التحضير ☺ الجيد ❀ للبكالوريا ☺ 2017- الموضوع الثامن

التمرين الأول: ــــــــــ مشاهدة الحل ــــــــــ(04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبرالمستوي $(P): x+y-z+2=0$ والنقطة $I(0;-1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقطة I تنتمي إلى المستوي (P).

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)المار من النقطة I والعمودي على المستوي (P).

2) لتكن (C) الدائرة ذات المركز I ونصف القطر 1 و (S) سطح الكرة ذات المركز $\Omega(1;0;0)$والتي يقطعها المستوي (P) في الدائرة (C).

أ) بين أنّ نصف قطر سطح الكرة (S) يساوي 2 .

ب) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

3) ليكن m وسيط حقيقي و (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث :

$x^2+y^2+z^2+mx+(m+2)y-(m+2)z+2m+1=0$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m فإنّ (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها .

ب) بين أنه عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}$ فإنّ I_m تتغير على المستقيم (Δ).

التمرين الثاني: ــــــــــ مشاهدة الحل ــــــــــ(05 نقاط)

I. ليكن m عددا حقيقيا موجبا تماما ونعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول المركب z التالية :

$$(E_m): z^2+m\sqrt{3}z+m^2=0$$

1- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ثم أكتب z_2, z_1 حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي بدلالة $\boldsymbol{m}$.

2- عين قيمة العدد الحقيقي $\boldsymbol{m}$ التي من أجلها يكون : $z_1^6+z_2^6=-128$.

II. نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف كما يلي : $P(z)=z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-1$

أ) تحقق أنّ $P(z)=(z-i)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)$.

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

III. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط B,A وC لواحقها على الترتيب $z_A=i$ ، $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

أ) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) أوجد لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ ثم بين طبيعة الرباعي $OABC$.

ج) عين زاوية الدوران r الذي مركزه النقطة O و يحول النقطة A إلى النقطة B.

التمرين الثالث : ـــــــــ مشاهدة الحل ـــــــــ(04 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ بما يلي : $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+1}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ فإن : $f'(x)=\frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$,

2) أدرس تغيرات الدالة f.

3) بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;2]$ فإن : $f(x)\in[0;2]$.

4) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنَ : $0\le u_n\le 2$.

ب)أدرس رتابة المتتالية (u_n).

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثمَ عين نهايتها .

التمرين الرابع : ـــــــــ مشاهدة الحل ـــــــــ(07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب $f(x)$ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}$ ثمَ فسر النتيجة هندسيا .

ب)أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثمَ شكل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة 0 ,

4) أ) بيَن أنَ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوما والآخر α حيث $3.9<\alpha<4$.

ب)بين أنَ : $\ln(1+\alpha)=\frac{2\alpha}{1+\alpha}$

ج) عين إشارة $f(x)$ على المجال $[0;\alpha]$.

5) أحسب $f(5)$ ثمَ أرسم (T) و (C_f).

6) لتكن الدالة العددية F المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يلي : $F(x)=(-x-3)\ln(1+x)+3x$.

أ) بين أنَ الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذي المعادلتين $x=0$ و $x=\alpha$.

بين أنَ : $A(\alpha)=\left(\frac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)cm^2$ ثمَ عين حصرا لـ $A(\alpha)$

✌ مع تمنياتي الخالصة بالتوفيق والنجاح لبناتنا☺☺وأبنائنا☹ في البكالوريا 2017 ✿

☜ حل الموضوع الثامن ☺☹☺ للتحضير الجيد للبكالوريا

✎ حل التمرين الأول : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا :المستوي $(P): x+y-z+2=0$ والنقطة $I(0;-1;1)$.

1) أ) **التحقق من أنّ النقطة I تنتمي إلى المستوي (P):**

نعوض بإحداثيات النقطة I في معادلة المستوي (P) نجد :

$0+(-1)-1+2=0$ محققة ومنه $I\in(P)$

ب)**تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من النقطة I والعمودي على المستوي (P):**

بما أنّ (Δ) عمودي على (P) فإنّ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو $\vec{u}_{(\Delta)}=\vec{n}_{(P)}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء تنتمي إلى (Δ) يعني $\overrightarrow{IM}=k\vec{u}_{(\Delta)}$

ومنه $\begin{cases}x=k\\y+1=k\\z-1=-k\end{cases}$ أي

$\begin{cases}x=k\\y=k-1\\z=-k+1\end{cases};\ (k\in\mathbb{R})$ جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

2) لدينا (C) الدائرة ذات المركز I ونصف القطر 1 و (S) سطح الكرة ذات المركز $\Omega(1;0;0)$.

