الموضوع الثالث ☹ للتحضير ☺ الجيد ☺ للبكالوريا 2017

التمرين الأول ☺☺☹ : (04 نقاط) مشاهدة الحل

نعتبر المتتاليتين العدديتين المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$$

1) نضع أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = u_n + v_n$

أ) برهن أنَ المتتالية (a_n) ثابتة.

ب)عبر عن الحد العام a_n .

ج)أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $b_n = u_n - 2v_n$.

أ) برهن أنَ المتتالية (b_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب)أحسب عبارة الحد العام b_n بدلالة n.

ج)أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} b_i$.

د) استنتج عبارتي كل من u_n و v_n بدلالة n.

التمرين الثاني ☹☺☹ : (04 نقاط) مشاهدة الحل

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

1) بين أن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزها النقطة $I(1;-1;0)$ ونصف قطرها $R = 5$.

2) لتكن النقطة $J(-1;1;1)$ ولتكن (P) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM} = 0$.

أ) بين أنَ (P) هي المستوي ذي المعادلة الديكارتية: $2x - 2y - z + 5 = 0$.

ب)بين أنَ (P) و (S) يتقاطعان في دائرة $(\mathscr{C})$ مركزها J ونصف قطرها $r = 4$.

3) لتكن النقطة $A(-5;5;3)$ ولتكن (S') سطح الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $r' = 2\sqrt{13}$.

أ) بين أنَ النقطة A تنتمي إلى المستقيم (IJ).

ب)بين أنَ $AJ = 6$.

4) لتكن N نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$.

أ) برر أنَ المثلث AJN قائم في النقطة J ثمّ استنتج أنّ $AN=2\sqrt{13}$.

ب) عين تقاطع سطح الكرة (S') والمستوي (P).

التمرين الثالث ☹☹😐: (05 نقاط) مشاهدة الحل

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-2z+4=0$

ب) أكتب حلي المعادلة على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A=2$.

أ) عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث ، $z=2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

ب) علم النقطتين C,B ذات اللاحقتين $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب .

3) ليكن θ عدد حقيقي حيث ، $\theta\in]-\pi;\pi]$ و M النقطة ذات اللاحقة $z=2e^{i\theta}$.

نعتبر النقطة N من (Γ) حيث ، $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ بين أنَ لاحقة النقطة N هي $z_N=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$.

4) نعتبر الدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران r تعطى بالعبارة $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب)لتكن F و K منتصفي القطعتين $[BM]$و $[CN]$ على الترتيب . بين أنَ $r(F)=K$.

ج)استنتج طبيعة المثلث AFK.

5) أ) بين أنّ $AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.

ب) استنتاج لاحقة النقطة M بحيث يكون AF أكبر مايمكن ثم أنشئ المثلث AFK في هذه الحالة .

التمرين الرابع ☹☺☺: (07 نقاط) مشاهدة الحل

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$.

1) أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(0)$ ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x+3-xe^{2x}$.

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامدو المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلته .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ) بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أ) بيّن أنّ $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $-3.05<\alpha<-3$ و $0.75<\beta<0.8$.

ب) بين أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلةديكارتية له .

ج) أرسم (T)، (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=x+m$.

6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

ب) أحسب $h'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها .

(دون حساب عبارة الدالة h')

✌ بالتوفيق ☹ والنجاح ☺☺ في الباك 2017 ❀ ❀

تصحيح الموضوع الثالث

حل التمرين الأول ☺☺☺:الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$

1) ولدينا أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = u_n + v_n$

أ) البرهان أنّ المتتالية (a_n) ثابتة:

(a_n) ثابتة يعني $a_{n+1} - a_n = 0$

لدينا : $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} + v_{n+1} - (u_n + v_n)$

أي $a_{n+1} - a_n = -u_n + 4v_n + 2u_n - 3v_n - u_n - v_n = 2u_n - 2u_n + 4v_n - 4v_n$

ومنه $a_{n+1} - a_n = 0$ أي (a_n) متتالية ثابتة

ب) التعبير عن الحد العام a_n :

(a_n) متتالية ثابتة يعني $a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 5 - 2 = 3$

أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 3$

ج) حساب المجموع $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = (n+1)a_0 = 3(n+1)$$

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $b_n = u_n - 2v_n$.

