التحضير الجيد للبكالوريا 2017 في مادة الرياضيات

الموضوع رقم (01)

التمرين الأول: ☹☹☹ (05 نقاط) مشاهدة التصحيح

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر العدد المركب a حيث $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ والنقطة A_0 ذات اللاحقة $z_0=6+6i$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر النقطة A_n ذات اللاحقة z_n حيث : $z_n=a^n z_0$.

I) 1) أكتب كلا من z_1 و a^2 على الشكل الجبري .

2) أكتب z_1 على الشكل الأسي ثم بيَن أنَ : $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) **عبر عن** z_3 و z_7 بدلالة z_1 و a^2 ثم إستنتج الشكل الأسي لكل من z_3 و z_7.

4) أرسم النقط A_3, A_1, A_0 و A_7 صور الأعداد z_3, z_1, z_0 و z_7 على الترتيب .

II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $|z_n|=r_n$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

2) إستنتج أنَ المتتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

3) عين نهاية المتتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين الثاني: ☺☹☹ (04 نقاط) مشاهدة الحل

(a_n) و(b_n) متتاليتان عدديتان معرفتان أجل كل عدد طبيعي nبـ :

$$a_0=3 \text{ و } a_{n+1}=2a_n-1 \qquad b_0=1 \text{ و } b_{n+1}=2b_n+3$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n=2^{n+1}+1$.

2) هل العددين a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما ؟

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد 2017^{1438} على العدد 5.

4) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2a_n-b_n=5$.

ب) استنتج عبارة b_n بدلالة n.

ج) عين القيم المكنة لـ $PGCD(a_n;b_n)$.

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(a_n;b_n)=5$

التمرين الثالث: ☹☹😐 ______(04 نقاط) مشاهدة الحل

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و α عدد حقيقي حيث $\alpha \in \left]0,\pi\right[$.

نعتبر $\left(S_\alpha\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث :

$$OM^2-2\cos\left(\alpha\right)\left[\overrightarrow{OM}.\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)\right]+3-4\sin^2\left(\alpha\right)=0$$

1) أ) عين معادلة ديكارتية للمجموعة $\left(S_\alpha\right)$.

ب) بين أنّ المجموعة $\left(S_\alpha\right)$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_α ونصف قطرها R_α.

ج) استنتج مجموعة النقط I_α عندما يمسح العدد الحقيقي α المجال $\left]0,\pi\right[$.

2) أ) عين سطوح الكرات $\left(S_\alpha\right)$ التي تمر من المبدأ.

ب) بين أنّ المبدأ هو منتصف القطعة $\left[I_{\pi-\alpha}I_\alpha\right]$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى سطحي الكرتين $\left(S_\alpha\right)$ و $\left(S_{\pi-\alpha}\right)$ ؟

3) ليكن $\left(P\right)$ المستوي ذي المعادلة الديكارتية : $x+y+z=0$.

أ) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_α على المستوي $\left(P\right)$.

ب) أدرس تقاطع سطح الكرة $\left(S_\alpha\right)$ والمستوي $\left(P\right)$.

التمرين الرابع : ☹☺☺ ______(07 نقاط) مشاهدة الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D_f=\left]0;e\right[\cup\left]e;+\infty\right[$ بما يلي : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x\left(1-\ln x\right)}$

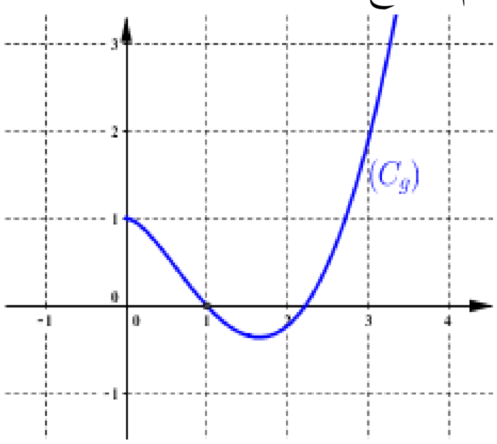
نسمي $\left(\mathscr{C}_f\right)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (الوحدة $2cm$)

I. 1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f\left(x\right)$ ثم فسَر هندسيا النتيجتين.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

3) بين أنّ : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(x\right)=+\infty$ ثمّ فسر هندسيا النتيجة .

4) بين أنه من أجل $x\in D_f$ لدينا : $f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2\left(1-\ln x\right)^2}$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.



