مذكرة رقم:9

تحضير مذكرة تعليمية

السنة الدراسية	Yousfi Math	اعداد الاستاذ
2014/2013	Yousfisifou804@yahoo.fr	يوسفي عبد الرحمن

المحور التاسع: الجداء السلمي

المستوى : الثانية رياضيات

الموضوع : الجداء السلمي Prod Scalaire

الكفاءة المستهدفة

- حساب الجداء السلمي لشعاعين.
- إثبات علاقات تتعلق بالتعامد.
- كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه.
- تعيين معادلة دائرة.
- حساب مسافات و أقياس زوايا.

المكتسبات القبلية

- الجداء السلمي للشعاعين
- الأشعة في المستوي
- نظرية فيثاغورس وطاليس

مخطط الدرس	التوقيت
نشاط :	
1: الجداء السلمي لشعاعين ـ تعريف وخواص ـ: العبارة التحليلية للجداء السلمي	
2: التعامد والجداء السلمي	
3: تطبيقات الجداء السلمي	
4: حساب اطوال ومسافات	
5:المسافة بين نقطة ومستقيم	
6:البحث عن مجموعة نقط	
7:دساتير الجمع	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج + التوزيع السنوي 2 ريا • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو • مسطرة	

المؤسســـــــة:	ثانوية رقان الجديدة	المستـــــــوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميــدان التعلم:	هندسة
التاريــــــخ:	24 فيفري 2014	الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوي
توقيت الحصة :	1 سا (من 09 إلى 10)	موضوع الحصة :	الجداء السلمي

الكفاءات القاعديـــــة : حساب الجداء السلّمي لشعاعين . استعمال خواص الجداء السلمي لإثبات علاقات تتعلق بالتعامد.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط مقترح

نعتبر مثلثا كيفيا ABC و لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB). نعتبر. $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

1. انشئ الشكل
2. بين ان $AC^2=HA^2+HC^2$
3. استنتج ان $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$
4. اكتب HB بدلالة HA و AB
5: بين ان $w=AB\times AH$ $=AB\times AC\cos BAC$

ملاحظة

في حال ضيق الوقت يستحسن استعمال هذا النشاط

نــــــشاط 01 ص 280 من الكتاب

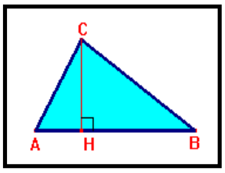
من مميزات المثلثات القائمة "" مبرهنة فيثاغورس الشهيرة ""

ABC مثلث قائم في النقطة A يعني $AB^2+AC^2=BC^2$

لدينا $AB^2+AC^2=BC^2$ يعني $AB^2+AC^2-BC^2=0$ نهتم بصفة خاصة بالعدد w : $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

من الواضح أنه إذا كان ABC مثلثا قائما يكون $w=0$. نتساءل إذن عن قيمة العدد w إذا لم يكن المثلث ABC قائما.

من أجل ذلك نعتبر مثلثا كيفيا ABC و لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB). نميز ثلاث حالات



1. بين أن: $BC^2=HB^2+HC^2$ و أن: $AC^2=HA^2+HC^2$ ثم استنتج أن: $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$

• الوضعية1: بكتابة $HB=AB-HA$ بين أن: $w=AB\times AH=AB\times AC\cos BAC$

2. بفرض $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ بين أن: $w=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$

3. نذكر أنه إذا كان $(O;I,J)$ معلما متعامدا و متجانسا للمستوي و كان $\vec{u}(x,y)$ شعاعا من المستوي فإن: $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$ بفرض $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ بين أن: $w=xx'+yy'$

حل النــــــشاط

.1 اثبات أن: $BC^2=HB^2+HC^2$ لدينا HCB مثلث قائم في H ومنه $BC^2=HB^2+HC^2$

$AC^2=HA^2+HC^2$ لدي HAC مثلث قائم في H ومنه $AC^2=HA^2+HC^2$

لدينا $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ معطى ومنه $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2+HC^2-HB^2-HC^2\right)$

. $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$ وهو المطلوب.

