التحضير الجيد للبكالوريا 2017 ☺
الموضوع رقم (02)

التمرين الأول ☹☹☹: (04 نقاط) مشاهدة الحل

نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...21x-17y=8$.

1) أ) عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E).

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (E).

ج) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y.

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على العدد 13.

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) فإنَ : $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) وكان x مضاعف للعدد 4 فإنَ : $y\equiv 0[4]$.

ب) عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون : $PGCD(x;y)=4$.

التمرين الثاني ☺☺☺: (05 نقاط) مشاهدة الحل

في الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;2)$، $B(3;2;1)$ و $C(1;3;3)$.

1) بين أنَ تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) هو : $(\lambda\in\mathbb{R})$; $\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=2\\ z=1-\lambda\end{cases}$.

2) بين أنَ النقط A,B و C تعين مستويا .

3) أ) بين أنَ الشعاع $\vec{n}(1;-2;2)$ ناظمي للمستوي (ABC).

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

4) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x-3y+2z+2=0$.

أ) بين أنَ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يشمل النقطة C.

ب) بين أنَ $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ثمَ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

5) لتكن $M(1+2t;3;3-t)$ حيث $t\in\mathbb{R}$ نقطة من المستقيم (Δ).

أ) عين قيمة العدد الحقيقي t حتى بحيث يكون الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عمودي على الشعاع $\vec{u}$.

ب) أحسب إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ).

ج) أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

6) نضع : $f(t)=AM^2$

أ) أحسب $f(t)$ بدلالة t ثم عين القيمة الحدية الصغرى للدالة f.

ب) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

التمرين الثالث ☹☹☺: (04 نقاط) مشاهدة التصحيح

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1$, $z_B = 3+4i$, $z_C = 2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و $z_D = -2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$

1) أ) بين أنَ صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة D.

د) إستنتج أنَ النقطتين B و D تنتميان إلى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

2) لتكن النقطة F صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة B ونسبته $\frac{3}{2}$.

أ) بين أنَ لاحقة النقطة F هي $z_F = -2i$.

ب) بين أنَ F هي منتصف القطعة $[CD]$.

ج) بين أنَ $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ ثم أكتب العدد $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$ على الشكل الأسي .

د) استنتج أنَ المستقيم (AF) هو محور القطعة $[CD]$.

هـ) أنشئ النقط A, B, F, C و D.

التمرين الرابع☹☺☺: (07 نقاط) مشاهدة الحل

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x+1+2x\ln x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

I. f الدالة العددية المعرفة على $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1+\ln x}{(x-1)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ثم فسَر النتائج هندسيا .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ لدينا : $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}\left[\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right]$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسَر النتيجة هندسيا

3) أ) بين أنَ : $f'(x) = \frac{(1-x)\times g(x)}{x(x-1)^4}$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم أرسم (C_f).

5) نعتبر التكاملين التاليين : $I = \int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ و $J = \int_2^3 f(x)\,dx$.

أ) تحقق أنَ : $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ ثم بين أنَ $I = 2\ln 2 - \ln 3$.

ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنَ : $J = 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}$.

ج) أحسب A بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=2,\ y=0$ و $x=3$.

✌ بالتوفيق ☹والنجاح ☺ في الباك ☺ 2017 ❀ ❀

تصحيح الموضوع الثاني

تصحيح التمرين الأول ☹☺☺: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا في المجموعة N^2 المعادلة ذات المجهول التالية : $21x-17y=8...(E)$.

1) أ) تعيين الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E):

لدينا : $21(1)-17(1)=4$ وبالتالي $21(2)-17(2)=8$ أي $(x_0;y_0)=(2;2)$ حل خاص للمعادلة (E)

.

ب) الحل في N^2 المعادلة (E):

لدينا : $21x-17y=21\times2-17\times2$ ومنه $21(x-2)=17(y-2)...(*)$

ولدينا : $17/21(x-2)$ و 17 أولي مع 21 حسب مبرهنة غوص فإنَ $17/(x-2)$

ومنه $x-2=17k$

أي $x=17k+2(k\in N)$

بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد : $y=21k+2(k\in N)$

حلول المعادلة هي $S=\{(17k+2;21k+2);k\in N\}$

ج) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y:

نضع $d=PGCD(x;y)$

لدينا : d/x و d/y ومنه $d/(21x-17y)$ أي $d/8$ وبالتالي $d\in D_8=\{1;2;4;8\}$

2) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على العدد 13:

