



التدريبات الأخيرة لباك 2017



تمرين في الحساب

- 1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد $407,111$ و 2405 .
- 2) لتكن (E) مجموعة الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة : $407x + 111y = 2405 \dots (1)$.
 - أ) جد الثنائية $(x_0; y_0)$ من (E) بحيث يكون : $2x_0^2 - 3y_0 = 11$.
 - ب) حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1).
 - ج) عين الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ من (E) والتي تحقق : $(x > -5$ و $y > -5)$.
 - د) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y ؟
- 3) عين الثنائيات الطبيعية $(a; b)$ من المجموعة (E) الأولية فيما بينها بحيث يكون : $11d + 3m = 65$
حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$



حل التمرين التدريبي رقم 04

(1) إيجاد $PGCD(2405; 407; 111)$:

حساب $PGCD(407; 111)$

$$407 = 111 \times 3 + 74$$

$$111 = 74 \times 1 + 37 \quad \text{لدينا}$$

$$74 = 37 \times 2 + 0$$

$$PGCD(407; 111) = 37 \quad \text{ومنه}$$

$$PGCD(2405; 407; 111) = PGCD(2405; 37) \quad \text{إذن}$$

حساب $PGCD(2405; 37)$

$$2405 = 37 \times 65 + 0 \quad \text{لدينا}$$

$$PGCD(2405; 37) = 37 \quad \text{ومنه}$$

$$PGCD(2405; 407; 111) = 37 \quad \text{وبالتالي}$$

(2) لتكن (E) مجموعة الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة : $407x + 111y = 2405 \dots (1)$.

(أ) تعيين جد الثنائية $(x_0; y_0)$ من (E) بحيث يكون : $2x_0^2 - 3y_0 = 11$:

$$\text{لدينا : } 407x_0 + 111y_0 = 2405 \quad \text{لأن } (x_0; y_0) \text{ من } (E)$$

$$\text{بالقسمة على } 37 \text{ نجد : } 11x_0 + 3y_0 = 65 \quad \text{ومنه } 3y_0 = 65 - 11x_0$$

$$\text{إذن : } 2x_0^2 - \left(\frac{65 - 11x_0}{3y_0} \right) = 11 \quad \text{ومنه } 2x_0^2 + 11x_0 - 76 = 0$$

$$\text{حل المعادلة : } 2x_0^2 + 11x_0 - 76 = 0$$

$$\text{حساب المميز : } \Delta = (11)^2 - 4 \times 2 \times (-76) = 729$$

$$\text{ومنه المعادلة تقبل حلين هما : } x'_0 = \frac{-11 - 27}{4} = \frac{-38}{4} = -\frac{19}{2} \quad \left(-\frac{19}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ مرفوض لأن } \right)$$

$$x''_0 = \frac{-11 + 27}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad \left(4 \in \mathbb{Z} \text{ مقبول لأن } \right)$$

$$\text{إذن من أجل } x_0 = 4 \quad \text{نجد : } 3y_0 = 65 - 11 \times 4 = 21$$

$$\text{ومنه } y_0 = 7 \quad \text{أي } 3y_0 = 65 - 11 \times 4 = 21$$

$$\text{إذن الثنائية } (x_0; y_0) = (4; 7) \text{ حل خاص للمعادلة (1)}$$

ب) الحل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1):

$$(1) \text{ تكافئ } 11x + 3y = 65$$

$$\text{ومنه } 11x - 11 \times 4 = 3 \times 7 - 3y$$

$$\text{تكافئ } 11x + 3y = 11 \times 4 + 3 \times 7$$

$$\text{أي } 11(x-4) = 3(7-y) \dots (*)$$

لدينا : $3 / 11(x-4)$ و 3 أولي مع 11 إذن $3 / (x-4)$ (حسب مبرهنة غوص)

$$3 / (x-4) \text{ معناه } x-4 = 3k \text{ ومنه } x = 3k + 4 \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

من أجل $x = 3k + 4$ بالتعويض في المعادلة (*) نجد :

$$11(3k + 4 - 4) = 3(7 - y) \quad \text{أي } 11k = 7 - y$$

$$\text{ومنه } y = 7 - 11k$$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $(E) = \{(3k + 4; 7 - 11k), k \in \mathbb{Z}\}$

ج) تعيين الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ من (E) والتي تحقق : $(x > -5 \text{ و } y > -5)$:

$$\begin{cases} 3k > -9 \\ -11k > -12 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 3k + 4 > -5 \\ 7 - 11k > -5 \end{cases} \begin{cases} 3k > -9 \\ -11k > -12 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x > -5 \\ y > -5 \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} k > -3 \\ k < \frac{12}{11} \end{cases} \text{ أي } k \in \{-2; -1; 0; 1\}$$

$$\begin{cases} x = 3(-1) + 4 = 1 \\ y = 7 - 11(-1) = 18 \end{cases} \text{ من أجل } k = -1 \text{ نجد :}$$

$$\begin{cases} x = 3(-2) + 4 = -2 \\ y = 7 - 11(-2) = 29 \end{cases} \text{ من أجل } k = -2 \text{ نجد :}$$

$$\begin{cases} x = 3 \times 1 + 4 = 7 \\ y = 7 - 11 \times 1 = -4 \end{cases} \text{ من أجل } k = 1 \text{ نجد :}$$

$$\begin{cases} x = 3 \times 0 + 4 = 4 \\ y = 7 - 11 \times 0 = 7 \end{cases} \text{ من أجل } k = 0 \text{ نجد :}$$

إذن الثنائيات التي تحقق $(x > -5 \text{ و } y > -5)$ هي : $S_{(x,y)} = \{(-2; 29), (1; 18), (4; 7), (7; -4)\}$

ج) القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y :

$$\text{ليكن } d = \text{PGCD}(x; y)$$

لدينا : d / x و d / y ومنه $d / (11x + 3y)$ أي $d / 65$

$$\text{لأن } 65 = 5 \times 13$$

$$\text{ومنه } d \in D_{65} = \{1; 5; 13; 65\}$$

(3) تعيين الثنائيات الطبيعية $(a;b)$ من المجموعة (E) الأولية فيما بينها بحيث يكون :

$$11d + 3m = 65$$



a أولي مع b معناه $d = 1$ ومنه $11 \times 1 + 3ab = 65$ لأن $m = \frac{ab}{d} = ab$

أي $3ab = 54$ ومنه $ab = 18$

حيث a أولي مع b وكذلك الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة $407x + 111y = 2405 \dots (1)$

إذن توجد ثنائية وحيدة تنتمي إلى (E) وهي الثنائية $(1;18)$ تحقق المساواة

لأن $18 = 1 \times 18 = 2 \times 9$ الثنائية $(2;9) \notin (E)$

بالتوفيق والنجاح  في البكالوريا 2017 

الأستاذ ثابت إبراهيم