التمرين الأول : ☺☹☹ ____ مشاهدة الحل __________ (04 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ : $u_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ ،

$u_{n+1}=\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{3n}{n+1}u_n$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن : $u_n>-2$.

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $v_n=n(2+u_n)$.

أ) بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أحسب u_n بدلالة n.

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}ku_k$

التمرين الثاني :☺☺☹____ مشاهدة الحل ________(04نقاط)

z_2,z_1 عددان مركبان حيث ، $z_1=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2=2-2i$.

1) أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2) نضع : $Z=z_1\times z_2$

أ) أكتب العدد Z على الشكل الأسي .

ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

3) أحسب $\left(\dfrac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{2014}$.

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E):7x-12y=6$

أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 6.

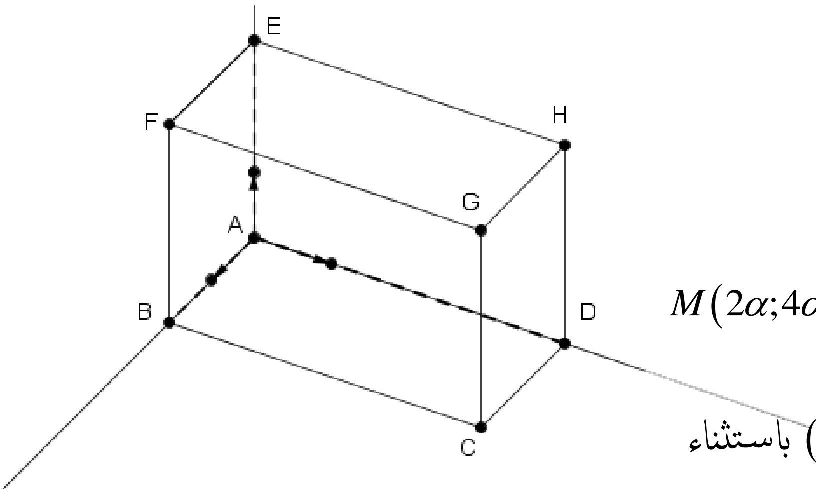
ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

5) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{n}$ تخيليا صرفا .

التمرين الثالث: ☹☺☺ ــــ مشاهدة الحلـــــــــ(04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث ،

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}, \overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.



1) أ) تحقق أن : $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

ب) عين إحداثي الشعاعين $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$.

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (EBG).

2) ليكن α عدد حقيقي يختلف عن 1 و $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$ نقطة من الفضاء .

أ) تحقق أن النقطة M تنتمي الى المستقيم (AG) باستثناء النقطة G.

ب)بين أن النقطة M لا تنتمي الى المستوي (EBG).

3) ليكن V حجم رباعي الوجوه $MEBG$.

أ) عبر عن V بدلالة α.

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $AEBG$.

ج) من أجل أية قيمة للعدد الحقيقي α، يكون V مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.

التمرين الرابع: ☺☺☹ ــ مشاهدة الحل ـــــــــــــ(08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $2cm$)

1) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف .

2) أحسب $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المستقيم $(\Delta): y=2x-2$ مقارب مائل للمنحني (C_f)عند $-\infty$ وعند $+\infty$ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f)بالنسبة الى (Δ).

4) احسب $f(-x)+f(x)$. ماذا ماذا تمثل النقطة $\Omega(0;-2)$ بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

5) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T)يمر من النقطة Ω يمس (C_f) في نقطتين A و B يطلب تعيينهما.ثم أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T).

6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0.4<\alpha<-0.35$.

7) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f).

8) لتكن (Δ_m) المستقيمات التي معادلاتها ، $y=mx-2$ حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=mx-2$

III. ليكن λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$.

1) أحسب بدلالة λ و بـ cm^2المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=\lambda, x=1$.

2) عين قيمة العدد الحقيقي λ بحيث يكون : $A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$.

✌ مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح لأبنائنا ☹ وبناتنا ☺☺ في البكالوريا 2017 ❁

تصحيح التمرين الأول: ☺☹☹ الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ : $u_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ،

$u_{n+1}=\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{3n}{n+1}u_n$.

1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ فإنَّ : $u_n>-2$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1. من أجل $n=1$ لدينا :

$u_1=1$ ومنه $u_1>-2$ أي $P(0)$ صحيحة .

2. نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَّ $u_n>-2$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنّ $u_{n+1}>-2$.

