تمرين في الأعداد المركبة

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ وحدة الطول $2cm$.

لتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A = i$ و النقطة B ذات اللاحقة $z_B = 2$.

1- أ) عين z_{B_1} لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه النقطة A ونسبته $\sqrt{2}$.

ب) عين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ج) علم النقط B, A وB' .

2- ليكن f التحويل النقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z من المستوي النقطة M' ذات اللاحقة z' من المستوي بحيث يكون : $z' = (1+i)z + 1$.

أ) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل f.

ب) عين طبيعة التحويل f وعناصره الهندسية .

ج) عين صورة النقطة B بالتحويل f.

3- لتكن (C) الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

- عين صورة الدائرة (C) بالتحويل f .

حل التمرين التدريبي رقم 02

لدينا : $z_A = i$ و $z_B = 2$

1) أ) تعيين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه النقطة A ونسبته $\sqrt{2}$:

لدينا : $h(B) = B_1$ معناه $\overrightarrow{AB_1} = k\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AB_1} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$ لان $k = \sqrt{2}$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB_1}$ هي $z_{\overrightarrow{AB_1}} = z_{B_1} - z_A = z_{B_1} - i$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 - i$

إذن : $\overrightarrow{AB_1} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$ يكافئ $z_{B_1} - i = \sqrt{2}(2 - i)$

ومنه $z_{B_1} = \sqrt{2}(2-i) + i = 2\sqrt{2} + i - \sqrt{2}i$

أي $z_{B_1} = 2\sqrt{2} + i - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2} + \left(1 - \sqrt{2}\right)i$

لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه النقطة A ونسبته $\sqrt{2}$ هي

$$z_{B_1} = 2\sqrt{2} + \left(1 - \sqrt{2}\right)i$$

ب) تعيين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$:

لدينا : $r(B_1) = B'$ أي $z_{B'} - z_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z_{B_1} - z_A\right)$

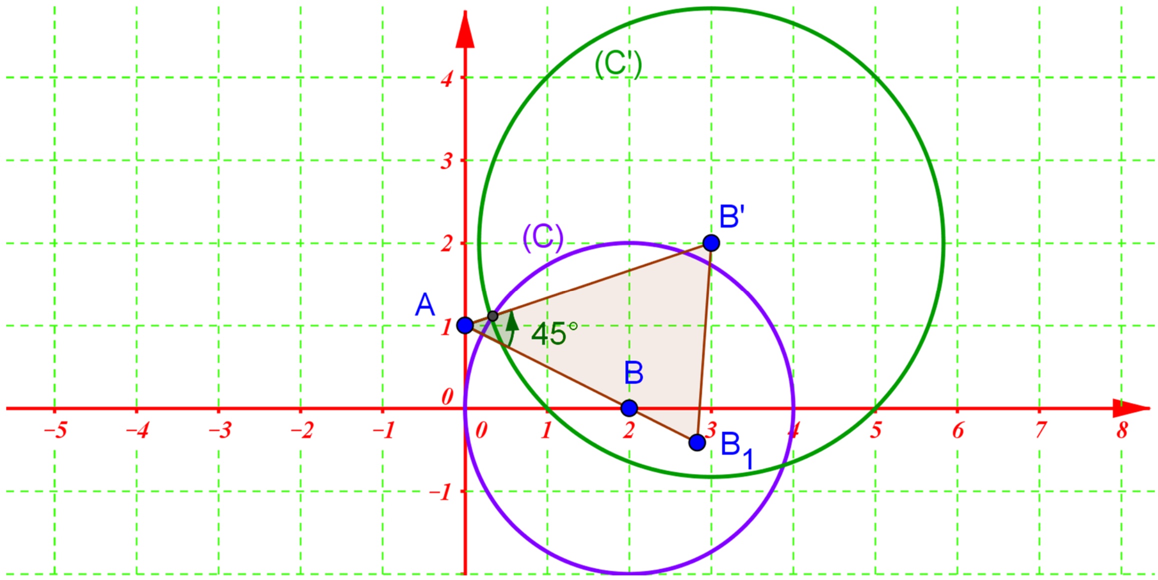
ومنه : $z_{B'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z_{B_1} - z_A\right) + z_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2} + i - \sqrt{2}i - i\right)$

ومنه : $z_{B'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = 2 + 2i - i + 1 = 3 + i$

لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$

هي $z_{B'} = 3 + i$

ج) تعليم النقط A, B و B':



2) أ- تعيين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل f:

M نقطة صامدة بالتحويل f معناه $f(M)=M$ أي $z=(1+i)z+1$

ومنه $z-(1+i)z=1$ يكافئ $-iz=1$

إذن : $z=\frac{1}{-i}=i$ أي $z=i$

إذن توجد نقطة صامدة وحيدة بالتحويل f وهي النقطة A ذات اللاحقة $z_A=i$.

ب) تعيين طبيعة التحويل f:

لدينا : $z'=(1+i)z+1$ إذن التحويل f من الشكل : $z'=az+b$ حيث $a=1+i$ و $b=1$

لدينا : $|a|=|1+i|=\sqrt{2}$ ومنه التحويل f تشابه مستوي مباشر نسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته

$\theta=Arg(a)=Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

ومركزه النقطة الصامدة A بالتحويل f .

إذن : $f=S_{\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4};A\right)}$

ج) تعيين صورة النقطة B بالتحويل f:

$z'_{B_2}=(1+i)\times 2+1=3+2i$ اذن صورة النقطة B بالتحويل f هي النقطة B_2 ذات اللاحقة

$z_{B_2}=3+2i$

أي صورة النقطة B بالتحويل f هي النقطة $B'(3+2i)$

3) تعيين صورة الدائرة (C) بالتحويل f:

لدينا : معادلة (C) هي : $(x-2)^2+y^2-4=0$ يعني $(x-2)^2+y^2=2^2$

أي أن الدائرة (C) مركزها النقطة $B(2;0)$ ونصف قطرها $R=2$

صورة الدائرة (C) بالتشابه f هي الدائرة (C') التي مركزها النقطة $B'(3;2)$ صورة النقطة $B(2;0)$ بالتشابه f

ونصف قطرها $R'=\sqrt{2}R=2\sqrt{2}$ لأنّ $\frac{R'}{R}=\sqrt{2}$.

✌ مع تمنياتي الخالصة بالتوفيق والنجاح BAC 2017 ❀ ❀ الأستاذ ثابت إبراهيم