التحضير ☺ الجيد لباك ☹ 2017 ☺ ✿ الموضوع الخامس

التمرين الأول ☺☹☹ : (05 نقاط) مشاهدة الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$.

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثمَ إستنتج أنَ المتتالية (u_n) متقاربة .

3. أ) برهن أنَه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(2-u_n)$.

ب) بين أنَه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<2-u_n\le 2^{1-n}$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

أ) برهن أنَ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$ يطلب حساب حدها الأول .

ب) أكْتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثمَ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني ☹☺☹ : (04 نقاط) مشاهدة الحل

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;1;0)$، $B(1;-1;2)$، $C(0;1;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) أ) بين أن النقط A, B و C تعين مستويا (ABC).

ب) بين المستوي (ABC) هو نفسه المستوي (P) ذي المعادلة $x+y+z-2=0$.

ج) تحقق من أنَ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (P).

2) لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ولتكن النقطة H منتصف القطعة $[AB]$.

أ) بين أنَ المثلث ABC قائم في النقطة C.

ب) إستنتج مركز الدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة بالمثلث ABC .

3) ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) والمار من النقطة H . بين أنَ جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) هي :
$$\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha \quad ;(\alpha\in\mathbb{R})\\ z=1+\alpha\end{cases}$$

4) لتكن M نقطة من (Δ).

أ) برهن أنَ : $MA=MB=MC$.

ب) بين أنه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث يكون : $IA=ID$. يطلب تعيين إحداثياتها.

ج) إستنتج مما سبق أنَ النقط C,B,A و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

التمرين الثالث ☹☺☺: (04 نقاط) مشاهدة الحل

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-4z+16=0$.

ب) أكتب حلي المعادلة على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i\sqrt{3}$, $z_B=2-2i\sqrt{3}$ و $z_C=8$.

أ) تحقق أنَ : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ب)أكتب العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل المثلثي ثمَ استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=4$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران r.

ب)بين أنَ صورة النقطة A بالدوران r هي النقطة B .

ج) عين طبيعة الرباعي $OA\Omega B$.

التمرين الرابع : ☺😐☺ (07 نقاط) مشاهدة الحل

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(2x+1)e^x-1$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(0)$ ثمَ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعر فة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x(e^x-1)^2$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) أبين أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ).

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=(e^x-1)\times g(x)$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) أرسم (T) ، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي mعدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=mx$.

6) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين : $x = ln2,\ x = 0$.

✌بالتوفيق ☺والنجاح باك 2017☺ ❀ ❀

تصحيح الموضوع الخامس ☺ التحضير ☹ الجيد لباك 2017 ☺

حل التمرين الأول ☺☹☺: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

- **حساب المشتقة :**

$$f'(x)=\frac{3(x+2)-1\times(3x+2)}{(x+2)^2}=\frac{3x+6-3x-2}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\in[0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2. لدينا $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$

أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$.

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1) من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=0$ ومنه $0\le u_0<2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ $0\le u_n<2$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ $0\le u_{n+1}<2$

لدينا : $0\le u_n<2$ فرضا ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$

ومنه $f(0)\le f(u_n)<f(2)$ لأنَ f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

أي $1\le u_{n+1}<2$ وبالتالي : $0\le u_{n+1}<2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$.

ب)دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-u_n=\dfrac{3u_n+2-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$

أي $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}=\dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+2}$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ نفس إشارة $2-u_n$ لأنَ $1\le u_n+1<3$ من أجل $0\le u_n<2$

دراسة إشارة العبارة $-u_n^2+u_n+2=(2-u_n)(u_n+1)$:

$u_n \in$	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 2
$-u_n^2+u_n+2$	$+$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ أي المتتالية (u_n)متزايدة تماما.

إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n)متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

3. أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$:

$$2-u_{n+1}=2-\frac{3u_n+2}{u_n+2}=\frac{2u_n+4-3u_n-2}{u_n+2}$$

أي $2-u_{n+1}=\frac{2-u_n}{u_n+2}$ ومنه $2-u_{n+1}\le\frac{2-u_n}{2}$

أي $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$

ب)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0<2-u_n\le 2^{1-n}$

لدينا : $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$

$$2-u_1\le\frac{1}{2}(2-u_0)$$

$$2-u_2\le\frac{1}{2}(2-u_1)$$

$$2-u_3\le\frac{1}{2}(2-u_2)$$

ومنه :

.