أ) البرهان أنّ المتتالية (b_n) هندسية :

(b_n) هندسية يعني $b_{n+1} = q \times b_n$

لدينا : $b_{n+1} = u_{n+1} - 2v_{n+1} = -u_n + 4v_n - 2(2u_n - 3v_n)$

أي $b_{n+1} = -u_n + 4v_n - 4u_n + 6v_n = -5u_n + 10v_n = -5(u_n - 2v_n)$

أي : $b_{n+1} = -5b_n$ ومنه المتتالية (b_n) هندسية أساسها $q = -5$

وحدها الأول $b_0 = u_0 - 2v_0 = 5 - 2(-2) = 9$

ب) حساب عبارة الحد العام b_n بدلالة n :

$$b_n = b_0 \times q^n = 9 \times (-5)^n$$

ج) حساب المجموع : $S'_n=\sum_{i=0}^{i=n} b_i$:

$$S'_n=\sum_{i=0}^{i=n} b_i=b_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=9\times\frac{1-(-5)^{n+1}}{1-(-5)}=\frac{9}{6}\times\left(1-(-5)^{n+1}\right)$$

أي $S'_n=\frac{9}{6}\times\left(1+5(-5)^n\right)$

د) استنتاج عبارتي كل من u_n و v_n بدلالة n:

لدينا : $\begin{cases} a_n=u_n+v_n \\ b_n=u_n-2v_n \end{cases}$ ومنه $a_n-b_n=3v_n$

أي $v_n=\frac{1}{3}(a_n-b_n)=\frac{1}{3}\left(3-9(-5)^n\right)=1-3(-5)^n$ وبالتالي $v_n=1-3(-5)^n$

ولدينا : $2a_n+b_n=3u_n$

ومنه $u_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)=\frac{1}{3}\left(6+9(-5)^n\right)$

وبالتالي : $u_n=2+3(-5)^n$

حل التمرين الثاني 😐😊😊: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1) تبيان أن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزها النقطة $I(1;-1;0)$ ونصف قطرها $R=5$:

لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$ ومنه $x^2-2x+y^2+2y+z^2-23=0$

ومنه $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2-23=0$

أي $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2-25=0$

وبالتالي : $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=5^2$

ومنه : (S) هي سطح كرة مركزها النقطة $I(1;-1;0)$ ونصف قطرها $R=5$

2) لدينا $J(-1;1;1)$ ولتكن (P) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0$.

أ) تبيان أنّ (P) هي المستوي ذي المعادلة الديكارتية: $2x-2y-z+5=0$:

لدينا : $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0$ يعني $2(x+1)-2(y-1)-(z-1)=0$

ومنه $2x-2y-z+5=0$ هي معادلة مستو (P).

ب)تبيان أنَ (P) و (S) يتقاطعان في دائرة $(\mathscr{C})$مركزها J ونصف قطرها $r=4$:

لدينا : $d(I;(P))=\dfrac{|2(1)-2(-1)-0+5|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\dfrac{|9|}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

أي $d(I;(P))<R$

ومنه (P) يقطع (S) وفق دائرة $(\mathscr{C})$ مركزها النقطة $J(-1;1;1)$ المسقط العمودي للنقطة I على المستوي (P)لأنَ: $d(I;(P))=IJ=3$

$\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ ومنه $IJ=\|\overrightarrow{JI}\|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9}=3$

ونصف قطرها $r=\sqrt{R^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

3) لدينا النقطة $A(-5;5;3)$و (S') سطح الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $r'=2\sqrt{13}$.