II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بما يلي : $g\left(x\right)=1-x^2\left(1-\ln x\right)$

وليكن $\left(\mathscr{C}_g\right)$ المنحني الممثل لها كما في الشكل الموالي .

1) أ) حدد بيانيا حلول المعادلة $g\left(x\right)=0$.

ب) يعطى جدول القيم التالي :

x	2.1	2.2	2.3	2.4
$g(x)$	-0.14	-0.02	0.12	0.28

بين أنَ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $2.2<\alpha<2.3$.

أ) تحقق أنه من أجل $x \in D_f$:

$$f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ)ذي المعادلة $y=x$.

2) أرسم (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$.

.III أ) بين أنَ : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (لاحظ أنَ $\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}=\frac{1}{x(1-\ln x)}$)

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\sqrt{e}$.

✌ بالتوفيق ☺والنجاح ☹في البكالوريا ☺2017 ❀ ❀

تصحيح التمرين الأول : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ، $z_0=6+6i$ و $z_n=a^n z_0$

I) 1)كتابة كلا من z_1 و a^2 على الشكل الجبري :

لدينا :

$$z_1=a\times z_0=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\times(6+6i)=\frac{6\sqrt{3}+6}{4}+i\frac{6\sqrt{3}-6}{4}+i\frac{6\sqrt{3}+6}{4}-\frac{6\sqrt{3}-6}{4}$$

أي $z_1=\frac{6\sqrt{3}+6-6\sqrt{3}+6}{4}+i\frac{6\sqrt{3}-6+6\sqrt{3}+6}{4}=3+3i\sqrt{3}$ إذن $z_1=3+3i\sqrt{3}$

و $$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2+2i\times\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)+i^2\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2$$

ومنه $a^2=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{16}+2i\times\left(\frac{3-1}{16}\right)-\frac{3+1-2\sqrt{3}}{16}=\frac{4\sqrt{3}}{16}+\frac{4}{16}i$

ومنه $a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

2) كتابة z_1 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=3+3i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_1|=|3+3i\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$

تعيين عمدة للعدد z_1:

نضع $\arg(z_1)=\theta_1$ إذن $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

الشكل الأسي للعدد z_1 هو $z_1=6e^{i\frac{\pi}{3}}$

تبيان أنّ : $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$:

لدينا : $a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

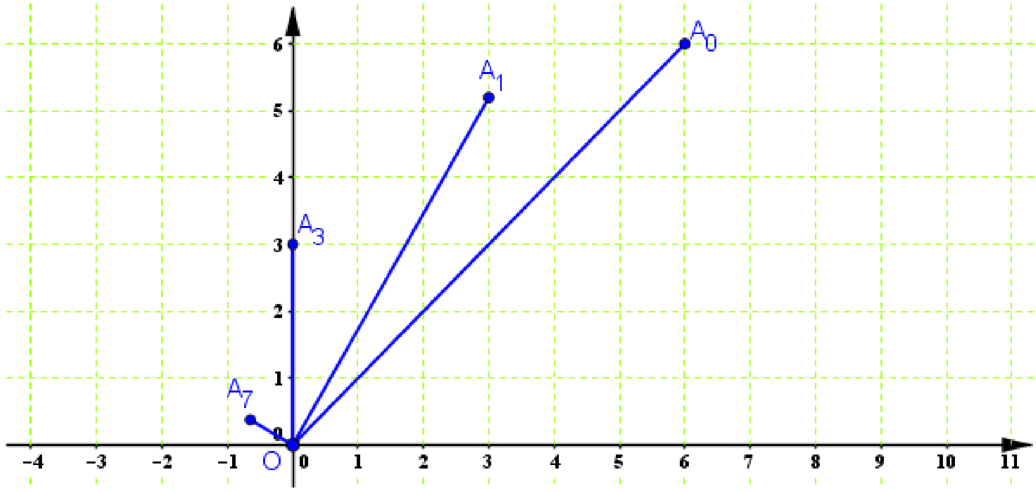
3) التعبير عن z_3 و z_7 بدلالة z_1 و a^2 :

لدينا : $z_3=a^3\times z_0=a^2\times az_0=a^2z_1$ و $z_7=a^7\times z_0=a^6\times az_0=(a^2)^3\times z_1$

إستنتاج الشكل الأسي لكل من z_3 و z_7:

لدينا : $z_3=a^2z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\times 6e^{i\frac{\pi}{3}}=3e^{i\frac{\pi}{2}}$

و $z_7=(a^2)^3\times z_1=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3\times 6e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{2}}\times 6e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$



II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $|z_n|=r_n$

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$:

لدينا : $r_n=|z_n|=|a^n z_0|=|a^n|\times|z_0|=|a|^n\times|z_0|$

أي $r_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times 6\sqrt{2}=12\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

ومنه $r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

2) إستنتاج أنّ المتتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :

لدينا : $\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2}}{12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=q$ ومنه المتتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الأول $r_0=12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

3) تعيين نهاية المتتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(12\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=0$ لأنَ $-1<q<1$.