أ) **تبيان أنّ نصف قطر سطح الكرة (S) يساوي R=2 :**

لدينا : $R^2=r^2+d^2(\Omega;(P))$

حساب المسافة $d(\Omega;(P))$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|1+2|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

وبالتالي : $R^2=r^2+d^2(\Omega;(P))=1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$

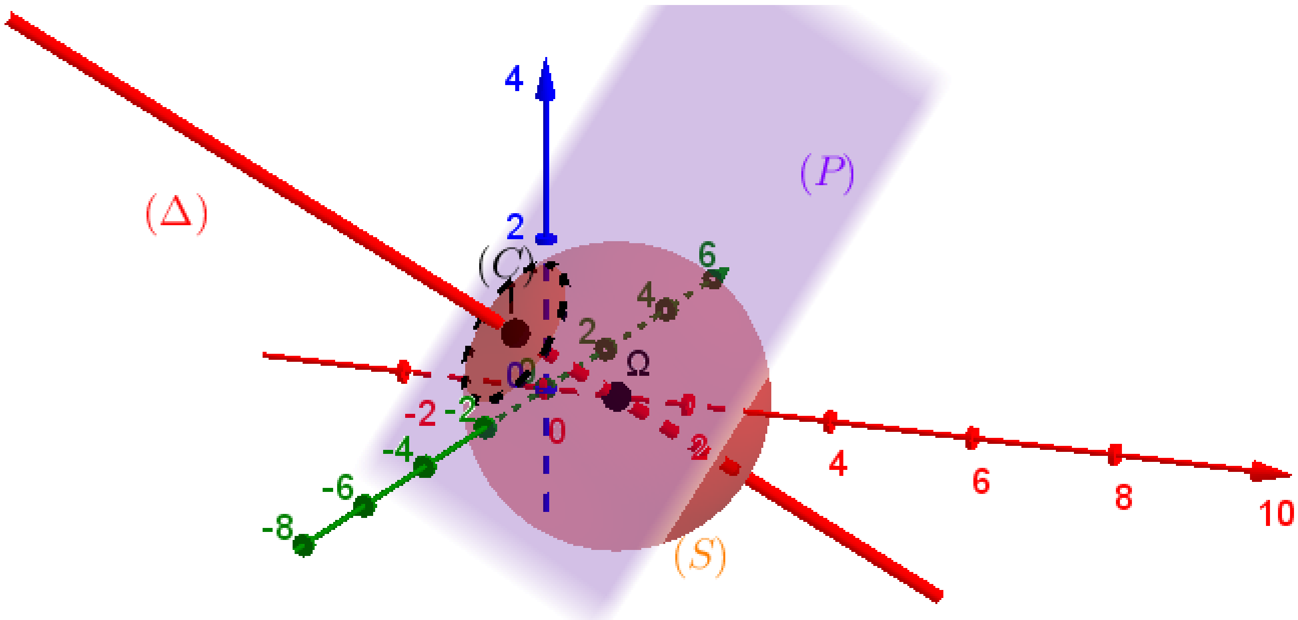
ومنه : $R=2$ نصف قطر سطح الكرة

ب) **كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S):**

لها معادلة من الشكل : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

أي $(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2^2$

ومنه : $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ معادلة لسطح الكرة (S)



3) لدينا (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث :

$$x^2+y^2+z^2+mx+(m+2)y-(m+2)z+2m+1=0$$

أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m فإنّ (S_m) سطح كرة :

نضع : $a=m,\ b=m+2,\ c=-m-2$ و $d=2m+1$

لدينا : $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=\dfrac{m^2+(m+2)^2+\left[-(m+2)\right]^2}{4}-(2m+1)$

أي $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=\dfrac{m^2+m^2+4m+4+m^2+4m+4-8m-4}{4}=\dfrac{3m^2+4}{4}=\dfrac{3}{4}m^2+1$