أ) تبيان أنَ النقطة A تنتمي إلى المستقيم (IJ):

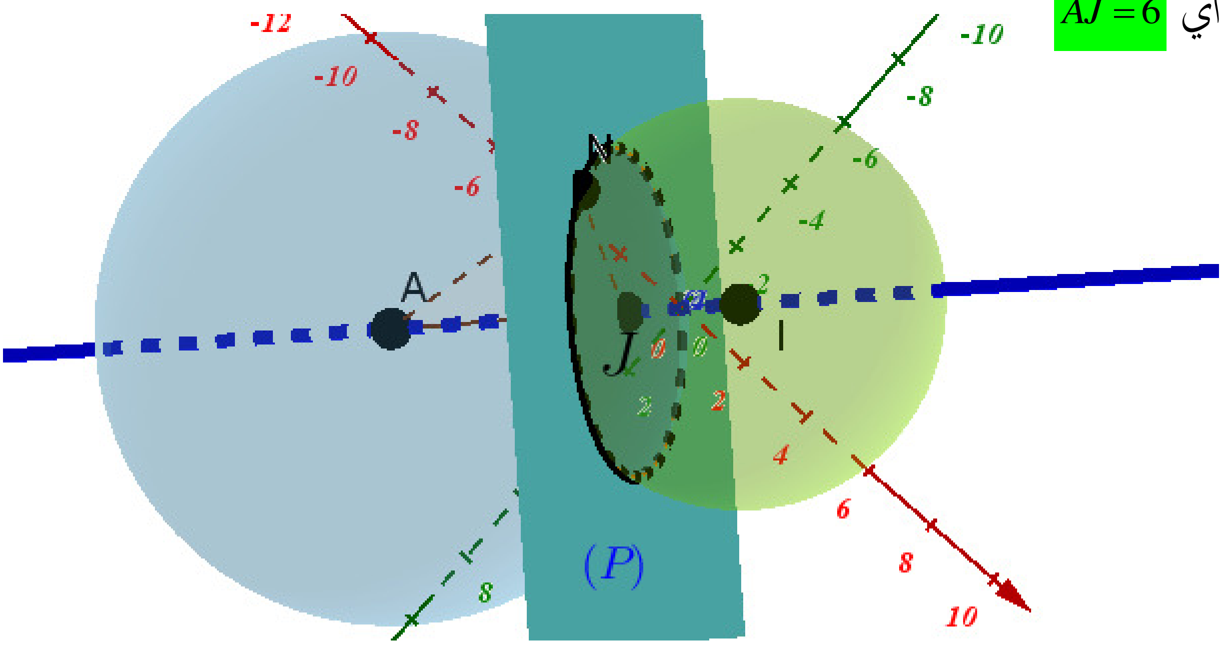
لدينا : $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{JA}\begin{pmatrix}-5+1\\5-1\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{JA}=-2\overrightarrow{JI}$ وبالتالي $\overrightarrow{JA}$و $\overrightarrow{JI}$ مرتبطين خطيا

أي أنَ النقط A,J,I في إستقامية ومنه النقطة A تنتمي إلى المستقيم (IJ)

ب)تبيان أنَ $AJ=6$:

لدينا : $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}$ ومنه $AJ=\|\overrightarrow{AJ}\|=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$

أي $AJ=6$



4) لدينا N نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$.

أ) تبرير أنَ المثلث AJN قائم في النقطة J ثم استنتج أنَ $AN = 2\sqrt{13}$:

لدينا المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هي النقطة J.

والنقطة N تنتمي إلى المستوي (P) يعني أنَ الشعاع $\overrightarrow{AJ}$ عمودي على الشعاع $\overrightarrow{JN}$ ومنه المثلث AJN قائم في النقطة J .

