التحضير الجيد ☺ للبكالوريا 2017 ☺ الموضوع السابع

التمرين الأول : ــــــــــــــــ مشاهدة الحل ــــــــــــ(04.5 نقطة)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5.

3) بين أن العدد 131 أولي .

4) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases} 3m+7d=2^n-48 \\ ab=5m \end{cases}$

حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

5) عين قيم n بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.

التمرين الثاني : ــــــــــــــــ مشاهدة الحل ــــــــــــ(04.5 نقطة)

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)=0$$

2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط C,B,A و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

- بين أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$ يطلب تعيين نصف قطرها .

3) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة الى المبدأ O.

أ) بين أن : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC.

ب) بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C. يطلب تعيين زاويته .

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث ، $z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$.

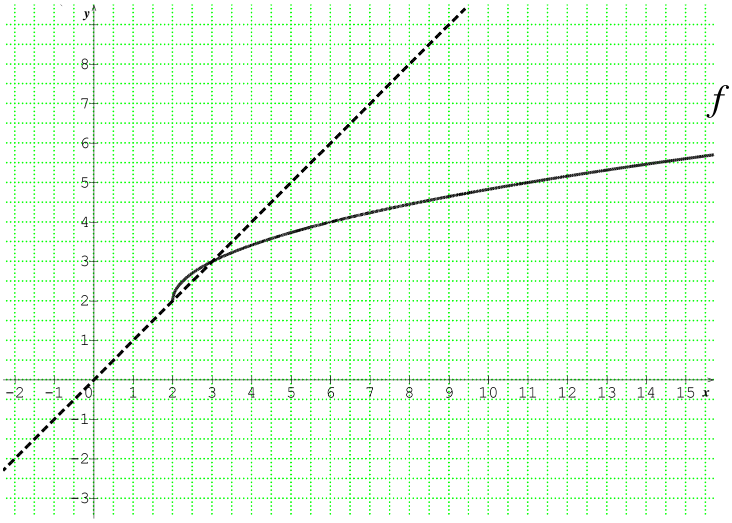
أ) عين طبيعة S وعناصره المميزة .

ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

ج) عين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية .

التمرين الثالث : ______________ مشاهدة الحل ________ (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2} + 2 \end{cases}$



1) أ) باستعمال المنحني (C_f) الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة بالعبارة $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$ و المنصف الاول ذي المعادلة $y = x$ ، مثل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل .

ب) ما هو تخمينك لاتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 \le u_n \le 11$.

3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$.

4) بين أنَ المتتالية (u_n) متناقصة ،استنتج مما سبق أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها .

5) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب) استنتج أن $0 \le u_{n+1} - 3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الرابع :______________ مشاهدة الحل ________ (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x + x\ln(x)$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x}$

(C_f) التمثيل البياني لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثمَ فسر النتيجتين هندسيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) أرسم المستقيمات المقاربة و (C_f).

4) أ) بين أنَ : $\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}\,dx = 1$.

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = 3$

والمستقيمين $x=e;x=1$.

III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{ln(x^2)}{|x|}$.

1) بين أنَ الدالة h زوجية ثمَ بين أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $h(x)=f(x)$.

2) أرسم المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق .

تصحيح ☹ الموضوع ☺☺ السابع

حل التمرين الأول : الرجوع إلى نص التمرين

1) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5:

$$2^4 \equiv 1[5] \quad 2^3 \equiv 3[5] \quad 2^2 \equiv 4[5] \quad 2^1 \equiv 2[5] \quad 2^0 \equiv 1[5]$$

– لدينا :

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p=4$.

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 2^n على 5	1	2	4	3

2) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5:

– لدينا : $2017^{4n+3} \equiv 2^{4n+3}[5]$ أي $2017^{4n+3} \equiv 3[5]$

– ولدينا : $2016^{8n} \equiv 1^{8n}[5]$ أي $2016^{8n} \equiv 1[5]$

– و $2014^{2n+1} \equiv 4^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1} \equiv \left(2^2\right)^{2n+1}[5]$ ومنه $2014^{2n+1} \equiv 2^{4n+2}[5]$

وبالتالي $2014^{2n+1} \equiv 4[5]$

– إذن $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1} \equiv 3-2\times 1+4[5]$

أي $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1} \equiv 5[5]$

ومنه $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1} \equiv 0[5]$

أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5هو 0

3) تبيان أن العدد 131أولي :