.

.

$$2-u_{n-1}\le\frac{1}{2}(2-u_{n-2})$$

$$2-u_n\le\frac{1}{2}(2-u_{n-1})$$

بالضرب نجد :

$$(2-u_1)\times(2-u_2)\times(2-u_3)\times\ldots\times(2-u_{n-1})\times(2-u_n)\le\frac{1}{2}(2-u_0)\times\frac{1}{2}(2-u_1)\times\frac{1}{2}(2-u_2)\times\ldots\times\frac{1}{2}(2-u_{n-2})\times\frac{1}{2}(2-u_{n-1})$$ بعد الاختزال

نجد : $2-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\times(2-u_0)$

ومنه $2-u_n\le 2^{-n}\times 2$ أي $2-u_n\le 2^{1-n}$

ولدينا : $0\le u_n<2$ ومنه $-2<-u_n\le 0$ وبالتالي $0<2-u_n\le 2$ أي $0<2-u_n$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0<2-u_n\le 2^{1-n}$

إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{1-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{(1-n)\ln 2}=0$ وبما أنّ $0<2-u_n\le 2^{1-n}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$

. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ ومنه $2-\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$

4. لدينا (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

أ) البرهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$:

لدينا : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-2}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}+1} = \dfrac{\dfrac{3u_n+2-2u_n-4}{u_n+2}}{\dfrac{3u_n+2+u_n+2}{u_n+2}}$

ومنه $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{u_n-2}{u_n+2}}{\dfrac{4u_n+4}{u_n+2}} = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}\times\dfrac{u_n+2}{4(u_n+1)} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{u_n-2}{u_n+1} = \dfrac{1}{4}\times v_n$ أي $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}\times v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$

حساب حدها الأول : $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+1} = -2$

ب)كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n = v_0\times q^n = -2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إستنتاج عبارة u_n :

لدينا : $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ ومنه $v_n(u_n+1)=u_n-2$ أي $v_n\times u_n+v_n = u_n-2$

ومنه $v_n\times u_n - u_n = -v_n-2$ اي $u_n = \dfrac{-v_n-2}{v_n-1}$

وبالتالي : $u_n = \dfrac{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-2}{-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-2}{-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}\right)=2$ لأنَ $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

حل التمرين الثاني ☹☺☺☺ : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا النقط $A(1;1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) أ) تبيان أن النقط A, B و C تعين مستويا (ABC):

لدينا : $\overrightarrow{CB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{CA}(1;0;-1)$

إذن لدينا $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{-1}{1}$ أي لا يوجد عدد حقيقي k بحيث يكون $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$ غير مرتبطين خطيا .

ومنه النقط B, A و C ليست في إستقامية فهي تعين مستويا (ABC)

ب) تبيان أنّ المستوي (ABC) هو نفسه المستوي (P) ذي المعادلة: $x+y+z-2=0$

أي نبين أنّ النقط B, A و C تنتمي إلى المستوي (P).

نعوض بإحداثيات النقط B, A و C في معادلة (P) نجد : $\begin{cases} 1+1+0-2=0 \\ 1-1+2-2=0 \\ 0+1+1-2=0 \end{cases}$

ومنه النقط B, A و C تنتمي إلى المستوي (P) أي المستوي (ABC) هو نفسه المستوي (P).

ج) تحقق من أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (P):

نعوض بإحداثيات النقطة D في معادلة (P) نجد : $1+1+4-2=0$ أي $4=0$ (غير محققة)

وبالتالي $D \notin (P)$.

2) لدينا $(\mathscr{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و H منتصف القطعة $[AB]$.

أ) تبيان أنّ المثلث ABC قائم في النقطة C:

لدينا : $\overrightarrow{CB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{CA}(1;0;-1)$

إذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 1\times1+0\times(-2)+(-1)\times1 = 1-1=0$ ومنه $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

أي المثلث ABC قائم في النقطة C.

ب) إستنتاج مركز الدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة بالمثلث ABC:

مركز الدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة بالمثلث القائم ABC هي النقطة H منتصف القطعة $[AB]$ (منتصف الوتر).

إحداثيات النقطة H هي : $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right) = (1;0;1)$

مركز الدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة بالمثلث ABC هي النقطة $H(1;0;1)$

5) لدينا (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) والمار من النقطة H.