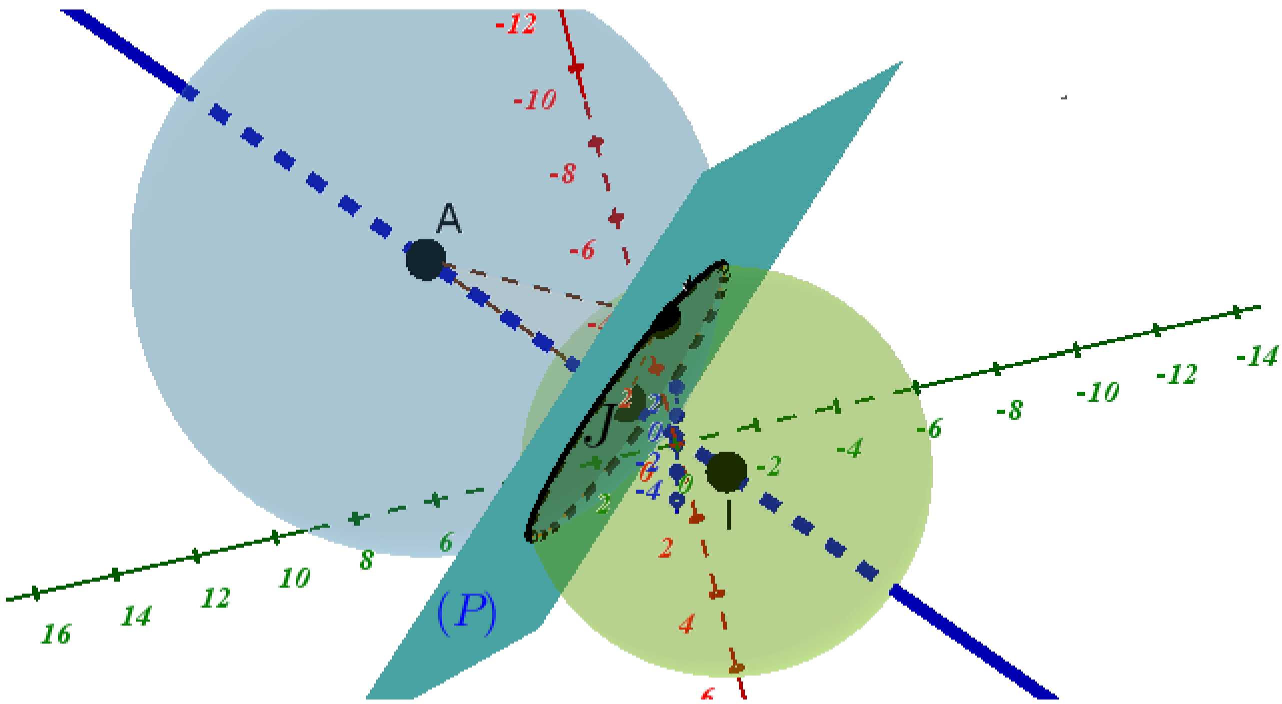
استنتاج أنَ $AN = 2\sqrt{13}$:

AJN قائم في النقطة J يعني $AN^2 = AJ^2 + JN^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$

ومنه $AN = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

ب) تعيين تقاطع سطح الكرة (S') والمستوي (P):

(P) يقطع (S') وفق الدائرة $(\mathscr{C})$ ذات المركز $J(-1;1;1)$ ونصف القطر $r = 4$



👍 حل التمرين الثالث ☹☹☹: الرجوع إلى نص التمرين

1) أ) الحل في مجموعة الأعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة: $z^2-2z+4=0$:

حساب المميز $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$

مجموعة الحلول $S=\{1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$

ب) كتابة حلي المعادلة على الشكل الأسي :

$z_1=1+i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_1|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

تعيين عمدة للعدد المركب :

نضع : $\theta_1=arg(z_1)$ إذن $\begin{cases}cos\,\theta_1=\dfrac{1}{2}\\ sin\,\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

الشكل الأسي للعدد $z_1=1+i\sqrt{3}$ هو $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

الشكل الأسي للعدد $z_2=1-i\sqrt{3}$: $z_2=\overline{z_1}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

