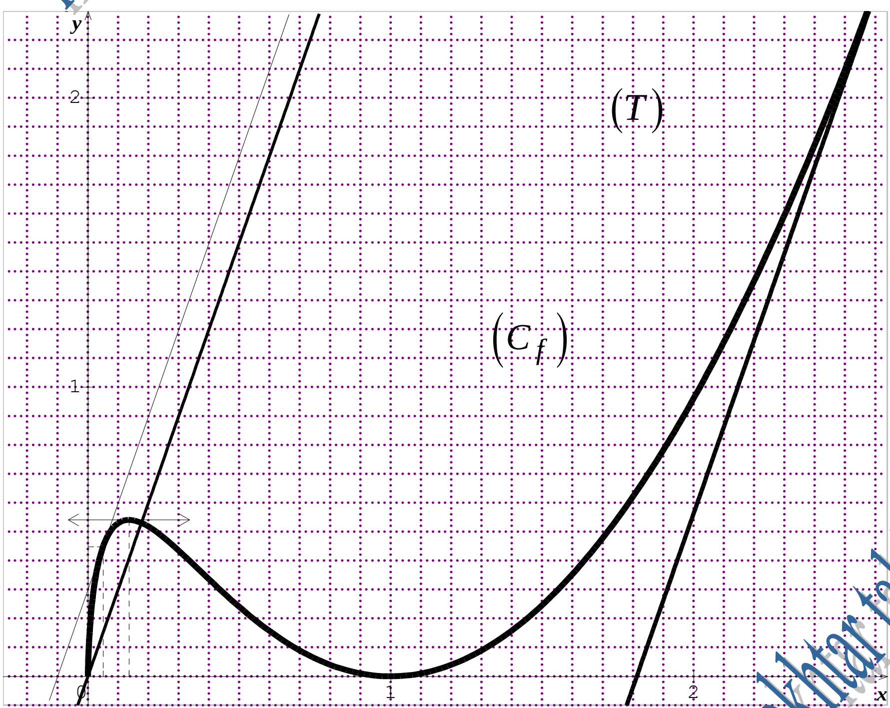
x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

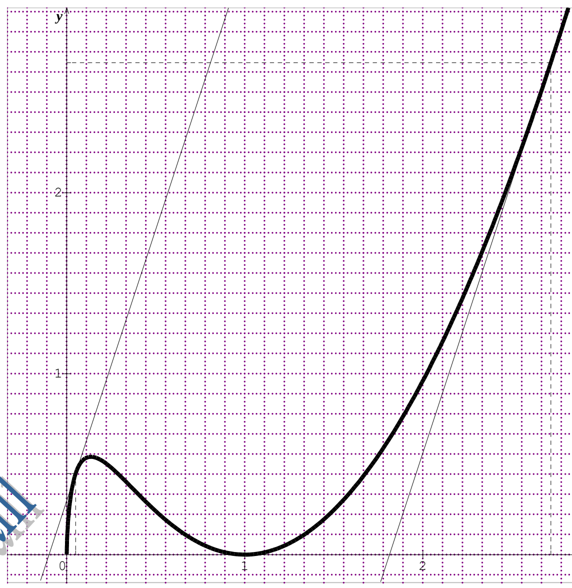
***معادلة المماس** (T) للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها e . لدينا: $f(e)=e(\ln e)^2=e$ و

$f'(e)=\ln e(\ln e+2)=3$

$(T): y=f'(e)(x-e)+f(e)$ أي: $\boxed{(T): y=3(x-e)+e=3x-2e}$

الرسم :





4) m وسيط حقيقي ،ناقش بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة: $x(\ln x)^2-3x+m=0$

$x(\ln x)^2-3x+m=0$ معناه $x(\ln x)^2=3x-m=f(x)$ حلول المعادلة $f(x)=3x-m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=3x-m$.

*إذا كان $m=2e$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد وهو: $x=e$.

* إذا كان $m>2e$ فإنّ المعادلة: لا تقبل أي حل .

* إذا كان $0<m<2e$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد موجب تماما .

* إذا كان $-6e^{-3}<m\leq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين موجبين متمايزين .

* إذا كان $m=-6e^{-3}$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد موجب وهو $x=e^{-3}$.

* إذا كان $m<-6e^{-3}$ فإنّ المعادلة لا تقبل أي حل .

مناقشة الحالة: هل يوجد مماس آخر للمنحنى (C_f) يوازي (T) ؟

لنحل المعادلة: $f'(x)=3$ أي $\ln^2 x+2\ln x-3=0$ وبوضع $t=\ln x$ نجد المعادلة: $t^2+2t-3=0$ ومنه نجد $t=1$

أو $t=-3$ أي: $x=e$ أو $x=e^{-3}$. إذن يوجد نقطتان من المنحنى فاصلتاهما $x=e$ و $x=e^{-3}$ معناه يوجد مماس آخر يوازي (T) .