تبيان أنّ جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) هي : $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} ;(\alpha \in \mathbb{R})$:

شعاع توجيه للمستقيم (Δ) شعاع ناظمي للمستوي (P) لأنّ $(\Delta) \perp (P)$

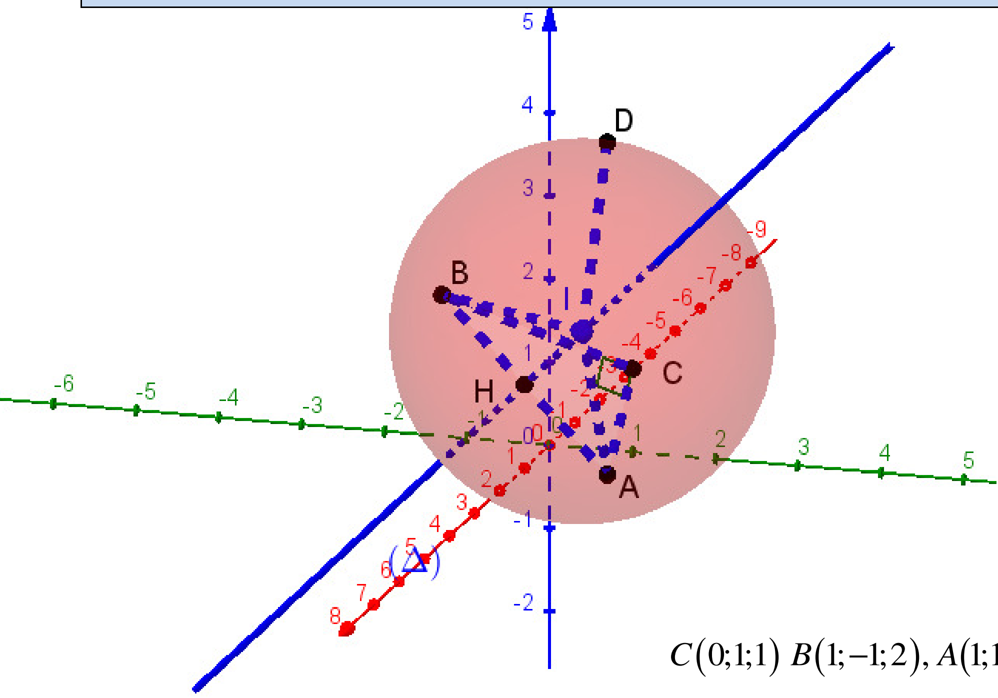
شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(1;1;1)$ ويمر من النقطة $H(1;0;1)$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) أي $\overrightarrow{HM}$ يوازي $\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{HM}=\alpha\vec{u}$

أي $\begin{cases} x-1=\alpha \\ y=\alpha \\ z-1=\alpha \end{cases}$

ومنه جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) $(\alpha\in\mathbb{R})$; $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$

لتكن M نقطة من (Δ).



أ) البرهان أنّ : $MA=MB=MC$:

لدينا : $M(1+\alpha;\alpha;1+\alpha)$ ، $C(0;1;1)$ $B(1;-1;2)$، $A(1;1;0)$

إذن : $MA=\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(-1-\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+1-2\alpha+\alpha^2+1+2\alpha+\alpha^2}$

أي $MA=\sqrt{3\alpha^2+2}$

و $MB=\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(-1-\alpha)^2+(2-1-\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+1+2\alpha+\alpha^2+1-2\alpha+\alpha^2}$

أي $MB=\sqrt{3\alpha^2+2}$

و $MC=\sqrt{(-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(1-1-\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+1+2\alpha+1-2\alpha+\alpha^2+\alpha^2}$

أي $MC=\sqrt{3\alpha^2+2}$

وبالتالي إذا كانت M نقطة من (Δ) فإنّ $MA=MB=MC$

ب)تبيان أنه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث يكون : $IA=ID$:

$I\in(\Delta)$ يعني أنّ إحداثيات النقطة I من الشكل $M(1+\alpha;\alpha;1+\alpha)$ مع $IA=ID$

أي $\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(-1-\alpha)^2}=\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(4-1-\alpha)^2}$

ومنه $\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2}$

أي $\alpha^2+(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2=\alpha^2+(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2$

وبالتالي $(3-\alpha)^2=(1+\alpha)^2$ أي $1+2\alpha+\alpha^2=9-6\alpha+\alpha^2$

أي $8\alpha=8$ ومنه $\alpha=1$

إذن توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث يكون : $IA=ID$

إحداثيات النقطة I هي $(2;1;2)$

ج) إستنتاج مما سبق أنّ النقط A,B,C و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها :

لدينا : $IA=IB=IC=ID$

ومنه نستنتج أنّ النقط A,B,C و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) ذات المركز $I(2;1;2)$ ونصف القطر $R=IA=\sqrt{3\times1^2+2}=\sqrt{5}$.