ومنه : $\dfrac{3}{4}m^2+1>0$ أي $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d>0$ من أجل أي عدد حقيقي m

ومنه (S_m) سطح كرة مركزها $I_m\left(-\dfrac{m}{2};-\dfrac{m+2}{2},\dfrac{m+2}{2}\right)$ ونصف قطرها $R_m=\sqrt{\dfrac{3}{4}m^2+1}$

ب)تبيان أنه عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}$ فإنّ I_m تنتمي إلى المستقيم (Δ):

لدينا : $I_m\left(-\dfrac{m}{2};-\dfrac{m+2}{2},\dfrac{m+2}{2}\right)$ ومنه $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}m \\ y=-\dfrac{1}{2}m-1;(m\in\mathbb{R}) \\ z=\dfrac{1}{2}m+1 \end{cases}$

أي I_m تمسح المستقيم الذي شعاع توجيه له $\vec{v}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $I(0;-1;1)$

لدينا $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع شعاع توجيه المستقيم (Δ) لأنّ $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

الجملة $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}m\\y=-\frac{1}{2}m-1;(m\in\mathbb{R})\\z=\frac{1}{2}m+1\end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) أي I_m تنتمي المستقيم (Δ)

حل التمرين الثاني : الرجوع إلى نص التمرين

I. لدينا في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول المركب z التالية: $(E_m): z^2+m\sqrt{3}z+m^2=0$

1. حل المعادلة (E_m) :

حساب المميز : $\Delta=\left(m\sqrt{3}\right)^2-4m^2=3m^2-4m^2=-m^2$

$\Delta=(im)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{-m\sqrt{3}+im}{2}$, $z_2=\frac{-m\sqrt{3}-im}{2}$

مجموعة حلول المعادلة (E_m) : $S=\left\{\frac{-m\sqrt{3}-im}{2},\ \frac{-m\sqrt{3}+im}{2}\right\}$

كتابة حلي المعادلة (E_m) على الشكل المثلثي :

كتابة $z_1=\frac{-m\sqrt{3}+im}{2}$ على الشكل المثلثي :

حساب الطويلة : $|z_1|=\left|\frac{-m\sqrt{3}+im}{2}\right|=\left|m\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|=|m|\times\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|=m\times1=m$

نضع : $arg(z_1)=\theta_1$ ومنه $\begin{cases}cos\,\theta_1=\frac{-m\sqrt{3}}{2m}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\sin\,\theta_1=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_1=\frac{-m\sqrt{3}+im}{2}$ هو $z_1=m\left(cos\frac{5\pi}{6}+i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$

كتابة العدد $z_2=\frac{-m\sqrt{3}-im}{2}$ على الشكل المثلثي :

لدينا : $z_2=\overline{z_1}=m\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\,sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_2=\frac{-m\sqrt{3}-im}{2}$ هو $z_2=m\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\,sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

2- تعيين قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون : $z_1^6+z_2^6=-128$:

$z_1^6 + z_2^6 = -128$ يكافئ $\left[m\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^6+\left[m\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right]^6=-128$

ومنه $m^6\times(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)+m^6\times(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi))=-128$

وبالتالي $m^6\times(-1+i\times 0)+m^6\times(-1+i\times 0)=-128$

ومنه $-2m^6=-128$ أي $m^6=64$ ومنه $m=2$

$z_1^6 + z_2^6 = -128$ من أجل $m=2$

II. لدينا كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف كما يلي : $P(z)=z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i$

أ) التحقق من أنّ: $P(z)=(z-i)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)$:

لدينا :

$$(z-i)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=z^3+\sqrt{3}z^2+z-iz^2-i\sqrt{3}z-i=z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i=P(z)$$

أي $P(z)=(z-i)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)$

ب) الحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ يكافئ $(z-i)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

إما : $z-i=0$ ومنه $z=i$

أو $z^2+\sqrt{3}z+1=0$ تكافئ $(E_1): z^2+\sqrt{3}z+1=0$ وبالتالي $z_1=\frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ z_2=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

مجموعة حلول المعادلة : $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\ i\right\}$