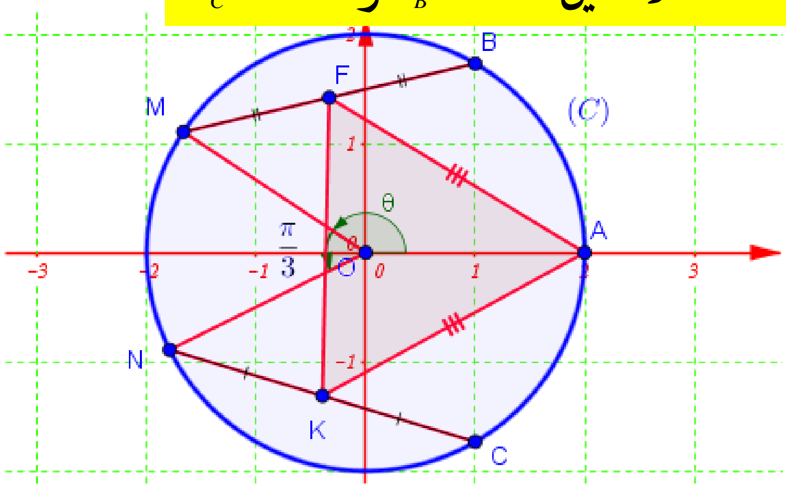
2) لدينا النقطة A ذات اللاحقة $z_A=2$.

أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث ، $z=2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي :

إذن لدينا : $|z|=2$

ومنه (Γ) هي دائرة مركزها المبدأ $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=2$

ب) تعليم النقطتين C,B ذات اللاحقتين $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$:



3) لدينا $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

تبيان أنَ لاحقة النقطة N هي $z_N=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$:

لدينا : N نقطة من الدائرة (Γ) ومنه $|z_N|=2$

ولدينا : $\left(\vec{u};\overrightarrow{ON}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{MN}\right)=\theta+\frac{\pi}{3}(2\pi)$

ومنه $arg\left(z_N\right)\equiv\theta+\frac{\pi}{3}[2\pi]$

وبالتالي $z_N=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$

4) لدينا r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) تبيان أنَ العبارة المركبة للدوران r تعطى بالعبارة $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$:

العبارة المركبة للدوران r من الشكل :

$z'-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-z_A\right)$ أي $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-z_A\right)+z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}z-2e^{i\frac{\pi}{3}}+2$

ومنه $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب)لدينا F و K منتصفي القطعتين $[BM]$ و$[CN]$ على الترتيب .

تبيان أنَ $r(F)=K$:

لدينا : $z_F=\frac{z_B+z_M}{2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}+2e^{i\theta}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}$

ولدينا : $z_K=\frac{z_C+z_N}{2}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}+2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$

إذن $r(F)=F'$ يعني

$$z_{F'}=e^{i\frac{\pi}{3}}z_F+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}\right)+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}+i\theta}+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه $z_{F'}==e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+2+e^{i\frac{2\pi}{3}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا : $2+e^{i\frac{2\pi}{3}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}=2+cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}-2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$2+e^{i\frac{2\pi}{3}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}=2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1-i\sqrt{3}$$

أي $2+e^{i\frac{2\pi}{3}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

أي $z_{F'}==e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=z_K$

ومنه $r(F)=K$

ج) استنتاج طبيعة المثلث AFK:

$r(F)=K$ يعني $\begin{cases}AK=AF\\ \left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AK}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

وبالتالي AFK متقايس الأضلاع .

6) أ) تبيان أنّ $AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$:

لدينا : $z_{\overrightarrow{AF}}=z_F-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-2$

وبالتالي $AF^2=\left|z_F-z_A\right|^2=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-2\right|^2=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-2\right)\times\overline{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-2\right)}$

أي $AF^2=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-2\right)\times\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\theta}-2\right)$

$$AF^2=e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\theta}-2e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}\times e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}\times e^{-i\theta}-2e^{i\theta}-2e^{-i\frac{\pi}{3}}-2e^{-i\theta}+4$$

$$AF^2=1+e^{i\frac{\pi}{3}-i\theta}-2e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta-i\frac{\pi}{3}}+1-2e^{i\theta}-2e^{-i\frac{\pi}{3}}-2e^{-i\theta}+4$$

$$AF^2=6+\underbrace{e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}}_{2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}-2\underbrace{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}_{2\cos\theta}-2\underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}_{2\cos\frac{\pi}{3}}$$

ومنه $AF^2=6+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)-2(2\cos\theta)-2(1)$

$$AF^2=4+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)-4\cos\theta$$

$$AF^2=4+2\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\theta+2\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\theta-4\cos\theta=4+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta$$