تصحيح التمرين الثالث: ☺☺☺☺ الرجوع إلى نص التمرين

1) أ) **حل المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-4z+16=0$:**

حساب المميز : $\Delta=(-4)^2-4(1)\times(16)=16-4\times16=-3\times16=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$

المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2-2i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2+2i\sqrt{3}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{2-2i\sqrt{3};2+2i\sqrt{3}\right\}$

ب) كتابة حلي المعادلة على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=2-2i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_1|=\left|2-2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4$

تعيين عمدة للعدد المركب z_1:

نضع : $\theta_1=arg(z_1)$ إذن : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=-\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$

الشكل الأسي للعدد z_1 : $z_1=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا : $z_2=2+2i\sqrt{3}$ أي $z_2=\overline{z_1}=4e^{i\frac{\pi}{3}}$

الشكل الأسي للعدد z_2 : $z_2=4e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) لدينا النقط A,B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i\sqrt{3}$, $z_B=2-2i\sqrt{3}$ و $z_C=8$.

أ) التحقق أنّ : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$:

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}=\frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6+2i\sqrt{3}}\times\frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6-2i\sqrt{3}}=\frac{36+24i\sqrt{3}-12}{36+12}$

ومنه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{24+24i\sqrt{3}}{48}=\frac{24}{48}+\frac{24i\sqrt{3}}{48}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أي $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب)كتابة العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل المثلثي:

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ومنه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

الشكل المثلثي : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\left|\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right|=1$ ومنه $\frac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$

و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ومنه $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=4$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) كتابة العبارة المركبة للدوران r:

$M(z)\xrightarrow{r}M'(z')$ يعني $z'-z_\Omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_\Omega)$

أي $z'-4=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-4)$ ومنه $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z-4e^{i\frac{2\pi}{3}}+4=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4$

أي $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2-2i\sqrt{3}+4=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+6-2i\sqrt{3}$

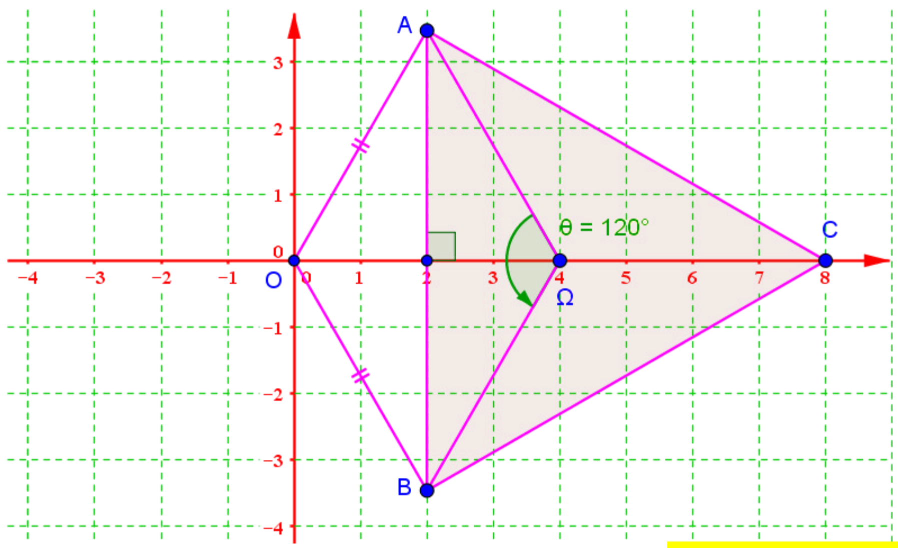
العبارة المركبة للدوران r هي من الشكل : $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+6-2i\sqrt{3}$