لدينا :

$9^0\equiv1[13]$ $\quad$ $9^1\equiv9[13]$ $\quad$ $9^2\equiv3[13]$ $\quad$ $9^3\equiv1[13]$

ومنه بواقي قسمة العدد 9^n على العدد 13 تشكل متتالية دورية دورها $p=3$

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

$n=3k+2$	$n=3k+1$	$n=3k$	n
3	9	1	باقي قسمة 9^n على 13

ب) تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ : $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv0[13]$:

لدينا : $3^{34\beta+20}\equiv(3^2)^{17\beta+10}[13]$ ومنه $3^{34\beta+20}\equiv9^{17\beta+10}[13]$ أي $3^{34\beta+20}\equiv9^{17\beta+8+2}[13]$

وبالتالي: $3^{34\beta+20}\equiv9^{21\alpha+2}[13]$

لأنَ : الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) يعني $21\alpha-17\beta=8$ ومنه $21\alpha=17\beta+8$

أي أنَ: $3^{34\beta+20}\equiv9^{21\alpha}\times9^2[13]$

إذن : $3^{34\beta+20}\equiv1\times3[13]$ لأنَ : $\begin{cases}9^{21}\equiv1[13]\\9^2\equiv3[13]\\9^{21\alpha}\equiv1[13]\end{cases}$

وأخيرا : $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 3-1-2[13]$ ومنه $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$

3) أ) تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) وكان x مضاعف للعدد 4 فإنّ : $y\equiv 0[4]$:

الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) يعني $21x-17y=8$.

و كان x مضاعف للعدد 4 يعني $x=4m(m\in N)$

ومنه $21(4m)-17y=8$ أي $17y=21(4m)-8$ وبالتالي $17y\equiv 21(4m)-8[4]$

أي $17y\equiv 0[4]$ وبالتالي $y\equiv 0[4]$.

ب)تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون : $PGCD(x;y)=4$:

$PGCD(x;y)=4$ يعني $\begin{cases}x\equiv 0[4]\\ y\equiv 0[4]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}17k+2\equiv 0[4]\\ 21k+2\equiv 0[4]\end{cases}$ ومنه $k\equiv -2[4]$ أي $k\equiv 2[4]$

وبالتالي $k=4\lambda+2(\lambda\in N)$

ومنه $x=17(4\lambda+2)+2=68\lambda+36$ و $y=21(4\lambda+2)+2=84\lambda+44$

وبالتالي مجموعة الثنائيات التي تحقق هي $S_{(x;y)}=\{(68\lambda+36;84\lambda+44),\lambda\in N\}$

تصحيح التمرين الثاني ☺☺☺ : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا النقط : $A(1;2;2)$, $B(3;2;1)$ و $C(1;3;3)$.

1) تبيان أنّ تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) هو : $\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=2 \quad ;(\lambda\in\mathbb{R})\\ z=1-\lambda\end{cases}$:

نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $\begin{cases}1=3+2\lambda\\ 2=2\\ 2=1-\lambda\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-1\end{cases}$ أي λ وحيد أي إحداثيات النقطة A تحقق الجملة .

نعوض بإحداثيات النقطة B نجد : $\begin{cases}3=3+2\lambda\\ 2=2\\ 1=1-\lambda\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=0\end{cases}$ أي λ وحيد أي إحداثيات النقطة B تحقق الجملة

.

وبالتالي الجملة $\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=2 \quad ;(\lambda\in\mathbb{R})\\ z=1-\lambda\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

2) تبيان أنّ النقط A, B و C تعين مستويا :

نعوض بإحداثيات النقطة C في الجملة نجد : $\begin{cases}1=3+2\lambda\\ 3=2\\ 3=1-\lambda\end{cases}$ فهي لاتحقق الجملة وبالتالي النقطة C لاتنتمي الى المستقيم (AB) أي النقط A, B و C ليست في إستقامية فهي تعين مستويا (ABC).

3) أ) تبيان أنّ الشعاع $\vec{n}(1;-2;2)$ ناظمي للمستوي (ABC):

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

ولدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=2\times1+0\times(-2)+(-1)\times2=2-2=0\\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\times1+1\times(-2)+1\times2=2-2=0\end{cases}$ ومنه الشعاع $\vec{n}(1;-2;2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فهو إذن ناظمي للمستوي (ABC).