وبالتالي $AF^2=4-\left(3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)$

$$AF^2=4-2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

ب) استنتاج لاحقة النقطة M بحيث يكون AF أكبر مايمكن :

نضع : $f(\theta)=AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ ومنه $f'(\theta)=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$f'(\theta)=0$ يعني $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$

إما $\theta+\frac{\pi}{6}=0$ أو $\theta+\frac{\pi}{6}=\pi$ تكافئ $\theta=-\frac{\pi}{6}$ أو $\theta=\frac{5\pi}{6}$

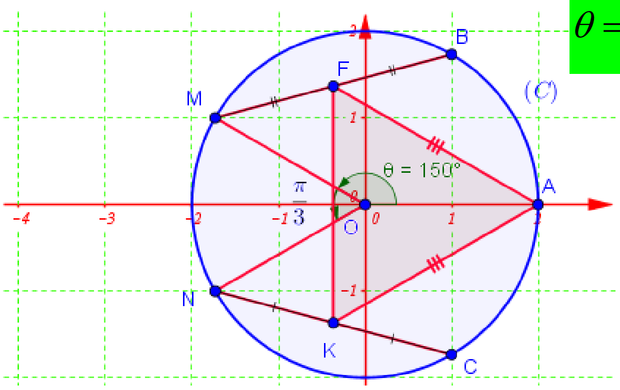
جدول تغيرات الدالة f:

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(\theta)$		-	0	+	0	-	
$f(\theta)$	$f(-\pi)$	↘	$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	↗	$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	↘	$f(\pi)$

وبالتالي AF أكبر مايمكن من اجل $\theta=\frac{5\pi}{6}$

ومنه لاحقة النقطة M : $z_M=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

إنشاء المثلث AFK في هذه الحالة :



تصحيح التمرين الرابع ☺☺☺: الرجوع إلى نص التمرين

I. لدينا g الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$.

1) حساب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1-(1+2x)e^{2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^{2x}-2xe^{2x}\right)=1$$

لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{2x}\right)=0\end{cases}$

لأنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1-(1+2x)e^{2x}\right] = -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}(1+2x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\left[-(1+2x)e^{2x}\right] = -\infty \end{cases}$$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g:

حساب المشتقة :

$$g'(x) = -\left(2e^{2x} + 2(1+2x)e^{2x}\right) = (-4-4x)e^{2x}$$

دراسة إشارة المشتقة $g'(x)$:

$g'(x)=0$ يعني $(-4-4x)e^{2x}=0$ ومنه $-4-4x=0$ أي $x=-1$

جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$g(-1)=1.14$	$\searrow$	$-\infty$

3) حساب $g(0)$ ثم إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

$$g(0) = 1-(1+2\times 0)e^{2(0)} = 1-1 = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

.II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x+3-xe^{2x}$.

1) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+3-xe^{2x}\right)=-\infty$$ لأنّ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(-2xe^{2x}\right)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+3-xe^{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right)=-\infty$$ لأنّ $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right)=-\infty$$

2) أ) تبيان أنّ المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلته:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3-xe^{2x}-x-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=0$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(-2e^{2x}\right)=0$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=x+3$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=x+3-xe^{2x}-(x+3)=-xe^{2x}$

إشارة الفرق نفس إشارة $-x$ لأنّ $e^{2x}>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	
$f(x)-y$		+	0	-	

الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ):

إذا كان $x\in\,]-\infty;0[$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ).

إذا كان $x=0$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع المستقيم (Δ).

إذا كان $x\in\,]0;+\infty[$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقع تحت المستقيم (Δ).

3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$:

لدينا : $f'(x)=1-\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right)=1-(1+2x)e^{2x}=g(x)$

ومنه $f'(x)=g(x)$

ب) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

4) أ) تبيان أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $-3.05<\alpha<-3$ و $0.75<\beta<0.8$:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-3.05;-3]$ ولدينا :

$$f(-3.05)=-3.05+3-(-3.05)e^{2(-3.05)}=-0.04$$

و $$f(-3)=-3+3-(-3)e^{2(-3)}=0.01$$

أي $f(-3.05)\times f(-3)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.05<\alpha<-3$.

و لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.75;0.8]$ ولدينا :

$$f(0.75)=0.75+3-(0.75)e^{2(0.75)}=0.39$$

و $$f(0.8)=0.8+3-(0.8)e^{2(0.8)}=-0.16$$

أي $f(0.75)\times f(0.8)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.75<\beta<0.8$.

وبالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $-3.05<\alpha<-3$ و $0.75<\beta<0.8$

ب) **تبيان أنّ المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ):**

يعني $f'(x)=1$ يكافئ $g(x)=1$

أي $1-(1+2x)e^{2x}=1$ ومنه $-(1+2x)e^{2x}=0$

وبالتالي $2x+1=0$ ومنه $x=-\dfrac{1}{2}$

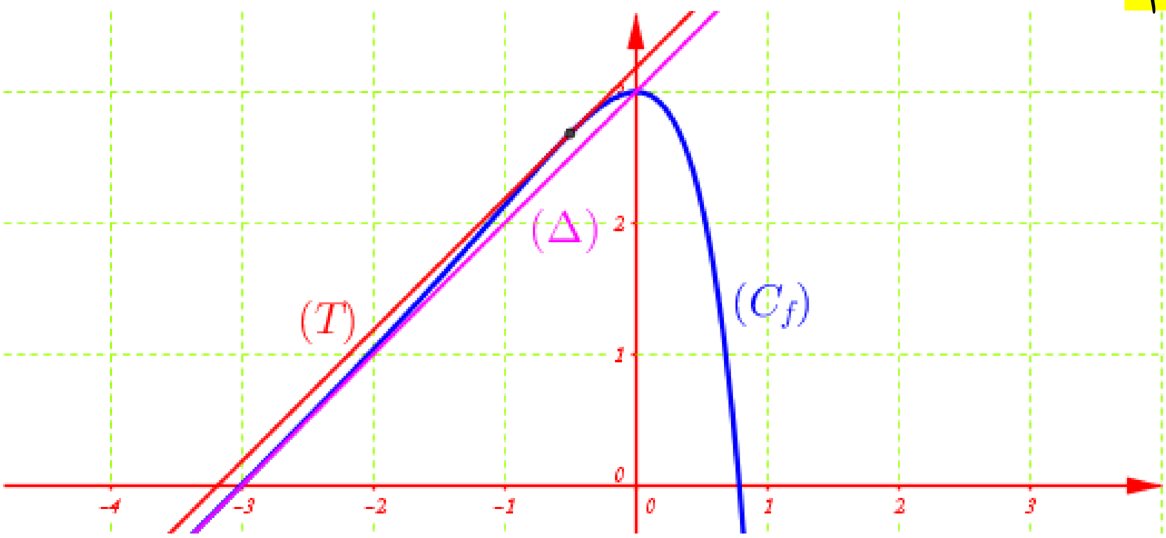
المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

تعيين معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$$(T): y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(T): y = 1\times\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2}e^{-1} = x+3+\frac{1}{2}e^{-1}$$

ج) الرسم :



5) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $(E): f(x) = x+m$:

حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة $y = x+m$ الموازي لكل من المستقيم (Δ) والمماس (T) .

إذا كان $m\in]-\infty;3[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

إذا كان $m=3$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .

إذا كان $m\in\left]3;3+\frac{1}{2}e^{-1}\right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين .

إذا كان $m=3+\frac{1}{2}e^{-1}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

إذا كان $m\in\left]3+\frac{1}{2}e^{-1};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حل .

6) لدينا h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x) = \frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$:

لدينا : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}+3-\frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}} = \frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x} = h(x)$

ب) حساب $h'(x)$:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \times g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ج) إستنتاج إتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $h'(x)$ عكس إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	+	‖	-
$h'(x)$	-	‖	+

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	‖	+	
$h(x)$	3	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	3

✌ الأستاذ ثابت إبراهيم أكثروا لنا من خالص دعائكم للوالدين وللأهل ولي ❀ ❀