ب)تبيان أنَ صورة النقطة A بالدوران r هي النقطة B:

لدينا : $r(A)=A'$ يعني $z_{A'}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A+6-2i\sqrt{3}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2+2i\sqrt{3}\right)+6-2i\sqrt{3}$

ومنه $z_{A'}=-1-i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3+6-2i\sqrt{3}=2-2i\sqrt{3}=z_B$

أي أنَ صورة النقطة A بالدوران r هي النقطة B



ج) تعيين طبيعة الرباعي $OA\Omega B$:

لدينا : $z_{\overrightarrow{OB}}=z_B-z_O=2-2i\sqrt{3}$ و $z_{\overrightarrow{A\Omega}}=z_\Omega-z_A=4-\left(2+2i\sqrt{3}\right)=4-2-2i\sqrt{3}=2-2i\sqrt{3}$

أي لدينا : $z_{\overrightarrow{OB}}=z_{\overrightarrow{A\Omega}}$ ومنه الرباعي $OA\Omega B$ متوازي أضلاع .

ولدينا : $OB=\left|z_{\overrightarrow{OB}}\right|=\left|2-2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4$

و $OA=\left|z_{\overrightarrow{OA}}\right|=\left|2+2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4$

إذن : $OA=OB=4$

وبالتالي طبيعة الرباعي $OA\Omega B$ معين

تصحيح التمرين الرابع: ☺☺☺☺ الرجوع إلى نص التمرين

I. لدينا الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(2x+1)e^x-1$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x+1)e^x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2xe^x+e^x-1\right]=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x+1)e^x-1\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

- **حساب المشتقة :**

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$g'(x)=2e^x+(2x+1)e^x=(2x+3)e^x$$

$$g'(x)=(2x+3)e^x$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

$g'(x)=0$ يعني $(2x+3)e^{x}=0$ ومنه $2x+3=0$

أي $x=-\frac{3}{2}$

- **جدول إشارة المشتقة :**

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصةعلى المجال $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

- **جدول تغيرات الدالة g:**

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)+1\right)e^{-\frac{3}{2}}-1=-2e^{-\frac{3}{2}}-1$

2) حساب $g(0)$ ثم إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

- **حساب $g(0)$:**

$g(0)=(2\times0+1)e^{0}-1=1-1=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

إذا كان $x\in\left]-\infty;0\right]$ فإنَ $g(x)\le 0$

إذا كان $x\in\left[0;+\infty\right[$ فإنَ $g(x)\ge 0$

.II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x\left(e^{x}-1\right)^{2}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{x}-1\right)^{2}\right]=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{x}-1\right)^{2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ)تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$:

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(e^x-1\right)^2-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-2xe^x+x-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-2xe^x\right)=0$$

أي $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$

لدينا : $f(x)-x=xe^{2x}-2xe^x=xe^x\left(e^x-2\right)$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
x		-	0	+	|	+	
e^x-2		-	|	-	0	+	
$f(x)-x$		+	0	-	0	+	

الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

إ ذا كان $x\in]-\infty;0[\cup]ln2;+\infty[$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ فوق (Δ)

إذا كان $x\in]0;ln2[$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ)

إذا كان $x=0$ أو $x=ln2$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع (Δ)

3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\left(e^x-1\right)\times g(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$f'(x)=\left(e^x-1\right)^2+2xe^x\left(e^x-1\right)=\left(e^x-1\right)\left[e^x-1+2xe^x\right]$ ومنه $f'(x)=\left(e^x-1\right)\left[(2x+1)e^x-1\right]$

أي $f'(x)=\left(e^x-1\right)\times g(x)$

ب) إستنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		-	0	+	
$g(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	+	

جدول تغيرات الدالة f :