III. لدينا : النقط B, A و C لواحقها على الترتيب $z_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, z_A=i$

أ) كتابة العدد $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي :

لدينا : $$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{-i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-2i}{\sqrt{3}+i}$$

أي $$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-2i}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{-2i\sqrt{3}-2}{3+1}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

أي $$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

أي $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

إستنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\frac{BC}{BA} = 1 = \left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right| = \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right|$ و

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين

ب)إيجاد لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$:

لدينا : $C' = t_{\overrightarrow{BA}}(C)$ يعني $z_{C'} = z_C + z_{\overrightarrow{BA}}$

ومنه $z_{C'} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0$

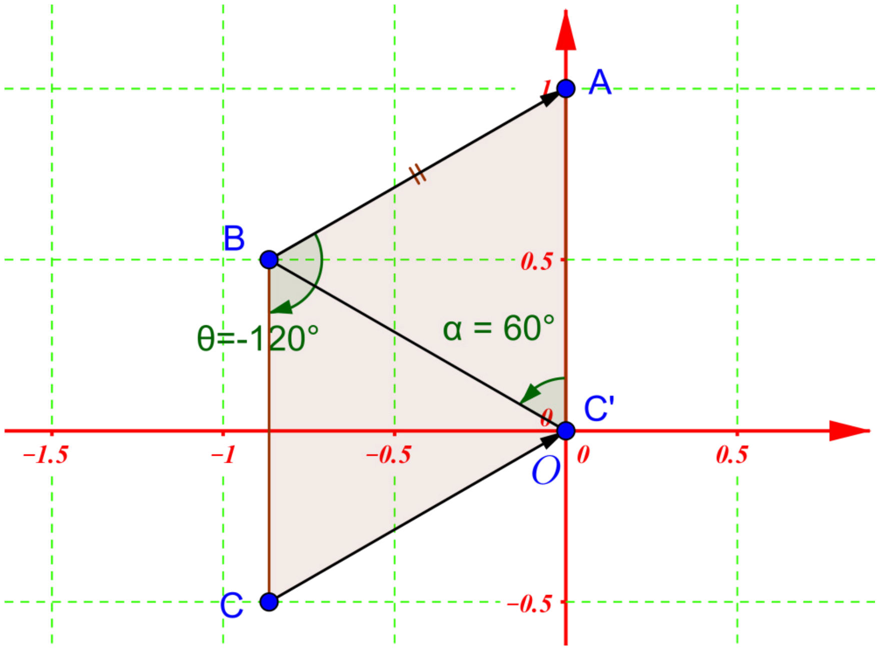
أي $z_{C'} = 0 = z_O$ ومنه $C' = O$

تعيين طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا : $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BA}$ ومنه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

ولدينا : $BA = BC$

ومنه الرباعي $OABC$ معين .



ج) تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه النقطة O و يحول النقطة A إلى النقطة B:

لدينا : $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{5\pi}{6} - i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني يوجد دوران r الذي مركزه النقطة O و يحول النقطة A إلى النقطة B زاويته $\frac{\pi}{3}$

حل التمرين الثالث : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ فإن : $f'(x)=\dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$:

لدينا : $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4-4x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$

أي $f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$

أي $f'(x)=\dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f:

إشارة المشتقة:

$x\in$	0		1		2
x	0	+		+	
$x-1$		-	0	+	
$\underbrace{x^2+x+4}_{\Delta=1^2-4\times4=-15}$		+		+	
$f'(x)$	0	-	0	+	

جدول تغيرات الدالة f :

$x\in$	0		1		2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	2	↘	$\frac{3}{2}$	↗	2

3) تبيان أنه من أجل كل x من المجال $[0;2]$ فإن : $f(x)\in[0;2]$:

من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل $x\in[0;2]$ فإنّ : $\frac{3}{2}\le f(x)\le 2$ و $0\le\frac{3}{2}$ (خاصية التعدي)

ومنه $0\le f(x)\le 2$ أي $f(x)\in[0;2]$

وبالتالي من أجل كل x من المجال $[0;2]$ فإن : $f(x)\in[0;2]$

4) لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنَ : $0\le u_n\le 2$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1. من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=1$ ومنه $0\le u_0\le 2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2. نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ $0\le u_n\le 2$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ
$0\le u_{n+1}\le 2$