لدينا : $\sqrt{131}=11.45$

ولدينا : $131\equiv 10[11],131\equiv 5[7],131\equiv 1[5],131\equiv 2[3],131\equiv 1[2]$

العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الاعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي $\{2;3;5;7;11\}$

ومنه العدد 131 أولي

4) تعيين الأعداد الطبيعة n التي تحقق : $\begin{cases} 3m+7d=2^n-48 \\ ab=5m \end{cases}$

حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

لدينا $a=5a'$ $ab=5m$ ولدينا $ab=md$ ومنه $d=5$

نضع : $a=5a'$ و $b=5b'$ مع $a'\wedge b'=1$ (a' أولي مع b')

إذن $ab=5m$ يعني $5a'\times 5b'=5m$ أي $m=5a'b'$

وبالتالي : $3m+7d=2^n-48$ معناه $3\times 5a'b'+7\times 5=2^n-48$

أي $5(3a'b'+7)=2^n-48$

$3a'b'+7$ طبيعي يعني $2^n-48\equiv 0[5]$ ومنه $2^n-3\equiv 0[5]$

أي $2^n\equiv 3[5]$ وبالتالي : $n=4k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$

5) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون ، $7<n<15$:

– لدينا : $7<n<15$ يعني $7<4k+3<15$ أي $4<4k<12$

أي $1<k<3$ إذن $k=2$

ومنه $n=4\times 2+3=11$

– **إستنتاج الثنائيات $(a;b)$:**

من أجل $n=11$ لدينا : $5(3a'b'+7)=2^{11}-48$

ومنه $5(3a'b'+7)=2000$ أي $3a'b'+7=400$

ومنه $a'b'=131$

وبالتالي مجموعة الثنائيات $(a';b')$ $E_{(a';b')}=\{(131;1),(1;131)\}$
ومنه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ $E_{(a;b)}=\{(655;5),(5;655)\}$

حل التمرين الثاني: الرجوع إلى نص التمرين

1) حل المعادلة ذات المجهول المركب z في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$: $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$

$(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ تكافئ $z^2+3=0$ أو $z^2-6z+21=0$

$z^2+3=0$ يعني $z^2=-3=3i^2=(i\sqrt{3})^2$

إما $z=-i\sqrt{3}$ أو ، $z=i\sqrt{3}$

حل المعادلة $z^2-6z+21=0$

حساب المميز : $\Delta=(-6)^2-4\times 21=36-84=-48$

أي $\Delta=(4i\sqrt{3})^2$

إذن المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{6-4i\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$ ، $z_2=\frac{6+4i\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\{-i\sqrt{3},\ i\sqrt{3},\ 3-2i\sqrt{3},\ 3+2i\sqrt{3}\}$

2) لدينا :النقط C,B,A و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_C=3+2i\sqrt{3},$ و $z_D=\overline{z_C}$

- تبيان أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$:

لدينا : $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{3}$ و $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\sqrt{3}$

إذن $|z_A-z_\Omega|=|i\sqrt{3}-3|=|-3+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$|z_B-z_\Omega|=|-i\sqrt{3}-3|=|-3-i\sqrt{3}|=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$|z_C-z_\Omega|=|3+2i\sqrt{3}-3|=|2i\sqrt{3}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

و $|z_D-z_\Omega|=|3-2i\sqrt{3}-3|=|-2i\sqrt{3}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

ومنه : $|z_A-z_\Omega|=|z_B-z_\Omega|=|z_C-z_\Omega|=|z_D-z_\Omega|=2\sqrt{3}$

أي $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$

وبالتالي النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$
ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$

3) لدينا : النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة الى المبدأ O.

أي $z_E=-z_D=-3+2i\sqrt{3}$

أ) تبيان أن : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$:

لدينا : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{3(1+i\sqrt{3})}{3(-1+i\sqrt{3})}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$

أي $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\times\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{4}-i\frac{2\sqrt{3}}{4}$

ومنه : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

كتابة العدد $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ على الشكل الأسي :

لدينا : $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ $\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=$ أي $\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=1$

نضع : $arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=\theta$ إذن $\begin{cases} cos\,\theta=\frac{1}{2} \\ sin\,\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta=-\frac{\pi}{3}(2\pi)$

وبالتالي : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

إستنتاج طبيعة المثلث BEC:

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=1$ و $arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=-\frac{\pi}{3}(2\pi)$

ومنه : $\frac{BC}{BE}=1$ أي $BC=BE$ و $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}(2\pi)$

وبالتالي المثلث BEC متقايس الأضلاع

ب)تبيان أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C:

لدينا : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=1$

وبالتالي يوجد دوران مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C زاويته $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C زاويته $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

4) لدينا التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

، $z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$.