التفسير الهندسي للنتيجة :

النقطة A_n تقترب من المبدأ O عندما n يؤول إلى $+\infty$.

تصحيح التمرين الثاني : (04 نقاط)   الرجوع إلى نص التمرين

أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$a_0 = 3$ و $a_{n+1} = 2a_n - 1$ $b_0 = 1$ و $b_{n+1} = 2b_n + 3$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n = 2^{n+1} + 1$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

أ) من أجل $n = 0$ لدينا : $a_0 = 3$ و $a_0 = 2^{0+1} + 1 = 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة .

ب) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنّ : $a_n = 2^{n+1} + 1$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنّ $a_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

لدينا : $a_{n+1} = 2a_n - 1 = 2 \times 2^{n+1} + 1 = 2^{n+2} + 1$ ومنه $P(n+1)$

ج) حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّ $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

2) دراسة أولية العددين a_n و a_{n+1} فيما بينهما :

لدينا : $a_{n+1} = 2a_n - 1$ ومنه $-a_{n+1} + 2a_n = 1$

إذن يوجد عددان صحيحان $(\alpha;\beta) = (-1;2)$ بحيث $\alpha a_{n+1} + \beta a_n = 1$ حسب مبرهنة بيزو فإن : a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

3) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5:

لدينا :

$2^0 \equiv 1[5]$ $2^1 \equiv 2[5]$ $2^2 \equiv 4[5]$ $2^3 \equiv 3[5]$ $2^4 \equiv 1[5]$

بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $p = 4$.

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$n = 4k$	$n = 4k+1$	$n = 4k+2$	$n = 4k+3$
$2^n \equiv ...[5]$	1	2	4	3

إستنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد 2017^{1438} على العدد 5:

لدينا : $2017^{1438} \equiv 2^{1438}[5]$

أي $2017^{1438} \equiv 2^{4\times 359+2}[5]$ ومنه $2017^{1438} \equiv 4[5]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{1438} على 5 هو 4.

4) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2a_n - b_n = 5$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1. من أجل $n = 0$ لدينا : $2a_0 - b_0 = 2\times 3 - 1 = 5$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

2. نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنّ : $2a_n-b_n=5$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنّ :
$2a_{n+1}-b_{n+1}=5$.

لدينا : $2a_{n+1}-b_{n+1}=2(2a_n-1)-(2b_n+3)=4a_n-2-2b_n-3$

ومنه $2a_{n+1}-b_{n+1}=2(2a_n-b_n)-5=2\times5-5=5$ أي $2a_n-b_n=5$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3. حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $2a_n-b_n=5$

ب) استنتاج عبارة b_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2a_n-b_n=5$ ومنه

$$b_n=2a_n-5=2(2^{n+1}+1)-5=2\times2^{n+1}+2-5=2^{n+2}-3$$

أي $b_n=2^{n+2}-3$

ج) تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n;b_n)$:

ليكن $d=PGCD(a_n;b_n)$

إذن $\begin{cases}d/a_n\\ d/b_n\end{cases}$ ومنه $d/(2a_n-b_n)$ أي $d/5$ وبالتالي $d\in\{1;5\}$.

د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(a_n;b_n)=5$:

$PGCD(a_n;b_n)=5$ **يعني** $\begin{cases}a_n\equiv0[5]\\ b_n\equiv0[5]\end{cases}$ أي $\begin{cases}a_n\equiv0[5]\\ 2a_n-5\equiv0[5]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a_n\equiv0[5]\\ 2a_n\equiv0[5]\end{cases}$

وبالتالي $a_n\equiv0[5]$

$a_n\equiv0[5]$ يعني $2^{n+1}+1\equiv0[5]$ ومنه $2\times2^n\equiv-1[5]$

أي $2\times2^n\equiv4[5]$ ومنه $2^n\equiv2[5]$

وبالتالي : $n=4k+1\ (k\in\mathbb{N})$

تصحيح التمرين الثالث : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $(S_\alpha):OM^2-2\cos(\alpha)\left[\overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\right]+3-4\sin^2(\alpha)=0$

1) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (S_α):

لدينا : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ، $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

وبالتالي : $OM^2=x^2+y^2+z^2$ و $\overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=\overrightarrow{OM}.\vec{i}+\overrightarrow{OM}.\vec{j}+\overrightarrow{OM}.\vec{k}=x+y+z$

أي لدينا : $x^2+y^2+z^2-2\cos(\alpha)(x+y+z)+3-4\sin^2(\alpha)=0$

ومنه : $x^2+y^2+z^2-2x\cos(\alpha)-2y\cos(\alpha)-2z\cos(\alpha)+3-4\sin^2(\alpha)=0$

أي

$$(x-\cos(\alpha))^2-\cos^2(\alpha)+(y-\cos(\alpha))^2-\cos^2(\alpha)+(z-\cos(\alpha))^2-\cos^2(\alpha)+3-4\sin^2(\alpha)=0$$

ومنه : $(x-\cos(\alpha))^2+(y-\cos(\alpha))^2+(z-\cos(\alpha))^2-3\cos^2(\alpha)+3-4\sin^2(\alpha)=0$

وبالتالي : $(x-\cos(\alpha))^2+(y-\cos(\alpha))^2+(z-\cos(\alpha))^2-3(1-\sin^2(\alpha))+3-4\sin^2(\alpha)=0$

أي $(x-\cos(\alpha))^2+(y-\cos(\alpha))^2+(z-\cos(\alpha))^2-3+3\sin^2(\alpha)+3-4\sin^2(\alpha)=0$

ومنه $(x-\cos(\alpha))^2+(y-\cos(\alpha))^2+(z-\cos(\alpha))^2-\sin^2(\alpha)=0$ معادلة للمجموعة (S_α)

ب) تبيان أنّ المجموعة (S_α) هي سطح كرة :

لدينا : $(x-\cos(\alpha))^2+(y-\cos(\alpha))^2+(z-\cos(\alpha))^2-\sin^2(\alpha)=0$

ومنه : $(x-\cos(\alpha))^2+(y-\cos(\alpha))^2+(z-\cos(\alpha))^2=\sin^2(\alpha)$

وبما أنّه من أجل $\alpha\in]0;\pi[$ فإنّ $\sin(\alpha)>0$

فإنّ (S_α) سطح كرة مركزها $I_\alpha(\cos(\alpha);\cos(\alpha);\cos(\alpha))$ ونصف قطرها $R_\alpha=\sin(\alpha)$.

1) استنتاج مجموعة النقط I_α عندما يمسح العدد الحقيقي α المجال $]0,\pi[$:

لدينا : $I_\alpha(\cos(\alpha);\cos(\alpha);\cos(\alpha))$

ومنه : $\begin{cases} x=\cos(\alpha) \\ y=\cos(\alpha) \\ z=\cos(\alpha) \end{cases}$

نضع : $\cos(\alpha)=t$ ومنه $\begin{cases} x=t \\ y=t;(t\in]-1;1[) \\ z=t \end{cases}$ لأنّه من أجل $\alpha\in]0,\pi[$ فإنّ

$\cos(\alpha)\in]-1,1[$

وبالتالي مجموعة النقط I_α عندما يمسح العدد الحقيقي α المجال $]0,\pi[$ هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]AB[$ حيث $A(-1;-1;-1)$ و $B(1;1;1)$.

2) أ) تعيين سطوح الكرات (S_α) التي تمر من المبدأ O:

$O\in(S_\alpha)$ يعني $(0-\cos(\alpha))^2+(0-\cos(\alpha))^2+(0-\cos(\alpha))^2-\sin^2(\alpha)=0$

أي $3\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=0$ ومنه $3\cos^2(\alpha)-(1-\cos^2(\alpha))=0$

وبالتالي : $3\cos^2(\alpha)-1+\cos^2(\alpha)=0$

ومنه : $4\cos^2(\alpha)-1=0$ أي $\cos^2(\alpha)=\frac{1}{4}$

وبالتالي إما $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ أو $\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$

ومنه : $\alpha=\frac{\pi}{3}$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

أي $\left(S_{\frac{\pi}{3}}\right)$ و $\left(S_{\frac{2\pi}{3}}\right)$ تمران من المبدأ O.