ب) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

$\vec{n}(1;-2;2)$ ناظمي للمستوي (ABC) يعني معادلته من الشكل : $x-2y+2z+d=0$

$A\in(ABC)$ يعني $1-2(2)+2(2)+d=0$ ومنه $d=-1$

معادلة للمستوي (ABC) هي : $x-2y+2z-1=0$

4) لدينا (P) المستوي ذي المعادلة $x-3y+2z+2=0$.

أ) تبيان أنّ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يشمل النقطة C:

شعاع ناظمي للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(1;-2;2)$

شعاع ناظمي للمستوي (P) هو $\overrightarrow{n_{(P)}}(1;-3;2)$

دراسة توازي كلا من الشعاعين $\vec{n}(1;-2;2)$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}(1;-3;2)$:

لدينا : $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{-3}\neq\frac{2}{2}$ أي لايوجد عدد حقيقي k حيث : $\vec{n}=k\overrightarrow{n_{(P)}}$

ومنه الشعاعان $\vec{n}(1;-2;2)$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}(1;-3;2)$ غير مرتبطين خطيا أي امستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

تبيان أنّ المستقيم (Δ) يمر من النقطة C:

أي نبين أنَ النقطة C تنتمي إلى كلا من المستويين (ABC) و (P)

نعوض بإحداثيات C في معادلة المستوى (P) نجد : $1-3(3)+2(3)+2=0$ محققة ومنه $C\in(P)$.

ولدينا كذلك $C\in(ABC)$

وبالتالي C تنتمي إلى مستقيم تقاطع المستويين المستقيم (Δ).

ب) تبيان أنّ $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)ثم تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ):

$\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)يعني أنّ الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{n}$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}$

لدينا : $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=1\times2+(-2)\times0+2\times(-1)=2-2=0\\ \overrightarrow{n_{(P)}}.\vec{u}=1\times2+(-3)\times0+2\times(-1)=2-2=0\end{cases}$

وبالتالي $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ يعني $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ أي $\begin{cases}x-1=2t\\ y-3=0\times t\\ z-3=-t\end{cases}$

ومنه : الجملة $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

5) لدينا : $M(1+2t;3;3-t)$ حيث $t\in\mathbb{R}$ نقطة من المستقيم (Δ).

أ) تعيين قيمة العدد الحقيقي t حتى بحيث يكون الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عمودي على الشعاع $\vec{u}$:

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1+2t-1 \\ 3-2 \\ 3-t-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ عمودي على الشعاع $\vec{u}$ يعني $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ أي $2t\times2+0\times1+(1-t)(-1)=0$

ومنه $4t-1+t=0$ أي $5t=1$ وبالتالي $t=\frac{1}{5}$

ب) حساب إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ):

من أجل $t=\frac{1}{5}$ نعوض في جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد : $\begin{cases} x=1+2\left(\frac{1}{5}\right) \\ y=3 \\ z=3-\frac{1}{5} \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=\frac{7}{5} \\ y=3 \\ z=\frac{14}{5} \end{cases}$

ومنه $A'\left(\frac{7}{5};3;\frac{14}{5}\right)$

ج) حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ):

$$d(A;(\Delta))=AA'=\sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2+(3-2)^2+\left(\frac{14}{5}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}+1+\frac{16}{25}}$$

$d(A;(\Delta))=\sqrt{\frac{45}{25}}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ أي $d(A;(\Delta))=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

6) نضع : $f(t)=AM^2$

أ) حساب $f(t)$ بدلالة t :

لدينا : $f(t)=AM^2=(1+2t-1)^2+(3-2)^2+(3-t-2)^2=4t^2+1+1+t^2-2t$

ومنه $f(t)=5t^2-2t+2$

- تعيين القيمة الحدية الصغرى للدالة f :

حساب المشتقة $f'(t)$:

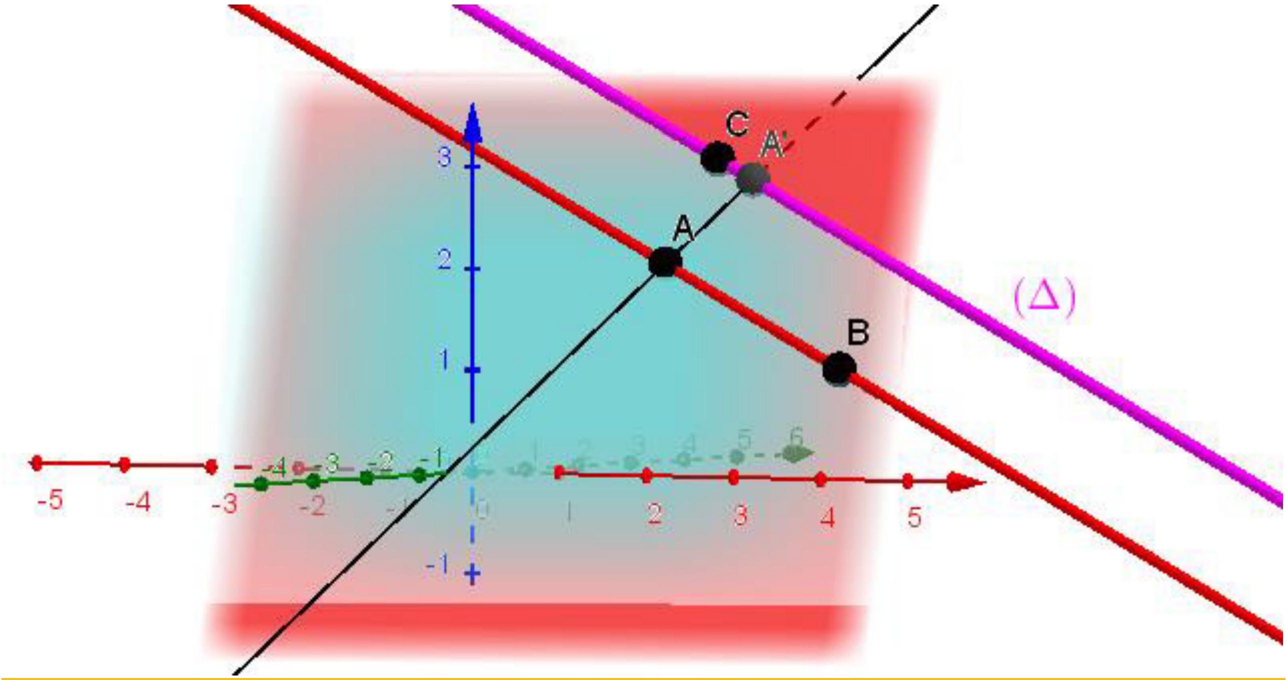
$f'(t)=10t-2$

جدول تغيرات الدالة f :

t	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{5}$	$\nearrow$

ب)استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ):

المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) هي $\sqrt{f\left(\frac{1}{5}\right)}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$



تصحيح التمرين الثالث ☺☹☺ : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا النقط C,B,A و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1$, $z_B=3+4i$, $z_C=2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و

$z_D=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$

1) أ) تبيان أنّ صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة D:

العبارة المركّبة للدوران r :

$z'-z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z-z_A\right)$ أي $z'=\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)(z-1)+1$

ومنه : $z'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-1)+1$ وبالتالي

$$z'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن : $z'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لتكن النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r .

لدينا : $r(B)=B'$ ومنه $z_{B'}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+4i)+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{3}{2}-2i+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أي $z_{B'}==-2i+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$

ومنه : $z_{B'}=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)=z_D$

إذن صورة النقطة B بالدوران r هي النقطة D.

ب) إستنتاج أنّ النقطتين B و D تنتميان إلى نفس الدائرة (Γ) :

$r(B)=D$ يعني $\begin{cases} AD=AB \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ومنه النقطتين B و D تنتميان إلى نفس الدائرة (Γ) مركزها

النقطة A ونصف قطرها $R=AB=|z_B-z_A|=|3+4i-1|=|2+4i|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

2) لدينا النقطة F صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة B ونسبته $\dfrac{3}{2}$

أ) تبيان أنّ لاحقة النقطة F هي $z_F=-2i$:

لدينا : $h(A)=F$ يعني $\overrightarrow{BF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $z_F-z_B=\dfrac{3}{2}(z_A-z_B)$ أي $z_F=\dfrac{3}{2}(z_A-z_B)+z_B=\dfrac{3}{2}z_A-\dfrac{3}{2}z_B+z_B=\dfrac{3}{2}z_A-\dfrac{1}{2}z_B$

وبالتالي $z_F=\dfrac{3}{2}\times 1-\dfrac{1}{2}(3+4i)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}-2i=-2i$ أي $z_F=-2i$