أ) تعيين طبيعة S وعناصره المميزة :

لدينا : $\frac{z'+i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}=\frac{z_{M'}-z_B}{z_M-z_B}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا : $\left|\frac{z_{M'}-z_B}{z_M-z_B}\right|=2$ و $\arg\left(\frac{z_{M'}-z_B}{z_M-z_B}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ومنه طبيعة التحويل النقطي S هو تشابه مستوي مباشر نسبته $k=2$ ومركزه النقطة B

وزاويته $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

ب)تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$:

لدينا : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ ومنه $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$ وبالتالي $|z-3|=2\sqrt{3}$ يعني $OM=2\sqrt{3}$

المجموعة (E) هي الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$

$(E) = (C)$

ج) تعيين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية :

صورة (E) هي دائرة (C') مركزها Ω' صورة Ω بالتحويل S حيث لاحقتها :

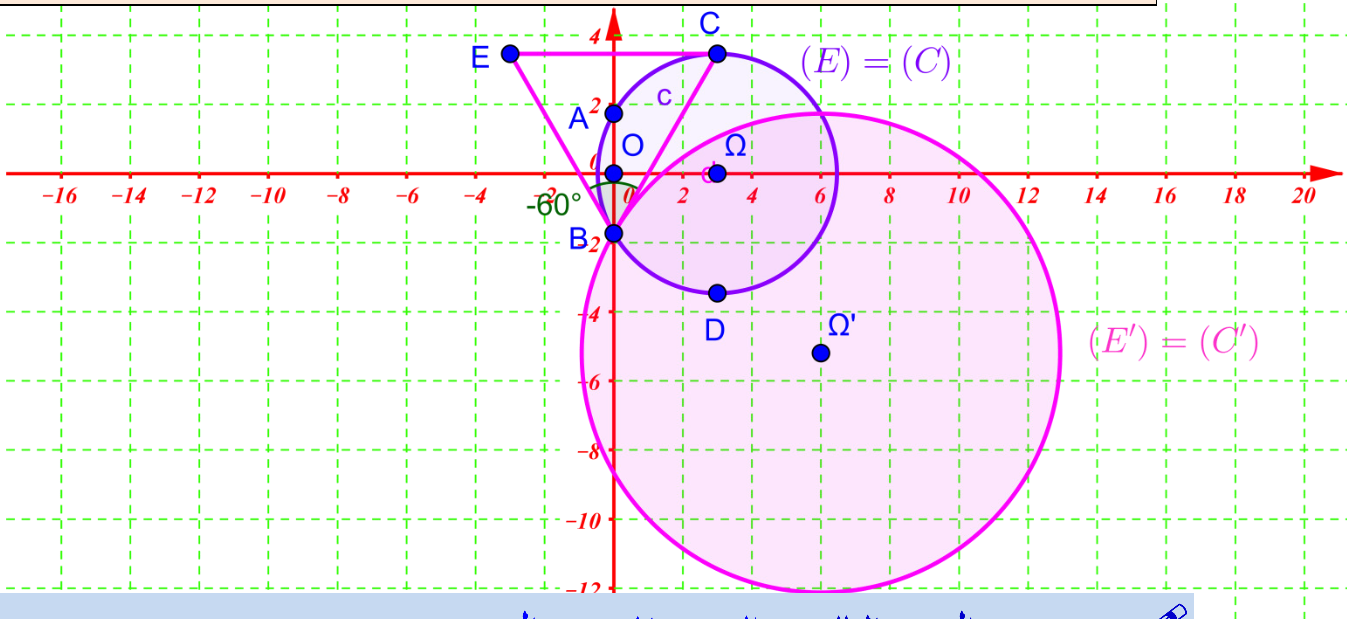
$$z_{\Omega'} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_\Omega + i\sqrt{3}\right) - i\sqrt{3}$$ ومنه $$z_{\Omega'} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3 + i\sqrt{3}\right) - i\sqrt{3}$$

أي $$z_{\Omega'} = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + i\sqrt{3}\right) - i\sqrt{3} = 3 + i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3} = 6 - 3i\sqrt{3}$$

$z_{\Omega'} = 6 - 3i\sqrt{3}$ ونصف قطرها $r' = k \times r = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