ب) تبيان أنّ النقطة O هي منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha}I_\alpha]$:

لدينا : إحداثيات منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha}I_\alpha]$ هي

$$\left(\frac{\cos(\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{2};\frac{\cos(\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{2};\frac{\cos(\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{2}\right)$$

ولدينا : $\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$

ومنه إحداثيات منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha}I_\alpha]$ هي المبدأ $O(0;0;0)$

الاستنتاج بالنسبة إلى سطحي الكرتين (S_α) و $(S_{\pi-\alpha})$:

لدينا : $R_\alpha=\sin(\alpha)$ و $R_{\pi-\alpha}=\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$

أي $R_{\pi-\alpha}=R_\alpha$ و لدينا كذلك منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha}I_\alpha]$ هي المبدأ $O(0;0;0)$

نستنتج أنّ (S_α) و $(S_{\pi-\alpha})$ متناظرتين بالنسبة إلى المبدأ $O(0;0;0)$.

3) لدينا : $(P):x+y+z=0$

أ) تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_α على المستوي (P):

تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من I_α والعمودي على المستوي (P) :

$$(\Delta):\begin{cases}x=\lambda+\cos(\alpha)\\y=\lambda+\cos(\alpha);\ (\lambda\in\mathbb{R})\\z=\lambda+\cos(\alpha)\end{cases}$$

إحداثيات النقطة H هي حل للجملة $\begin{cases}x=\lambda+\cos(\alpha)\\y=\lambda+\cos(\alpha)\\z=\lambda+\cos(\alpha)\\x+y+z=0\end{cases}$

ومنه $\lambda+\cos(\alpha)+\lambda+\cos(\alpha)+\lambda+\cos(\alpha)=0$ أي $3\lambda+3\cos(\alpha)=0$

ومنه $\lambda=-\cos(\alpha)$

إذن إحداثيات النقطة H هي $\begin{cases}x=-\cos(\alpha)+\cos(\alpha)=0\\y=-\cos(\alpha)+\cos(\alpha)=0\\z=-\cos(\alpha)+\cos(\alpha)=0\end{cases}$ أي $H(0;0;0)$

ب) دراسة تقاطع المستوي (P) وسطح الكرة (S_α):

حساب المسافة بين النقطة I_α والمستوي (P) : أي $d(I_\alpha;(P))=\sqrt{3}\times|\cos(\alpha)|$

نصف قطر سطح الكرة (S_α) هو $R_\alpha=\sin(\alpha)$

(P) يمس سطح الكرة (S_α) يعني $R_\alpha=d(I_\alpha;(P))$

ومنه $\sqrt{3}\times|\cos(\alpha)|=\sin(\alpha)$ يكافئ $\sqrt{3}\times\cos(\alpha)=\sin(\alpha)$ أو $\sqrt{3}\times(-\cos(\alpha))=\sin(\alpha)$

أي $\sqrt{3}\times\cos(\alpha)-\sin(\alpha)=0$ أو $-\sqrt{3}\times\cos(\alpha)-\sin(\alpha)=0$

وبالتالي : $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos(\alpha)-\frac{1}{2}\sin(\alpha)=0$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\alpha)=0$

ومنه $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=0$ أو $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=0$

أي $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ أو $\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

ومنه $\alpha=\frac{\pi}{3}$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

$\alpha\in$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
إشارة $d(I_\alpha;(P))-R_\alpha$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖

الوضع النسبي :

- إذا كان $\alpha=\frac{\pi}{3}$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ فإنّ (P) يمس سطح الكرة (S_α) في المبدأ O.
- إذا كان $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[$ التقاطع خال .
- إذا كان $\alpha\in\left]\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[$ فإنّ (P) يقطع (S_α) وفق دائرة مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها

$r=\sqrt{\sin^2(\alpha)-3\cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-4\cos^2(\alpha)}$

تصحيح التمرين الرابع: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$ معرفة على $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

I. 1) حساب $\lim_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ ثم التفسير الهندسي للنتيجتين:

لدينا : $\lim_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)=\lim_{\substack{x\to e\\x<e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}=+\infty$ لأنّ $\lim_{\substack{x\to e\\x<e}}(1-\ln x)=0^+$

و $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} (1-\ln x) = 0^-$

التفسير الهندسي : $x=e$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ يوازي محور التراتيب .

2) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$ **لأن** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1-\ln x) = -\infty$

التفسير الهندسي للنتيجة : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

3) تبيان أنّ : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ثمّ التفسير الهندسي للنتيجة :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x - x\ln x} = +\infty$

لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x\ln x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - x\ln x) = 0^+ \end{cases}$

التفسير الهندسي : $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ يوازي محور التراتيب .

4) تبيان أنه من أجل كل $x \in D_f$ لدينا : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ ثم إستنتاج إتجاه تغير الدالة f

وتشكيل جدول تغيراتها:

من أجل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = -\frac{1\times(1-\ln x) + x\times\left(-\frac{1}{x}\right)}{\left[x(1-\ln x)\right]^2} = -\frac{1-\ln x - 1}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

دراسة إشارة المشتقة : إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\ln x$ لأنّ $x^2(1-\ln x)^2 > 0$

جدول إشارة $f'(x)$:

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

.II لدينا : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$ المعرفة على $D_g =]0;+\infty[$.

1) أ) تحديد بيانيا حلول المعادلة $g(x)=0$:

المنحني $(\mathscr{C}_g)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين وبالتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين متمايزين.

ب) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $2.2<\alpha<2.3$:

لدينا : $g(1)=1-1^2\times(1-\ln 1)=1-1=0$ أي العدد 1 حل للمعادلة $g(x)=0$.

ولدينا : الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[2.2;2.3]$

ولدينا كذلك : $g(2.2)\times g(2.3)=-0.22\times 0.12<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2<\alpha<2.3$.

2) أ) تحقق أنه من أجل $x\in D_f$: $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

من أجل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ لدينا : $f(x)-x=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}-x=\dfrac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$:

- **جدول إشارة $g(x)$:**

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

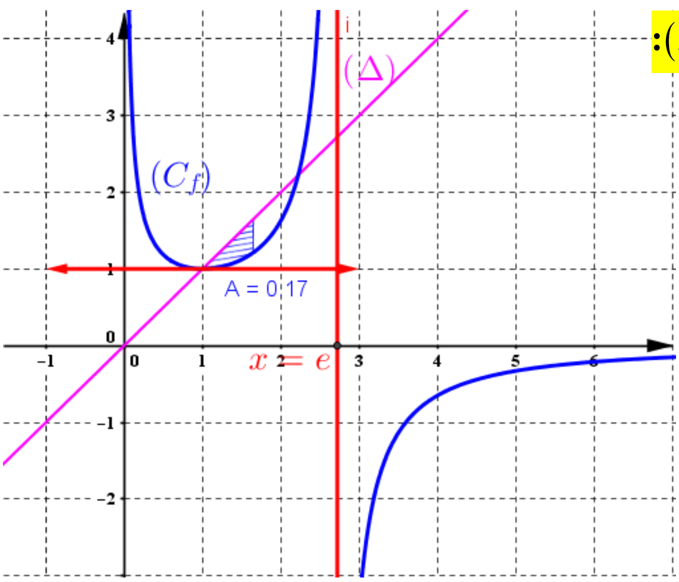
- **جدول إشارة $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$:**

x	0		1		α		e		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

- إذا كان $x\in]0;1[\cup]\alpha;e[$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ فوق (Δ).
- إذا كان $x\in]1;\alpha[\cup]e;+\infty[$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ).
- إذا كان $x=1$ أو $x=e$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع (Δ).

3) رسم (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$:



III. أ) تبيان أنّ : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \ln 2$:

لدينا :

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} -\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx = \left[-\ln|1-\ln x|\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[-\ln(1-\ln x)\right]_1^{\sqrt{e}}$$

لأنه من أجل $x \in \left[1;\sqrt{e}\right]$ لدينا $1-\ln x > 0$ أي $|1-\ln x| = 1-\ln x$

أي $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \left[-\ln\left(1-\ln\sqrt{e}\right)\right] - \left[-\ln(1-\ln 1)\right] = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

وبالتالي $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \ln 2$

ب) حساب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\sqrt{e}$:

من أجل $x \in \left[1;\sqrt{e}\right]$ المستقيم (Δ) يقع فوق $(\mathcal{C}_f)$ وبالتالي المساحة $A = \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x))\,dx$

إذن : $A = \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x))\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2$

أي $A = \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \ln 2\right)\,u.s = 0.17cm^2$

إنتهى تصحيح الموضوع التجريبي الأول

الأستاذ ثابت إبراهيم لا تنسونا

بخالص الدعاء للوالدين والأهل.