لدينا : $u_n>-2$ ومنه $\dfrac{3n}{n+1}u_n>-2\times\dfrac{3n}{n+1}$ لأنّ $\dfrac{3n}{n+1}>0$ من أجل $n\geq 1$

أي $\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{3n}{n+1}u_n>\dfrac{4n-2}{n+1}-\dfrac{6n}{n+1}$

ومنه $u_{n+1}>\dfrac{4n-2-6n}{n+1}$ أي $u_{n+1}>\dfrac{-2n-2}{n+1}$ وبالتالي $u_{n+1}>-2\times\dfrac{n+1}{n+1}$

إذن $u_{n+1}>-2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإنَّ : $u_n>-2$

2) دراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{3n}{n+1}u_n-u_n=\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{3n\times u_n-(n+1)u_n}{n+1}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{(3n-n-1)u_n}{n+1}=\dfrac{4n-2}{n+1}+\dfrac{(2n-1)u_n}{n+1}=\dfrac{2(2n-1)+(2n-1)u_n}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=(2n-1)\times\dfrac{2+u_n}{n+1}$

من أجل $n\geq 1$ لدينا : $2n-1\geq 1$ ، $u_n+2>0$ (لأنّ $u_n>-2$) و $n+1\geq 2$

وبالتالي : $u_{n+1}-u_n>0$ أي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

3) من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا : $v_n=n(2+u_n)$

أ) تبيان أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية :

لدينا :

$$v_{n+1}=(n+1)(2+u_{n+1})=(n+1)\left(2+\frac{4n-2}{n+1}+\frac{3n}{n+1}u_n\right)=(n+1)\left(\frac{2n+2+4n-2+3n\times u_n}{n+1}\right)$$

ومنه $v_{n+1}=(n+1)\left(\frac{2n+2+4n-2+3n\times u_n}{n+1}\right)=6n+3n\times u_n=3\underbrace{n(2+u_n)}_{v_n}$

ومنه $v_{n+1}=3v_n$

أي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $v_1=1\times(2+u_1)=3$

ب) حساب u_n بدلالة n:

لدينا : $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 3^{n-1}=3^n$

عبارة الحد العام $v_n=3^n$

ولدينا : $v_n=n(2+u_n)$ ومنه $\frac{v_n}{n}=2+u_n$

وبالتالي $u_n=\frac{v_n}{n}-2=\frac{3^n}{n}-2$

عبارة الحد العام $u_n=\frac{3^n}{n}-2$

ج)حساب بدلالة n المجموع : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}ku_k$:

لدينا : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}ku_k=1\times u_1+2\times u_2+...+n\times u_n$

ومنه $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}ku_k=1\times\left(\frac{v_1}{1}-2\right)+2\times\left(\frac{v_2}{2}-2\right)+...+n\times\left(\frac{v_n}{n}-2\right)$

أي $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}ku_k=(v_1-2\times1)+(v_2-2\times2)+...+(v_n-2n)$

ومنه $S_n=\underbrace{v_1+v_2+...+v_n}_{S_1}-2\underbrace{(1+2+...+n)}_{S_2}$

ولدينا : $S_1=3^1+3^2+...+3^n=3\times\frac{1-3^n}{1-3}=-\frac{3}{2}(1-3^n)$ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 3 وأساسها 3 .

و $S_2=\frac{n}{2}(1+n)$ مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الاول 1 وأساسها 1 .

وبالتالي : $S_n=S_1-2S_2=\frac{3}{2}\times 3^n-\frac{3}{2}-2\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}n^2\right)=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-2n^2-2n-3\right)$

تصحيح التمرين الثاني: ☹☺☺ الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : z_1, z_2 عددان مركبان حيث ، $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2 = 2 - 2i$.

1) **كتابة كلا من z_1 و z_2 على الشكل الأسي :**

لدينا : $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

حساب الطويلة $|z_1| = \left|-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

تعيين عمدة للعدد z_1: نضع $\theta_1 = \arg(z_1)$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$ ومنه $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$

أي $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

ولدينا : $z_2 = 2 - 2i$

حساب الطويلة $|z_2| = |2 - 2i| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

تعيين عمدة للعدد z_2: نضع $\theta_2 = \arg(z_2)$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ ومنه $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

أي $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) نضع : $Z = z_1 \times z_2$

أ) **كتابة العدد Z على الشكل الأسي :**

$$Z = z_1 \times z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

أي $Z = 2\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

ب) **تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$:**

كتابة العدد $Z = z_1 \times z_2$ على الشكل الجبري :

$$Z=\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times(2-2i)=-3+3i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}=\left(-3+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)$$

إذن $Z=\left(-3+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)$

تعيين كلا من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

لدينا : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2\times 6}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2\times 6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

وبالتالي $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

6) حساب $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{2016}$:

لدينا : $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{2016}=\left[\frac{2\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{2\sqrt{6}}\right]^{2016}=\cos\frac{7\times 2016\pi}{12}+i\sin\frac{7\times 2016\pi}{12}$

ومنه $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{2016}=\cos(1176\pi)+i\sin(1176\pi)=1$

إذن $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{2016}=1$

7) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E):7x-12y=6$

أ) تبيان أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 6:

لدينا: $7x-12y=6$ تكافئ $7x-12y=6$

أي $7x=12y+6$ ومنه $7x=6(2y+1)$

لدينا : $6/7x$ و 6 أولي مع 7 ومنه $6/x$ (حسب مبرهنة غوص)