ب) تبيان أنّ F هي منتصف القطعة $[CD]$:

لدينا :

$$\frac{z_C+z_D}{2}=\frac{2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)+\left(-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2i-i\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2i+i\sqrt{3}}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i$$

ومنه $\dfrac{z_C+z_D}{2}=-2i=z_F$ أي F هي منتصف القطعة $[CD]$

ج) تبيان أنّ $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=-i\sqrt{3}$:

لدينا : $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\dfrac{2\sqrt{3}-2i-i\sqrt{3}+2i}{1+2i}=\dfrac{2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1+2i}\times\dfrac{1-2i}{1-2i}=\dfrac{2\sqrt{3}-i\sqrt{3}-4i\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{5}$

ومنه $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\dfrac{-5i\sqrt{3}}{5}=-i\sqrt{3}$

- كتابة العدد $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}$ على الشكل الأسي :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

د) استنتاج أنّ المستقيم (AF) هو محور القطعة $[CD]$:

لدينا : $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ ومنه $\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه (FA) عمودي على (FC)

ولدينا : F هي منتصف القطعة $[CD]$

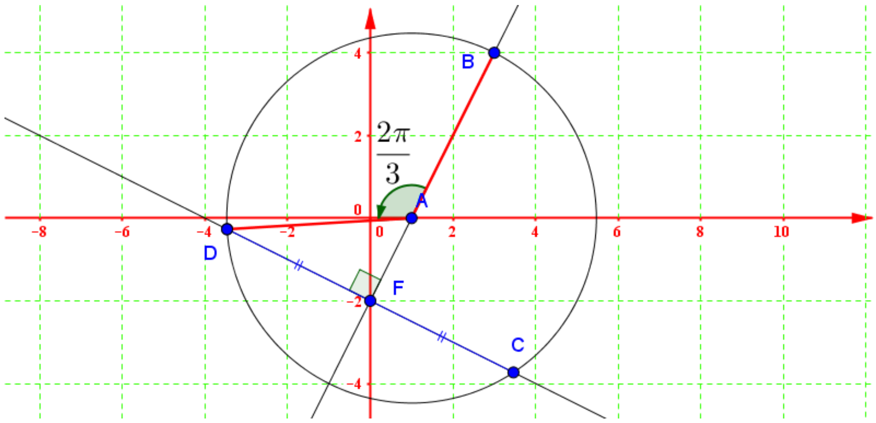
وبالتالي المستقيم (AF) هو محور القطعة $[CD]$

هـ) إنشاء النقط A,B,F,C و D:

نرسم النقطتين $A(1)$, $B(3+4i)$

ثمّ نرسم الدائرة ذات المركز A

ونصف القطر $R=AB$



نعين على الدائرة النقطة D

حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

ثمّ نعين النقطة F حيث :

$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$

ثمّ نرسم النقطة C نظيرة النقطة

D بالنسبة إلى F.

تصحيح التمرين الرابع ☺☺☺ : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $g(x)=x+1+2x\ln x$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

أ) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1+2x\ln x)=1$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+}(2x\ln x)=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1+2x\ln x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x\ln x)=+\infty\end{cases}$

ب) حساب المشتقة :

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $g'(x)=1+2\ln x+2x\times\frac{1}{x}=3+2\ln x$

أي $g'(x)=3+2\ln x$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$3+2\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 1	↘	$g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=0.55$	↗	$+\infty$

2) إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $g(x)>0$

.II f الدالة العددية المعرفة على $D_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ثمّ تفسير النتائج هندسيا :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left[\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}\right] = -\infty$$ لأنّ $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left[\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}\right] = +\infty$$ لأنّ $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1+\ln x) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x-1)^2 = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left[\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}\right] = +\infty$$ لأنّ $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (1+\ln x) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x-1)^2 = 0^+ \end{cases}$$

التفسير الهندسي :

$x=0$ و $x=1$ مستقيمان مقاربان عموديان للمنحني (C_f).