صورة الدائرة (C) بالتحويل S هي دائرة مركزها $\Omega'\left(6 - 3i\sqrt{3}\right)$ ونصف قطرها $r' = 4\sqrt{3}$

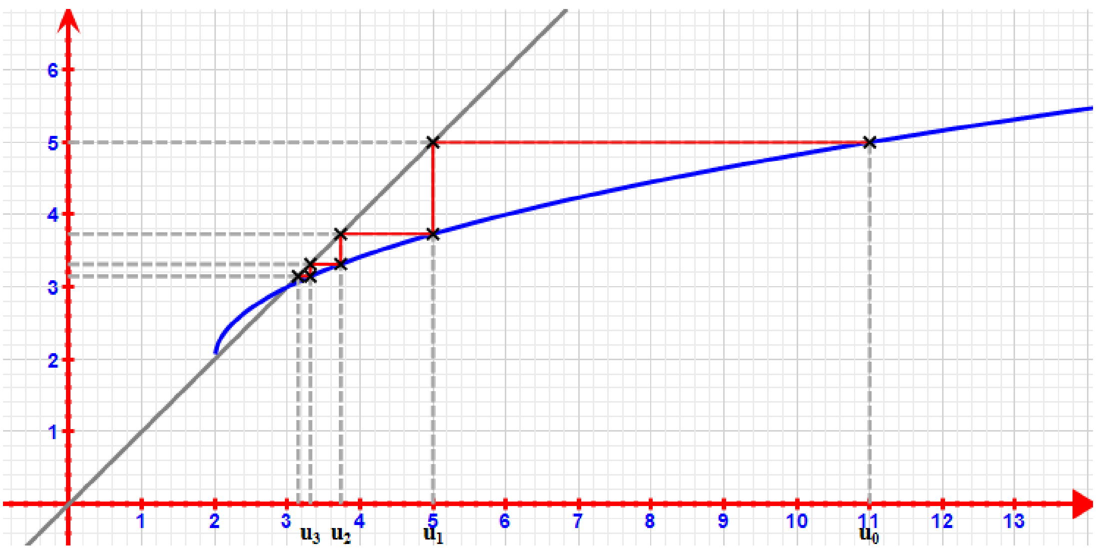
أي $(E') = (C')$



تصحيح التمرين الثالث : الرجوع إلى نص التمرين

(u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2} + 2 \end{cases}$$

1) أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3:



ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n):

نلاحظ أن $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .

2) البرهان بالتراجع أنه من كل عدد طبيعي n ، $3 \le u_n \le 11$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1) من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0 = 11$ إذن $3 \le u_0 \le 11$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $3 \le u_n \le 11$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $3 \le u_{n+1} \le 11$

لدينا : $3 \le u_n \le 11$ ومنه $3-2 \le u_n - 2 \le 11-2$ أي $\sqrt{1} \le \sqrt{u_n - 2} \le \sqrt{9}$

إذن $1+2 \le \sqrt{u_n-2}+2 \le 3+2$ وبالتالي $3 \le u_{n+1} \le 5$

لدينا $3 \le u_{n+1} \le 5$ و $5 < 11$ أي $3 \le u_{n+1} \le 11$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 \le u_n \le 11$

3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n-2} + 2 - u_n = \sqrt{u_n - 2} - (u_n - 2)$

أي $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2} - \left(\sqrt{u_n-2}\right)^2 = \sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$

4) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة:

لدينا : $3 \le u_n \le 11$ ومنه $1 \le \sqrt{u_n - 2} \le 3$

ومنه : $-3 \le -\sqrt{u_n-2} \le -1$ أي $-2 \le 1 - \sqrt{u_n-2} \le 0$

وبالتالي لدينا : $\sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right) \le 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \le 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة .

5) استنتاج مما سبق أن المتتالية (u_n) متقاربة :

(u_n) متتالية محدودة من الأسفل بالعدد 3 وهي متناقصة فهي متقاربة .