ومنه العدد x مضاعف للعدد 6

ب) حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$:

تعيين حلا خاصا للمعادلة (E): من أجل $x=6$ لدينا $7\times 6=6(2y+1)$

وبالتالي $7=2y+1$ أي $y=3$

إذن الثنائية $(x_0;y_0)=(6;3)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

إذن $7x-12y=6$ تكافئ $7x-12y=7\times6-12\times3$ أي $7x-7\times6=12y-12\times3$

ومنه $7(x-6)=12(y-3)...(*)$

لدينا : $12/7(x-6)$ و $12\wedge7=1$ ومنه $12/(x-6)$ (حسب مبرهنة غوص)

وبالتالي $x-6=12k$ ومنه $x=12k+6(k\in\mathbb{Z})$

من أجل $x=12k+6(k\in\mathbb{Z})$ بالتعويض في $7(x-6)=12(y-3)...(*)$

نجد : $7(12k+6-6)=12(y-3)$ ومنه $7k=y-3$

أي $y=7k+3(k\in\mathbb{Z})$

مجموعة حلول المعادلة (E) : $S=\{(12k+6;7k+3);k\in\mathbb{Z}\}$

8) **تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^n$ تخيليا صرفا :**

لدينا : $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^n=\cos\frac{7n\pi}{12}+i\sin\frac{7n\pi}{12}$

العدد $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^n$ تخيليا صرفا يعني $\cos\frac{7n\pi}{12}=0$

ومنه $\frac{7n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $7n\pi=12\times\frac{\pi}{2}+12k\pi$ ومنه $7n\pi=6\pi\times+12k\pi$

وبالتالي $7n=6\times+12k$ ومنه $7n-12k=6$ وهي من الشكل $(E):7x-12y=6$

ومنه قيم العدد الطبيعي $n=12\lambda+6(\lambda\in\mathbb{N})$

تصحيح التمرين الثالث: ☹☹☹ <u>الرجوع إلى نص التمرين</u>

لدينا : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث ، $\overrightarrow{AE}=3\vec{k},\overrightarrow{AD}=4\vec{j},\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

1) أ) **التحقق أن : $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$:**

لدينا : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ لان :

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}=3\vec{k},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=4\vec{j},\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

إذن $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$

ب) **تعيين إحداثيي كل من الشعاعين $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$:**

لدينا : $\overrightarrow{EB}(2;0;-3)$ و $\overrightarrow{EG}(2;4;0)$

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (EBG):

لدينا : $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ شعاعي توجيه للمستوي (EBG).لأنّ $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيا .

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (EBG) يعني يوجد عددان حقيقيان β,λ بحيث يكون :

$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EB}+\beta\overrightarrow{EG}$ أي $\begin{cases}x=2\lambda+2\beta\\ y=4\beta\\ z-3=-3\lambda\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}x=2\lambda+2\beta\\ y=4\beta \qquad ;(\lambda;\beta)\in\mathbb{R}^2\\ z=-3\lambda+3\end{cases}$ هي جملة التمثيل الوسيطي للمستوي (EBG).

من الجملة السابقة لدينا : $\begin{cases}3x+2z=3(2\lambda+2\beta)+2(-3\lambda+3)\\ y=4\beta\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}3x+2z=6\beta+6\\ y=4\beta\end{cases}$ أي $3x+2z=6\times\frac{y}{4}+6$ ومنه

$$3x+2z-\frac{3}{2}y-6=0$$

وبالتالي $6x-3y+4z-12=0$ معادلة للمستوي (EBG)

2) لدينا : $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$ و $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$

أ) التحقق أن النقطة $M\in(AG)$ ماعدا النقطة G:

تمثيل وسيطي للمستقيم (AG) : $\begin{cases}x=2t\\ y=4t;(t\in\mathbb{R})\\ z=3t\end{cases}$

نعوض بإحداثيات النقطة M في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases}2\alpha=2t\\ 4\alpha=4t\\ 3\alpha=3t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=\alpha\\ t=\alpha\\ t=\alpha\end{cases}$

بما أنّ t وحيد فإنّ M تنتمي الى المستقيم (AG) ماعدا النقطة G لان $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$

ب) اثبات أن النقطة $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$ لاتنتمي الى المستوي (EBG):

نعوض بإحداثيات النقطة $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$ في معادلة المستوي (EBG) نجد :

وبما أن $6(2\alpha)-3(4\alpha)+4(3\alpha)-12=12\alpha-12$ $\alpha\neq 1$

فان $12\alpha-12\neq 0$ ومنه $M\notin(EBG)$

3) أ) التعبير عن الحجم V بدلالة α:

لدينا: $V=\frac{1}{3}S_{(EBG)}\times h$

حساب $S_{(EBG)}$:

لدينا : $S_{(EBG)}=\frac{1}{2}\times EB\times EG\times\sin BEG$

حساب $\sin BEG$:

لدينا : $\cos BEG=\frac{\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EG}}{EB\times EG}=\frac{4}{2\sqrt{65}}=\frac{2}{\sqrt{65}}$

ولدينا : $\sin^2 BEG+\cos^2 BEG=1$ ومنه $\sin^2 BEG+\frac{4}{65}=1$

أي $\sin^2 BEG=1-\frac{4}{65}=\frac{61}{65}$ وبالتالي $\sin BEG=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$

إذن : $S_{(EBG)}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{65}\times\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}=\sqrt{61}$ أي $S_{(EBG)}=\sqrt{61}\ us$

- حساب h:

$$h=d(M,(BEG))=\frac{|12\alpha-12|}{\sqrt{36+9+16}}=\frac{12|\alpha-1|}{\sqrt{61}}$$

إذن : $V=\frac{1}{3}\sqrt{61}\times\frac{12|\alpha-1|}{\sqrt{61}}=4|\alpha-1|$

أي $V=4|\alpha-1|\ uv$

ب)حساب حجم رباعي الوجوه $AEBG$:

$$V_{AEBG}=\frac{1}{3}S_{AEB}\times GF$$

لدينا : $S_{AEB}=\frac{1}{2}\times AB\times AE=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3us$

و لدينا : $GF=AD=4$

أي حجم رباعي الوجوه $AEBG$ $V_{AEBG}=\frac{1}{3}\times 3\times 4=4uv$

ج) تعيين قيمة α بحيث يكون الحجم V مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$:

لدينا : $V_{ABCDEFGH} = 2\times 3\times 4 = 24uv$

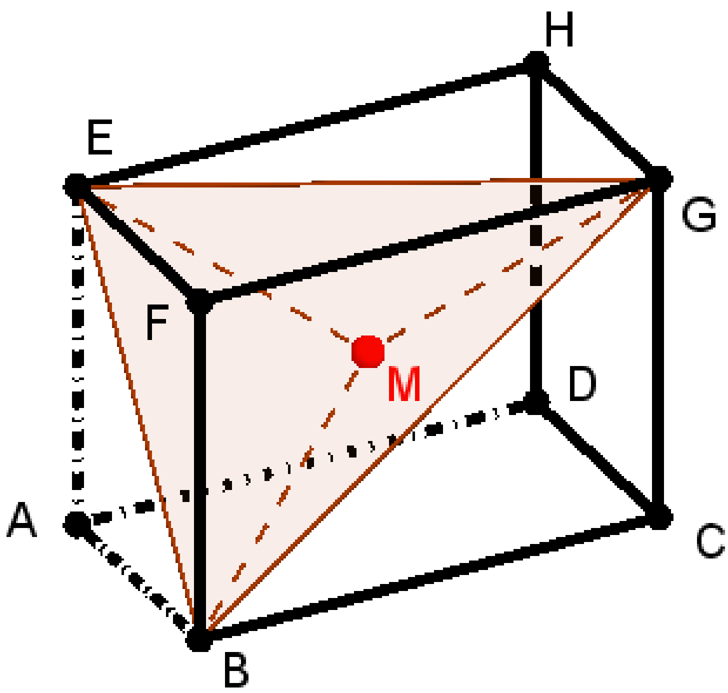
$V = V_{ABCDEFGH}$ يعني $4|\alpha -1| = 24$

ومنه $|\alpha -1| = 6$

إما : $\alpha -1 = 6$ ومنه $\alpha = 7$

أو : $\alpha -1 = -6$ ومنه $\alpha = -5$

يكون الحجم V مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ إذا كان $\alpha \in \{-5;7\}$



تصحيح التمرين الرابع ☹☹☺: الرجوع إلى نص التمرين

I. لدينا الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln|x|$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2 + 1 - \ln|x|\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(2 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(-x)}{x^2}\right) = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left(2x^2+1-\ln|x|\right)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left(2x^2+1-\ln(-x)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(2x^2+1-\ln|x|\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(2x^2+1-\ln(x)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2+1-\ln|x|\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=+\infty$$

لأن
$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$	$\lim_{x\xrightarrow{<}0} g(x)=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

حساب المشتقة :

$g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$ لأنّ $\left(\ln|u|\right)'=\frac{u'}{u}$

عبارة المشتقة $g'(x)=\frac{4x^2-1}{x}$

دراسة إشارة المشتقة :

$g'(x)=0$ يعني $\frac{4x^2-1}{x}=0$ ومنه $4x^2-1=0$ مع $x\neq 0$

أي $(2x+1)(2x-1)=0$

إما $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$4x^2-1$		+	0	-		-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	‖	-	0	+	

ومنه الدالة g متزايدة على كل من المجالين $\left[-\frac{1}{2};0\right[$ و $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ومتناقصة على كل من المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ و $\left]0;\frac{1}{2}\right]$

جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g\left(-\frac{1}{2}\right)\approx 2.19$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$g\left(\frac{1}{2}\right)\approx 2.19$	↗	$+\infty$

2) استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	

إذن $g(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$

.II الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$

1) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2-\frac{\ln(-x)}{-x}\right)=-\infty$$

لأنّ : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{\ln(-x)}{-x}\right)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}(2x-2)=-\infty$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(2x-2+\frac{\ln(-x)}{x}\right)=+\infty$$

لأنّ $\lim_{x\to0^-}\ln(-x)=-\infty$

$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(2x-2+\frac{\ln(x)}{x}\right)=-\infty$$

لأنّ $\lim_{x\to0^+}\ln(-x)=-\infty$

$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-2+\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f :

حساب المشتقة :

$$f'(x)=2+\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln|x|}{x^2}=\frac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}$$ لأن $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

أي $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ أي $f'(x)>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

3) تبيان أن المستقيم $(\Delta): y=2x-2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2x-2+\frac{\ln|x|}{x}-2x+2\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$$

لأن :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\ln(-x)}{-x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=2x-2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y=2x-2$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=2x-2+\frac{\ln|x|}{x}-2x+2=\frac{\ln|x|}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$\ln\|x\|$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)-y$		-	0	+	‖	-	0	+	

الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y=2x-2$

إذا كان $x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[$ المنحني (C_f) تحت (Δ).

إذا كان $x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$ المنحني (C_f) فوق (Δ).

إذا كان $x=-1$ أو $x=1$ فإن (C_f) يقطع (Δ)

4) حساب $f(-x)+f(x)$:

$$f(-x)+f(x)=-2x-2+\frac{\ln|-x|}{-x}+2x-2+\frac{\ln|x|}{x}=-4-\frac{\ln|x|}{x}+\frac{\ln|x|}{x}$$

أي $f(-x)+f(x)=-4=2(-2)$

الإستنتاج بالنسبة للمنحني (C_f):

تمثل النقطة $\Omega(0;-2)$ للمنحني (C_f) مركز تناظر

5) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) مار من النقطة Ω يمس (C_f) في نقطتين A و B :

معادلة المماس (T) من الشكل : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

لدينا : $f'(x_0)=\dfrac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}$ و $f(x_0)=2x_0-2+\dfrac{\ln|x_0|}{x_0}$

Ω نقطة من (T) يعني $-2=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

ومنه : $-2=\left(\dfrac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}\right)(-x_0)+2x_0-2+\dfrac{\ln|x_0|}{x_0}$

أي $-\dfrac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0}+2x_0+\dfrac{\ln|x_0|}{x_0}=0$ ومنه $\dfrac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|+2x_0^2}{x_0}+\dfrac{\ln|x_0|}{x_0}=0$

وبالتالي $\dfrac{-1+2\ln|x_0|}{x_0}=0$ يكافئ $-1+2\ln|x_0|=0$ مع $x_0\neq 0$

أي $\ln|x_0|=\dfrac{1}{2}$ مع $x_0\neq 0$

وبالتالي : $|x_0| = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ ومنه $x_0 = -\sqrt{e}$ أو $x_0 = \sqrt{e}$

المماس (T) المار من النقطة Ω يمس (C_f) في النقطتين $A\left(\sqrt{e}; f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ و $B\left(-\sqrt{e}; f\left(-\sqrt{e}\right)\right)$

كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T):

$$y = f'\left(\sqrt{e}\right)\left(x - \sqrt{e}\right) + f\left(\sqrt{e}\right)$$

$$f'\left(\sqrt{e}\right) = \frac{2\left(\sqrt{e}\right)^2 + 1 - \ln\left|\sqrt{e}\right|}{\left(\sqrt{e}\right)^2} = \frac{2e + 1 - \frac{1}{2}}{e} = \frac{4e+1}{2e}$$

$$f\left(\sqrt{e}\right) = 2\sqrt{e} - 2 + \frac{\ln\left|\sqrt{e}\right|}{\sqrt{e}} = 2\sqrt{e} - 2 + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = 2\sqrt{e} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{4e - 4\sqrt{e} + 1}{2\sqrt{e}}$$

إذن $y = \frac{4e+1}{2e}\left(x - \sqrt{e}\right) + \frac{4e - 4\sqrt{e} + 1}{2\sqrt{e}} = \frac{4e+1}{2e}x + \frac{-4e\sqrt{e} - \sqrt{e} + 4e\sqrt{e} - 4e + \sqrt{e}}{2e}$

$y = \frac{4e+1}{2e}x + \frac{-4e}{2e}$ ومنه $y = \frac{4e+1}{2e}x - 2$

أي معادلة المماس (T) $y = \frac{4e+1}{2e}x - 2$

6) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0.4 < \alpha < -0.35$:

لدينا: $f(1) = 2(1) - 2 + \frac{\ln|1|}{1} = 2 - 2 = 0$ إذن العدد 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$

ولدينا : f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-0.4; -0.35]$

$$f(-0.4) = 2(-0.4) - 2 + \frac{\ln|-0.4|}{-0.4} = -0.51$$

و

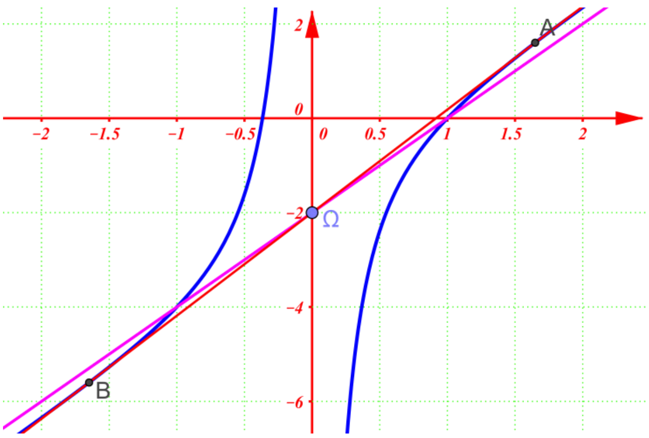
$$f(-0.35) = 2(-0.35) - 2 + \frac{\ln|-0.35|}{-0.35} = 0.3$$

أي $f(-0.4) \times f(-0.35) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.4 < \alpha < -0.35$.

إذن لمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0.4 < \alpha < -0.35$

7) الرسم :



8) لتكن (Δ_m) المستقيمات التي معادلاتها ، $y = mx - 2$ حيث m وسيط حقيقي.

أ) تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها :

نفرض $\left(\Delta_{m_1}\right): y = m_1 x - 2$

$\left(\Delta_{m_2}\right): y = m_2 x - 2$

إحداثيات نقط تقاطع المستقيمين (Δ_{m1}) و (Δ_{m2}) هي حلول الجملة $\begin{cases} y = m_1 x - 2 \\ y = m_2 x - 2 \end{cases}$

ومنه $m_1 x - 2 = m_2 x - 2$ أي $(m_1 - m_2)x = 0$

وبالتالي $x = 0$ لأنَ $m_1 - m_2 \neq 0$

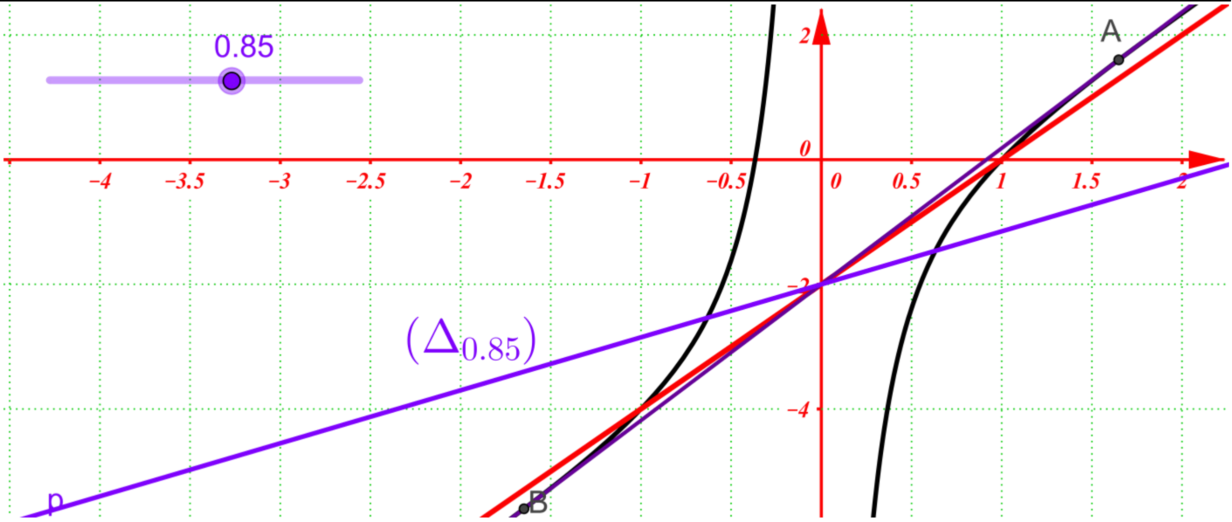
من أجل $x = 0$ نجد $y = m_1 \times 0 - 2 = -2$

جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من النقطة $\Omega(0;-2)$

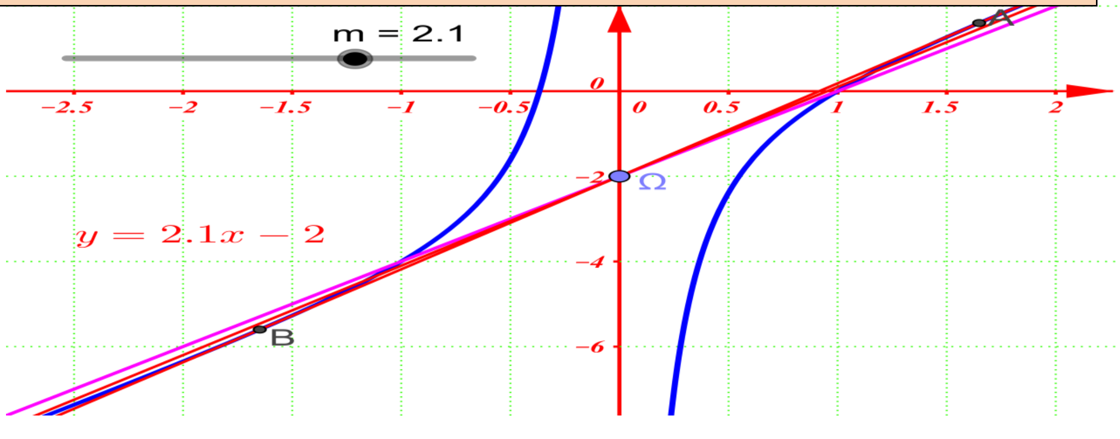
ب) المناقشة البيانيةوحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = mx - 2$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل النقط المشتركة بين المستقيم (Δ_m) الذي يدور حول النقطة $\Omega(0;-2)$ والمنحني (C_f).

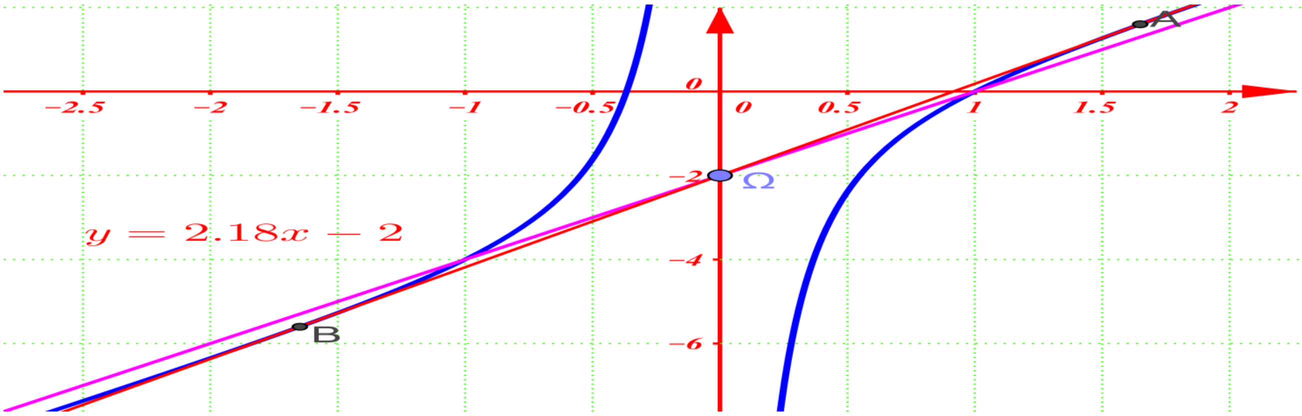
إذا كان $m \in]-\infty;2]$ المعادلة تقبل حلين أحدها موجب والآخر سالب .



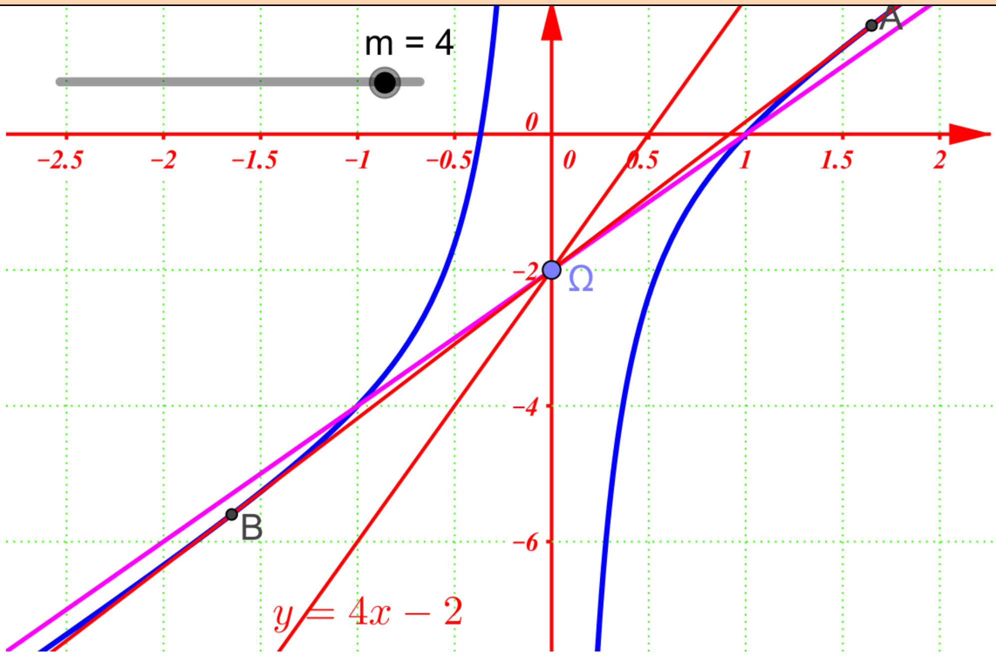
إذا كان $m \in \left]2; \frac{4e+1}{2e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول حلين سالبين وحلين موجبين .