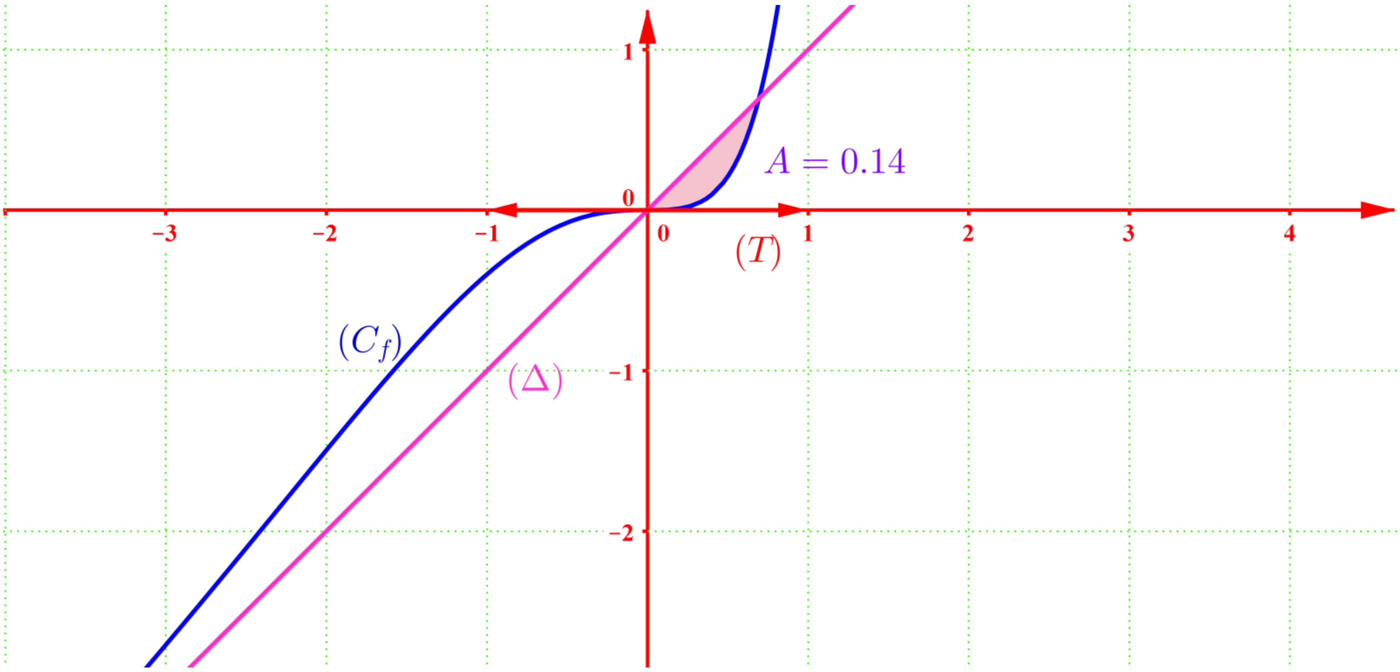
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=0$

معادلة المماس $(T): y=0$

ب) رسم (T) ، (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$:



5) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(E): f(x)=mx$.

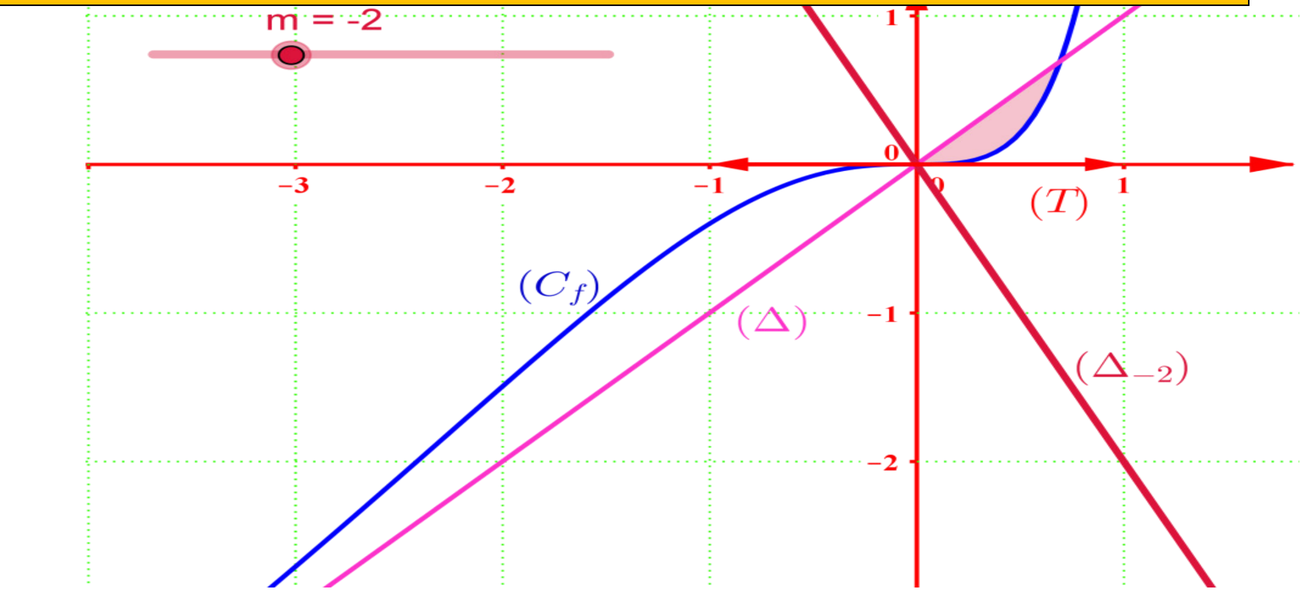
حلول المعادلة بيانيا هي فواصل النقط المشتركة بين المنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (Δ_m) الذي يدور حول المبدأ O.(مناقشة دورانية)