تعيين نهايتها : نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

إذن لدينا : $L = \sqrt{L-2}+2$ ومنه $L-2 = \sqrt{L-2}$

وبالتالي $(L-2)^2 = L-2$ أي $(L-2)^2 - (L-2) = 0$

ومنه $(L-2)[(L-2)-1]=0$ أي $(L-2)(L-3)=0$

وبالتالي : المعادلة تقبل حلين هما $L=3$ أو $L=2$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$ لأنَّ $3\le u_n\le 11$

6) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$:

لدينا : $3\le u_{n+1}\le 11$ ومنه $0\le u_{n+1}-3\le 8$ أي $(1)...0\le u_{n+1}-3$

ولدينا : $u_{n+1}-3=\sqrt{u_n-2}+2-3=\sqrt{u_n-2}-1$

أي $$u_{n+1}-3=\frac{\left(\sqrt{u_n-2}-1\right)\left(\sqrt{u_n-2}+1\right)}{\sqrt{u_n-2}+1}=\frac{u_n-2-1}{\sqrt{u_n-2}+1}=\frac{u_n-3}{\sqrt{u_n-2}+1}$$

ولدينا : $3\le u_n$ ومنه $1\le u_n-2$ أي $2\le\sqrt{u_n-2}+1$

وبالتالي : $\frac{1}{\sqrt{u_n-2}+1}\le\frac{1}{2}$

ومنه $(2)...\frac{u_n-3}{\sqrt{u_n-2}+1}\le\frac{1}{2}(u_n-3)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$

ب)استنتاج أن : $0\le u_n-3\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا :

$$u_1-3\le\frac{1}{2}(u_0-3)$$
$$u_2-3\le\frac{1}{2}(u_1-3)$$
$$u_3-3\le\frac{1}{2}(u_2-3)$$
$$\vdots$$
$$u_n-3\le\frac{1}{2}(u_{n-1}-3)$$

ومنه :

$$\cancel{(u_1-3)}\cancel{(u_2-3)}\cancel{(u_3-3)}\times\ldots\times\cancel{(u_{n-1}-3)}(u_n-3)\le\frac{1}{2}(u_0-3)\times\frac{1}{2}\cancel{(u_1-3)}\times\ldots\times\frac{1}{2}\cancel{(u_{n-1}-3)}$$

ومنه $u_n-3\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-3)$

إذن : $0 \le u_n - 3 \le 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

■ **تعيين نهاية المتتالية (u_n):**

لدينا : $0 \le u_n - 3 \le 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3)=0$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

تصحيح التمرين الرابع : الرجوع إلى نص التمرين

.I لدينا : الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x+x\,ln(x)$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}[1-x+x\,ln(x)]=1$ لأنَ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}[x\,ln(x)]=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1-x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[1-x+x\,ln(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}-1+ln(x)\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-1+ln(x)\right]=+\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

حساب المشتقة :

لدينا : $g'(x)=-1+ln(x)+x\times\frac{1}{x}=ln(x)$

دراسة إشارة المشتقة :

إشارة المشتقة من إشارة $ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)=ln(x)$	‖	-	0	+	

إذن g متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة على المجال $[1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $g(x)\geq 0$

.II f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2ln(x)}{x}$

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم تفسير النتيجتين هندسيا :

لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(3-\frac{1}{x^2}-\frac{2ln(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{3x^2-1-2x\,ln(x)}{x^2}=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(3x^2-1-2x\,ln(x)\right)=-1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\,ln(x)=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}-\frac{2ln(x)}{x}\right)=3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(x)}{x}\right)=0$

إذن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

التفسير الهندسي للنتيجتين : $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) و $y=3$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^3}$:

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{2}{x^3}-2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-ln(x)}{x^2}=\frac{2-2x+2x\,ln}{x^3}$

أي $f'(x)=\frac{2-2x+2x\,ln(x)}{x^3}=\frac{2(1-x+x\,ln(x))}{x^3}=\frac{2g(x)}{x^3}$

ومنه من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^3}$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^3}$ وبالتالي $f'(x)>0$

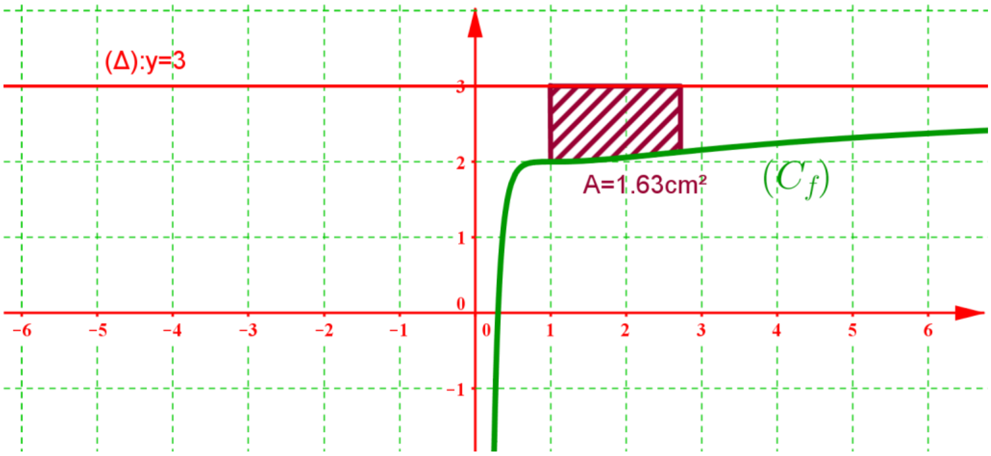
لأن $g(x)\geq 0$ و $x^3>0$

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3) رسم (C_f):