إذا كان $m=\dfrac{4e+1}{2e}$ المعادلة تقبل حلين ، حل سالب وحل موجب .



إذا كان $m\in\left]\dfrac{4e+1}{2e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حل .



III. لدينا λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$.

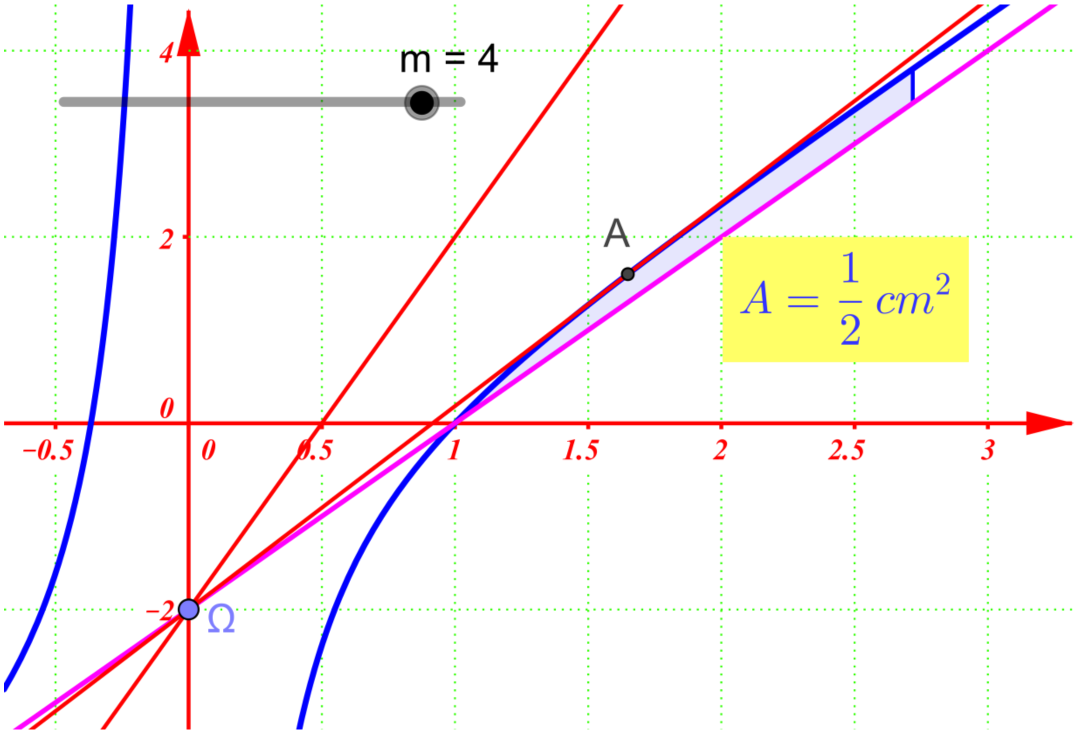
3) حساب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=\lambda, x=1$.

لدينا : $A(\lambda)=\int_1^\lambda (f(x)-(2x-2))dx=\int_1^\lambda \left(2x-2+\dfrac{\ln x}{x}-2x+2\right)dx$

لأنه من أجل $x\in[1;\lambda]$ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

أي $A(\lambda)=\int_1^\lambda \dfrac{\ln x}{x}dx=\left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^\lambda=\dfrac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\dfrac{1}{2}(\ln 1)^2=\dfrac{1}{2}(\ln\lambda)^2 us$

وبالتالي $A(\lambda)=\left[\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\right]\times 1cm^2=\left[\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\right]cm^2$



4) تعيين قيمة λ بحيث يكون $A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$:

$A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$ يعني $\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=\frac{1}{2}$

ومنه $(\ln\lambda)^2=1$

إما $\ln\lambda=-1$ ومنه $\lambda=e^{-1}$ (مرفوض لان $\lambda>1$)

أو $\ln\lambda=1$ ومنه $\lambda=e$ (مقبول)

إذن $A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$ من أجل $\lambda=e$

☜ لاتنسونا بخالص الدعاء لي ولوالدي وأهلي الأستاذ ثابت إبراهيم