إذا كان $m\in]-\infty;0]$ المعادلة (E) تقبل حلا معدوما .

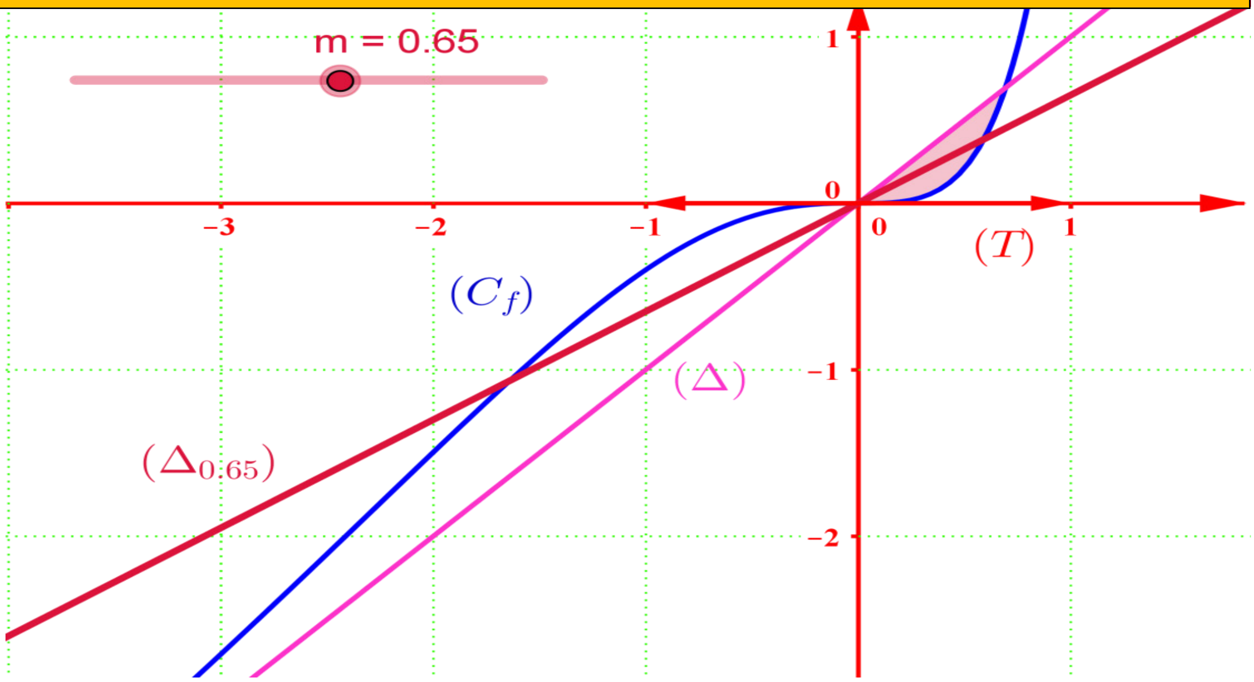
إذا كان $m\in]0;1[$ المعادلة (E) تقبل ثلاثة حلول ، حلا سالبا ، حلا معدوما و حلا موجبا .

إذا كان $m\in[1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلين ، حلا معدوما وحلا موجبا .