لدينا : $0\le u_n\le 2$ ومنه $\frac{3}{2}\le f(u_n)\le 2$ (لأنه من أجل $x\in[0;2]$ فإنَ : $\frac{3}{2}\le f(x)\le 2$)

ومنه $0\le f(u_n)\le 2$

أي $0\le u_{n+1}\le 2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنَ : $0\le u_n\le 2$

ب) دراسة رتابة المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-u_n=\frac{u_n^3+2-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}=\frac{2-u_n}{u_n^2+1}$

أي $u_{n+1}-u_n=\frac{2-u_n}{u_n^2+1}$ إشارة الفرق من إشارة $2-u_n$ لأنَ: $u_n^2+1>0$

$u_n\in$	0 2
$2-u_n$	+ 0
$u_{n+1}-u_n$	+ 0

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على المجموعة $\mathbb{N}$

ج) إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم تعيين نهايتها:

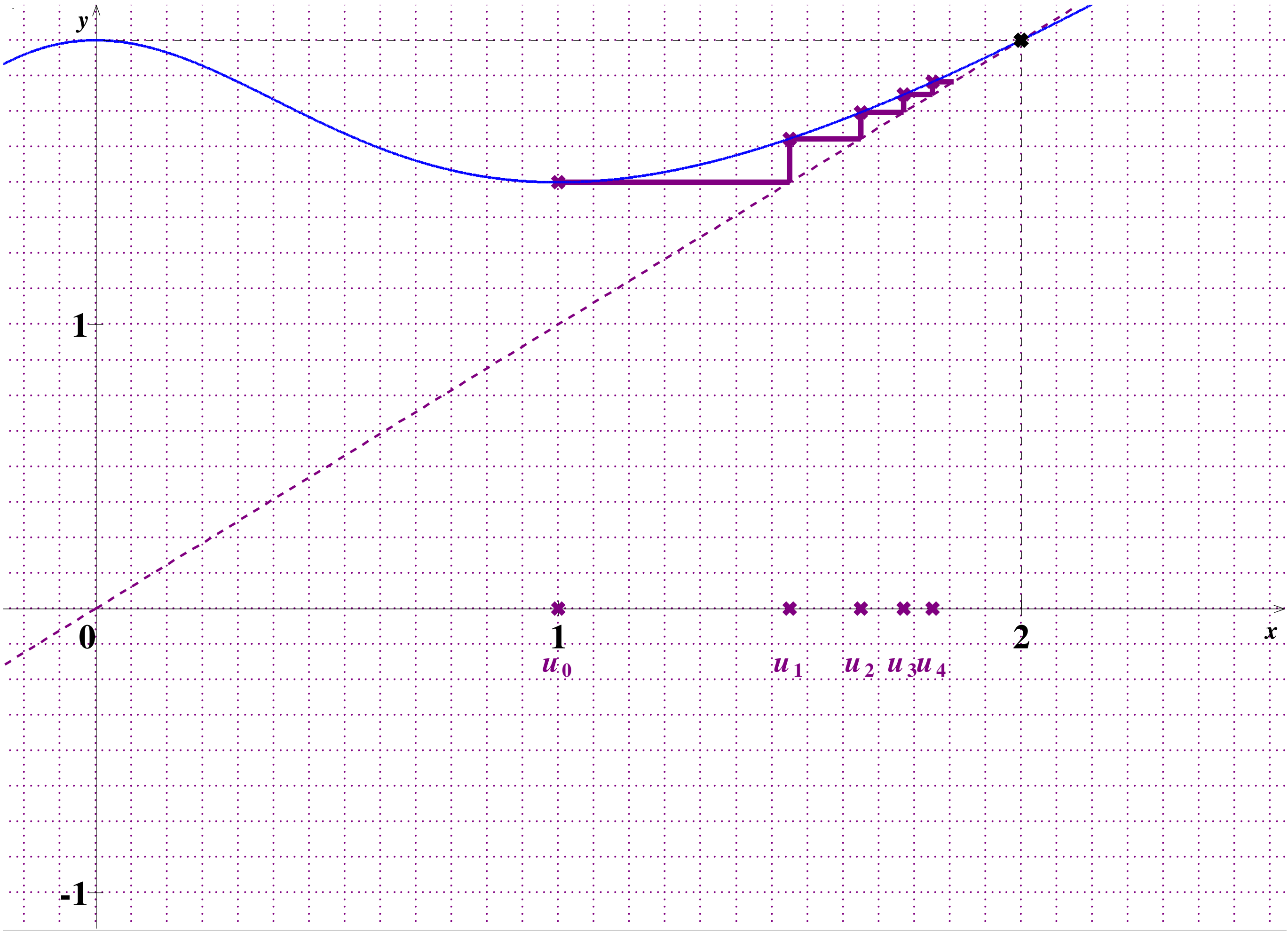
بما أنَ المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 وهي متزايدة فهي إذن متقاربة .