4) أ) تبيان أنّ : $\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}\,dx=1$:

لدينا : $\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}\,dx=\int_1^e 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)\,dx=\left[(\ln(x))^2\right]_1^e=(\ln e)^2-(\ln 1)^2=1$

إذن $\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}\,dx=1$

ج) حساب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم $(\Delta): y=3$ والمستقيمين $x=e; x=1$:

من أجل $x\in[1;e]$ المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=3$ومنه : $A=\int_1^e[3-f(x)]\,dx$

أي $A=\int_1^e\left[3-3+\frac{1}{x^2}+\frac{2\ln(x)}{x}\right]dx$

ومنه $A=\int_1^e\left[\frac{1}{x^2}+\frac{2\ln(x)}{x}\right]dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e+\int_1^e\frac{2\ln(x)}{x}\,dx=\left(-\frac{1}{e}+1\right)+1$

أي $A=\left(2-\frac{1}{e}\right)cm^2$

$A=\left(2-\frac{1}{e}\right)cm^2=1.63cm^2$

III. لدينا الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

1) تبيان أنّ الدالة h زوجية :

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنَ $(-x) \in \mathbb{R}^*$ أي D_h متناظرة بالنسبة إلى 0.

ولدينا : $h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{ln\left((-x)^2\right)}{|-x|} = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{ln(x^2)}{|x|} = h(x)$

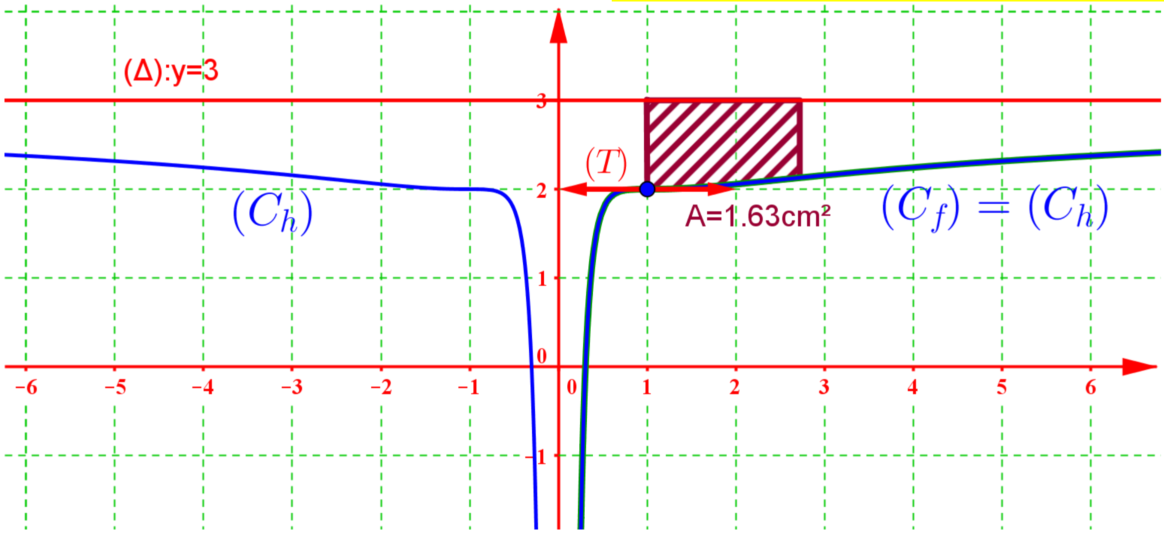
D_h متناظرة بالنسبة إلى 0 و $h(-x) = h(x)$ ومنه h دالة زوجية

تبيان أنه من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $h(x) = f(x)$:

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\,ln|x|}{|x|} = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\,ln(x)}{x} = f(x)$

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $h(x) = f(x)$

2) رسم المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق :



لاتنسونا بدعاء خالص لوالدي وأهلي ولي الأستاذ ثابت إبراهيم