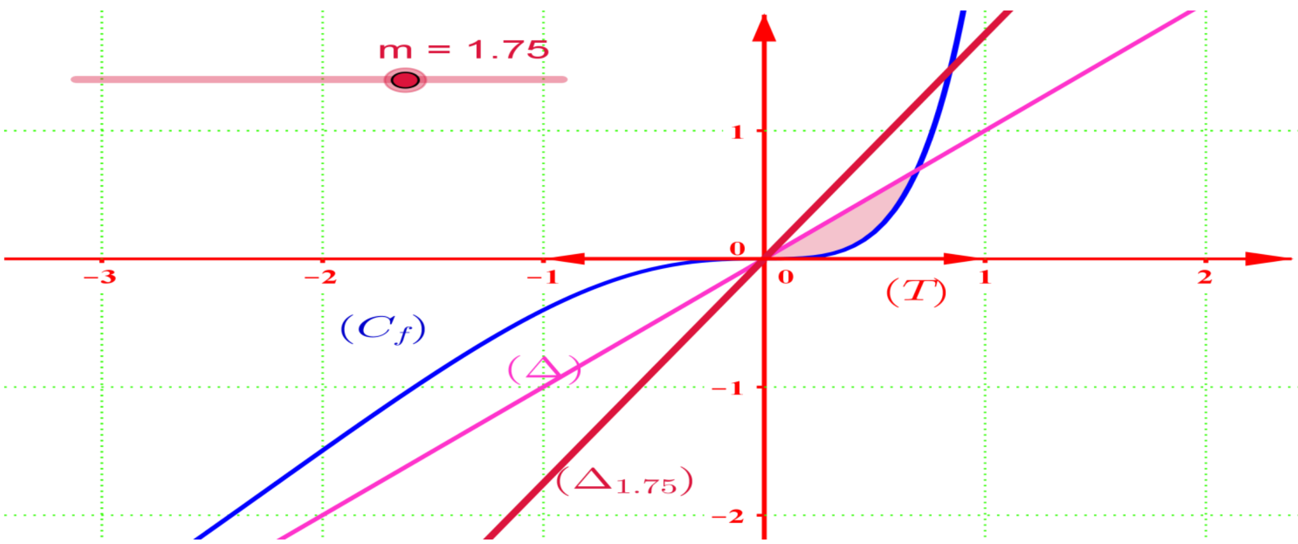
إذا كان $m \in]-\infty;0]$ المعادلة (E) تقبل حلا معدوما .



إذا كان $m \in]0;1[$ المعادلة (E) تقبل ثلاثة حلول حلا سالبا ، حلا معدوما و حلا موجبا .



إذا كان $m \in [1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلين ، حلا معدوما وحلا موجبا .



6) حساب المساحة A :

من أجل $x\in[0;ln2]$ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ تحت المستقيم المقارب (Δ) وبالتالي :

$$A=\int_0^{ln2}\left(x-f(x)\right)dx \text{ أي } A=\int_0^{ln2}\left(x-x\left(e^x-1\right)^2\right)dx \quad A=\int_0^{ln2}\left(x-xe^{2x}+2xe^x-x\right)dx$$

$$A=\int_0^{ln2}x\left(-e^{2x}+2e^x\right)dx$$

نضع : $u(x)=x$ ومنه $u'(x)=1$

و $v'(x)=-e^{2x}+2e^x$ ومنه $v(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x$

إذن : $A=\left[x\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x\right)\right]_0^{ln2}-\int_0^{ln2}\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x\right)dx$

ومنه : $A=\left[x\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x\right)\right]_0^{ln2}+\left[\frac{1}{4}e^{2x}-2e^x\right]_0^{ln2}=\left[x\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x\right)+\frac{1}{4}e^{2x}-2e^x\right]_0^{ln2}$

أي $A=\left[ln2\left(-\frac{1}{2}e^{2ln2}+2e^{ln2}\right)+\frac{1}{4}e^{2ln2}-2e^{ln2}\right]-\left[0\times\left(-\frac{1}{2}e^{2\times0}+2e^0\right)+\frac{1}{4}e^{2(0)}-2e^0\right]$

ومنه $A=\left[ln2\left(-\frac{1}{2}\times4+2\times2\right)+\frac{1}{4}\times4-2\times2\right]-\left[\frac{1}{4}-2\right]=\left(ln2\times(-2+4)+1-4\right)-\left(\frac{1}{4}-2\right)$

$$A=2ln2-3-\frac{1}{4}+2=\left(2ln2-1.25\right)us$$

أي $A=0.14cm^2$