5) g الدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ: $g(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x(\ln x-1)$.

أ–حساب $g'(x)$:

$g'(x)=x\left(\ln^2 x-\ln x\right)+\frac{1}{2}x^2\left(2\ln x\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=x\ln^2 x-x\ln x+x\ln x-\frac{1}{2}x=x(\ln x)^2-\frac{1}{2}x$ ومنه :

$g'(x)=x(\ln x)^2-\frac{1}{2}x=f(x)-\frac{1}{2}x$ أي: $\boxed{f(x)=g'(x)+\frac{1}{2}x}$ ومنه مجموعة الدّوال الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ هي : $F(x)=g(x)+\frac{1}{4}x^2+c$ حيث c ثابت حقيقي .

ب– β عدد حقيقي حيث $0<\beta<1$ أحسب المساحة $A(\beta)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها : $x=\beta$ ، $x=1$ و $y=0$. ثم أحسب $\lim_{\beta\to 0} A(\beta)$.

$$A(\beta)=\left[g(x)+\frac{1}{4}x^2\right]_{\beta}^{1}=\left[\left(g(1)+\frac{1}{4}\right)-\left(g(\beta)+\frac{1}{4}\beta^2\right)\right]u.a=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\beta^2\left(\ln^2\beta-\ln\beta\right)+\frac{1}{4}\beta^2\right)$$

$$A(\beta)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\beta^2\left(\ln^2\beta-\ln\beta\right)+\frac{1}{4}\beta^2\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta^2\ln^2\beta+\frac{1}{2}\beta^2\ln\beta+\frac{1}{4}\beta^2$$

$$A(\beta)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta^2\ln^2\beta+\frac{1}{2}\beta^2\ln\beta+\frac{1}{4}\beta^2$$

$$\lim_{\beta\to 0^+} A(\beta)=\frac{1}{4}$$

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{4+u_n}$.

1) حساب $u_1=\dfrac{1}{2}$ و $u_2=\dfrac{7}{9}$. (u_n) ليست حسابية لأنّ: $u_1-u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_2-u_1=\dfrac{7}{9}-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}$ وكذلك

(u_n) ليست هندسية لأنّه. إذا كانت (u_n) هندسية فجميع حدودها معدومة حيث حدها الأول $u_0=0$.

2) لنبيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$. نسمي $p(n)$ هذه الخاصية

– لتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=0$ و $0\le 0\le 1$ إذن $p(n)$ صحيحة من أجل $n=0$ – نفرض صحة الخاصية $p(n)$ من أجل أي $0\le u_n\le 1$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي:

$0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا: $0\le u_n\le 1$ ومنه: $4\le 4+u_n\le 5$ ومنه $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{4+u_n}\le\dfrac{1}{4}$ ومنه: $\dfrac{10}{5}\le\dfrac{10}{4+u_n}\le\dfrac{10}{4}$ ومنه

$-\dfrac{10}{4}\le-\dfrac{10}{4+u_n}\le-\dfrac{10}{5}$ ومنه $3-\dfrac{10}{4}\le 3-\dfrac{10}{4+u_n}\le 3-\dfrac{10}{5}$ ومنه $0\le\dfrac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$ ومنه $p(n+1)$

صحيحة وحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّ الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$.

*لنبرهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : (u_n) متزايدة .

لنحسب $u_{n+1}-u_n=3-\dfrac{10}{4+u_n}-u_n=-\dfrac{(u_n-1)(u_n+2)}{4+u_n}\ge 0$ لأنّ: $u_n-1\le 0$ و $u_n+2>0$ و

$4+u_n>0$ ومنه (u_n) متزايدة .

أ– لنبيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $(1-u_{n+1})-\dfrac{2}{3}(1-u_n)=\dfrac{2(u_n^2-1)}{3(u_n+4)}$.

$(1-u_{n+1})-\dfrac{2}{3}(1-u_n)=\dfrac{2(u_n^2-1)}{3(u_n+4)}\le 0$ ومنه: $(1-u_{n+1})\le\dfrac{2}{3}(1-u_n)$ أي: $(1-u_{n+1})\le\dfrac{2}{3}(1-u_n)$

ب– وأنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $|1-u_{n+1}|\le\dfrac{2}{3}|1-u_n|$.

انطلاقا من: $|1-u_{n+1}|\le\dfrac{2}{3}|1-u_n|$ لدينا: $|1-u_1|\le\dfrac{2}{3}|1-u_0|$

$|1-u_2|\le\dfrac{2}{3}|1-u_1|$

$|1-u_3|\le\dfrac{2}{3}|1-u_2|$

....

....

$|1-u_n| \le \frac{2}{3}|1-u_{n-1}|$ ثم بضرب طرف طرف المتباينات نجد:

$|1-u_n| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$. ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.