حساب نهايتها :

نضع : $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ ومنه $l=\frac{l^3+2}{l^2+1}$ أي $l^3+l=l^3+2$

ومنه $l=2$.

إذن المتتالية (u_n) تتقارب من العدد 2 أي $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$



حل التمرين الرابع : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2x}{1+x}-ln(1+x)$

1) أ) **حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا :**

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left[\frac{2x}{1+x}-ln(1+x)\right]=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(\frac{2x-ln(1+x)}{1+x}\right)=+\infty$

لأنَ
$$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(2x-ln(1+x))=+\infty$$
$$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(1+x)=0^+$$

التفسير الهندسي :

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f)

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{1+x}-ln(1+x)\right)=-\infty$ لأنَ
$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{1+x}\right)=2$$
$$\lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+x)=+\infty$$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

حساب المشتقة :

لدينا : $f'(x)=\dfrac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2+2x-2x-1-x}{(1+x)^2}=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

من أجل $x\in]-1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

جدول تغيرات الدالة f :

إشارة المشتقة من إشارة البسط $(1-x)$ لأن $(1+x)^2>0$

$x\in$	-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖		+		0		-		
$f(x)$	‖	$-\infty$	0	↗	2-ln(2)	↘	0	↘	$-\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة المماس (T) من الشكل : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=1\times(x-0)+0=x$

معادلة المماس (T) : $y=x$

4) أ) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوما والآخر α حيث $3.9<\alpha<4$:

لدينا : $f(0)=\dfrac{2(0)}{1+0}-ln(1+0)=0$.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[3.9;4]$ ولدينا :

$f(3.9)=\dfrac{2(3.9)}{1+3.9}-ln(1+3.9)=0.002$

$f(4)=\dfrac{2(4)}{1+4}-ln(1+4)=-0.009$

أي $f(3.9)\times f(4)<0$ حسب مبرهنة لقيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.9<\alpha<4$.

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوما والآخر α حيث $3.9<\alpha<4$

ب) تبيان أنّ $ln(1+\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$:

لدينا : $f(\alpha)=0$ يعني $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}-ln(1+\alpha)=0$

ومنه $ln(1+\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$

إذن $ln(1+\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$

ج) تعيين إشارة $f(x)$ على المجال $[0;\alpha]$:

من أجل $x\in[0;\alpha]$ فإنّ $f(x)\in[0;2-ln2]$

ومنه $f(x)\geq 0$

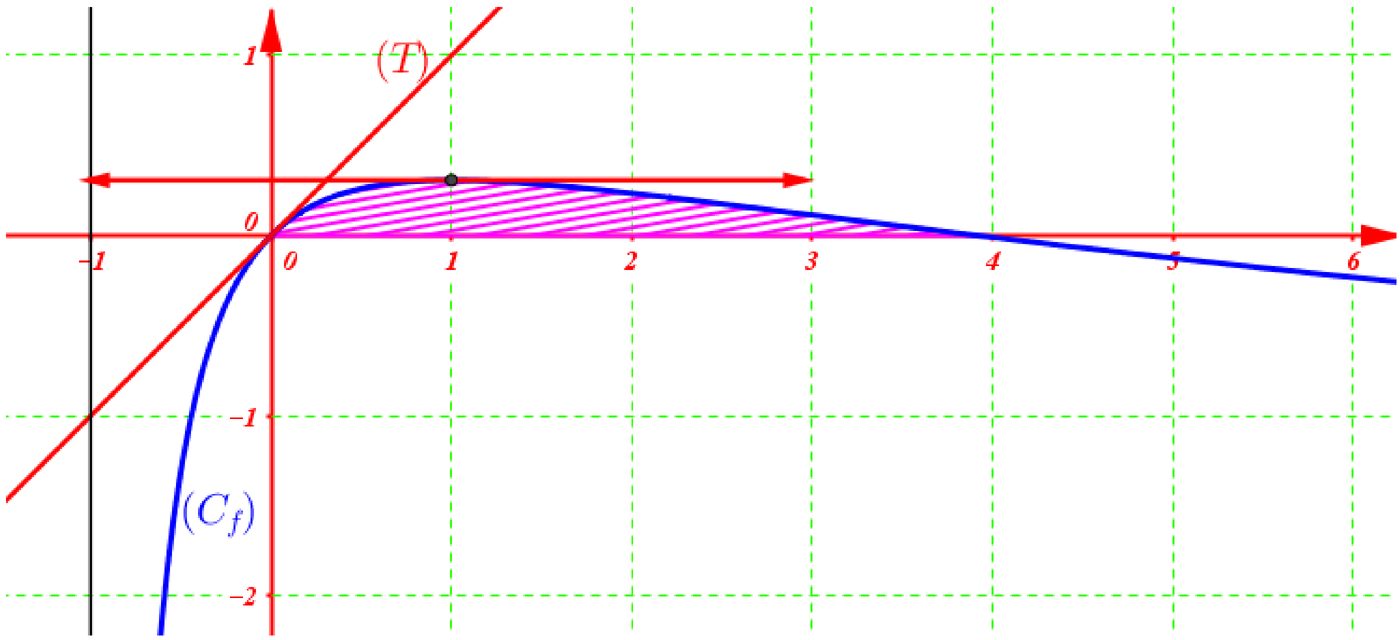
على المجال $[0;\alpha]$ إشارة $f(x)$ موجبة

5) أحسب $f(5)$ ثمّ أرسم (T) و (C_f).

حساب $f(5)$:

$$f(5)=\frac{2(5)}{1+5}-ln(1+5)=-0.13$$

الرسم :



6) F الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يلي : $F(x)=(-x-3)ln(1+x)+3x$.

أ) تبيان أنّ الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

من أجل $x\in]-1;+\infty[$ لدينا :

$$F'(x)=-ln(1+x)+(-x-3)\times\frac{1}{1+x}+3=\frac{-x-3+3+3x}{1+x}-ln(1+x)$$

ومنه $F'(x)=\frac{2x}{1+x}-ln(1+x)=f(x)$

الدالة F حيث: $F(x)=(-x-3)ln(1+x)+3x$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

ب)لدينا $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذي المعادلتين $x=0$ و $x=\alpha$.

تبيان أنّ $A(\alpha)=\left(\frac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)cm^2$:

لديناا f مستمرة وموجبة على المجال $[0;\alpha]$ ومنه :

أي $A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^{\alpha}$ $\quad A(\alpha)=F(\alpha)-F(0)=(-\alpha-3)\ln(1+\alpha)+3\alpha$

إذن : $A(\alpha)=(-\alpha-3)\times\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}+3\alpha=\dfrac{-2\alpha^2-6\alpha+3\alpha+3\alpha^2}{1+\alpha}=\left(\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)us$

أي $A(\alpha)=\left(\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)cm^2$

تعيين حصرا لـ $A(\alpha)$:

لدينا : $3.9<\alpha<4$ ومنه $(3.9)^2<\alpha^2<4^2$ و $-3\times 4<-3\alpha<-3\times 3.9$

أي $15.21-12<\alpha^2-3\alpha<16-11.7$

ومنه $3.21<\alpha^2-3\alpha<4.30$

ولدينا : $4.9<1+\alpha<5$

وبالتالي : $\dfrac{3.21}{5}\leq\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\leq\dfrac{4.3}{4.9}$

أي $0.642cm^2\leq A(\alpha)\leq 0.878cm^2$

❀إنتهى تصحيح الموضوع الثامن لا تنسونا بخالص الدعاء لوالدي ولأهلي ولي

❀❀الأستاذ ثابت إبراهيم ❀ ❀