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ لدينا : $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]$:

لدينا : $$f(x) = \frac{1+\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x}{x}\times\frac{1+\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}\left[\frac{1+\ln x}{x}\right]$$

ومنه $$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(x-1)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]\right) = 0$$ لأنّ $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0 \end{cases}$$

التفسير الهندسي : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

3) أ) تبيان أنّ : $f'(x) = \frac{(1-x)\times g(x)}{x(x-1)^4}$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$:

لدينا : $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(x-1)^2 - 2(x-1)(1+\ln x)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)(1+\ln x)}{x(x-1)^4}$$

أي

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left[(x-1)-2x(1+\ln x)\right]}{x(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left[x-1-2x-2x\ln x\right]}{x(x-1)^4} = \frac{(x-1)(-x-1-2x\ln x)}{x(x-1)^4}$$

ومنه $$f'(x) = \frac{(1-x)(x+1+2x\ln x)}{x(x-1)^4} = \frac{(1-x)\times g(x)}{x(x-1)^4}$$

ب) دراسة إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(1-x)$ لأنه من أجل $x \in D_f$ لدينا : $g(x)>0$ و $x(x-1)^4>0$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

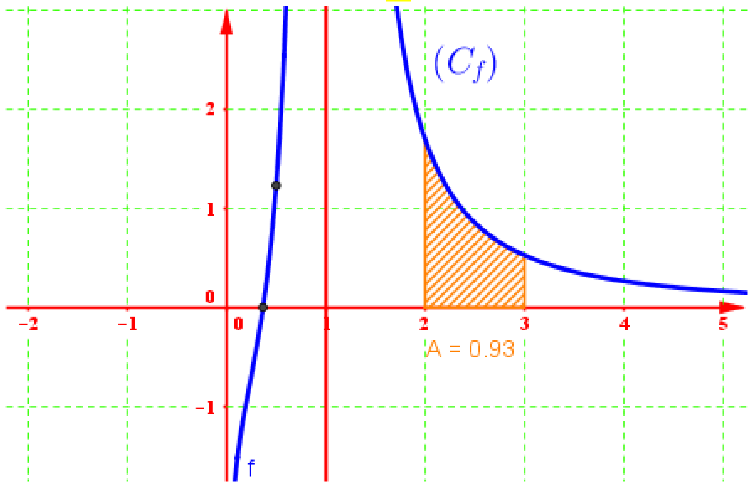
ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

4) حساب $f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{1}{e}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+ln\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{1-ln2}{\frac{1}{4}}=4(1-0.69)=1.23 \text{ ،} \quad f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1+ln\frac{1}{e}}{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2}=\frac{1-lne}{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2}=0$$

رسم (C_f):



5) نعتبر التكاملين التاليين : $I=\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ و $J=\int_2^3 f(x)\,dx$.

أ) التحقق من أنّ : $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$:

لدينا : $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x-x+1}{x(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}$

تبيان أنّ $I=2ln2-ln3$:

$$I=\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\,dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[ln|x-1|\right]_2^3-\left[ln|x|\right]_2^3$$

ومنه $I=ln|3-1|-ln|2-1|-ln|3|+ln|2|=2ln2-ln3$

وبالتالي $I=2ln2-ln3$

ب)بإستعمال المكاملة بالتجزئةتبيان أنّ : $J=3ln2-\frac{1}{2}(1+3ln3)$:

$$J=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\frac{1+ln\,x}{(x-1)^2}\,dx=\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\times ln\,x\,dx$$

حساب $\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$:

$$\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^3=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

حساب $\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\times ln\,x\,dx$

نضع : $u'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ ومنه $u(x)=-\frac{1}{x-1}$

و $v(x)=ln\,x$ ومنه $v'(x)=\frac{1}{x}$

إذن $\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\times ln\,x\,dx=\left[-\frac{1}{x-1}\times ln\,x\right]_2^3-\int_2^3\left(-\frac{1}{x-1}\right)\times\frac{1}{x}\,dx=\left[-\frac{1}{x-1}\times ln\,x\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{x(x-1)}\,dx$

ومنه $\int_2^3\frac{1}{(x-1)^2}\times ln\,x\,dx=-\frac{1}{2}ln3+ln2+2ln2-ln3=3ln2-\frac{3}{2}ln3$

وبالتالي $J=3ln2-\frac{3}{2}ln3+\frac{1}{2}$

ح) حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=2,\ y=0$ و $x=3$.

بما أن f موجبة على المجال $[2;3]$ فإنّ: $A=\int_2^3 f(x)\,dx=\left(3ln2-\frac{3}{2}ln3+\frac{1}{2}\right)cm^2$

$A=0.93cm^2$

الأستاذ ثابت إبراهيم لاتنسونا بخالص الدعاءلي ولوالدي وأهلي