الوضعية1: $w=AB\times AH$ بكتابة $HB=AB-HA$

$w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$ ومنه $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-(AB-HA)^2\right)=\frac{1}{2}(2AB.HA)$

أي $w=AB\times AH$

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساواتات:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=$ $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$ $=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

يمكن البرهان مباشرة وفق فيثاغورث

$w = AB \times AC \cos BAC$

نعلم أن $w = AB \times AH$ ومنه $\cos CAH = mjaor / water$ أي $\cos CAH = AH / AC$

أي $AH = AC \cos \widehat{A}$ وبالتالي $AB \times AH = AB \times AC \cos BAC$

أي أن: $w = AB \times AH = AB \times AC \cos BAC$

.2 $w = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

نعلم ان $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ وفق شال $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ أي $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

نعلم ان $\left(-\overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2$ ومنه $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2$ وبما ان

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = AC^2$ و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$ اخيرا

$w = \frac{1}{2}\left(\| AB \|^2 + \| AC \|^2 - \| AB - AC \|^2\right)$ وبفرض $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

فأن: $w = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

.3 $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ بفرض $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ لدينا

$w = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ ومنه

أي $w = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\right)^2\right)$

ومنه $w = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - \left((x - x')^2 + (y - y')^2\right)\right)$

ومنه $w = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - \left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' + -2yy'\right)\right)$

$w = xx' + yy'$

يسمى العدد w الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساواتات:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع " $\overrightarrow{AB}$ ".

تدرج العلاقات المتربة المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

1/ الجداء السلمي

1.1 الجداء السلمي لشعاعين

تعريف: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين من المستوي الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف كما يلي :

- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

حالات خاصة:

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$
- نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بِ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و هكذا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ و

بصفة خاصة إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبرهنة

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

البرهان:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين . نضع $(\vec{u},\vec{v})=\theta$

لدينا $(\vec{u},-\vec{v})=\pi+\theta$ وفق خواص علاقة شال للزوايا الموجهة

نعلم ان : $\vec{u}.(-\vec{v})=-(\vec{u}.\vec{v})=(-\vec{u}).\vec{v}$.

ومنه $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2.1 العبارة التحليلية للجداء السلــمي

مبرهنة

إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x',y') فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

البرهان:

إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا و متجانسا و كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ شعاعين فإن:

$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$ و $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2$

بعد التعويض في $[\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')]$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ نجد :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(x^4+y^4+2x^2y^2+x'^4+y'^4+2x'^2y'^2-\left((x-x')^2+(y-y')^2\right)^2\right)$$

و بعد إجراء حسابات بسيطة نجد: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

تمرين منزلي

رقم 48 ص 300 مهم من اجل البرهان على المبرهنة

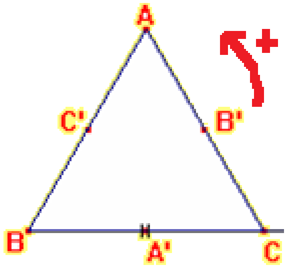
مثال تطبيقي 1:

ABC مثلث متساوي

الأضلاع حيث $AB = AC = BC = 3$ و لتكن النقط A'، B' و C' منتصفات

$[BC]$،$[AC]$ و $[AB]$ على التوالي.

أحسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AB}$



الحل:

لنحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos CAB = 3 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$$

لنحسب $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$:

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ و منه

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = CD \times CA \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

لنحسب $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AB}$:

نعلم أن $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا و منحاهما

متعاكسين و بالتالي فإن: $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AB} = -A'B' \times AB = -\frac{3}{2} \times 3 = -\frac{9}{2}$.

مثال تطبيقي 2 :

في المستوى المنسوب الى المعلم م.م. $(0, \vec{I}, \vec{J})$

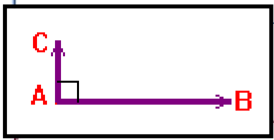
نضع $A(0,3)$ و $B(-2,-1)$ و $C(2,-1)$ عين $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$.

الحل: لدينا $\overrightarrow{AC}(2;-4)$ و منه $\overrightarrow{CA}(-2;4)$ و $\overrightarrow{AB}(-2;-4)$ و $\overrightarrow{BC}(4;0)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 16 = 12$$
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -8 + 0 = -8$$

3.1 الأشعة المتعامدة

تعريف: يكون الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$
متعامدان اذا وفقط اذا كان: المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.



ملاحظة نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

البرهان:

إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ يعني $\cos(\vec{u},\vec{v})=0$

أي $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ او $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

حيث k عدد صحيح و هذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

مثال:

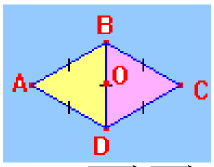
ABC مثلث في المستوي

لدينا الأضلاع حيث $AB=3$ و $AC=4$

أحسب الجداء السلمي الآتي: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$، علما ان $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{41\pi}{2}$ ماذا تستنتج؟

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$

واجب منزلي 27 ص 299 ABD و BCD مثلثان متقايسا الأضلاع



حيث $BD=4$. احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

الحل: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-8$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=8$ و $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}=4$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}=-16$

واجب منزلي 33 ص 299 ABC مثلث حيث $AB=2$ و $AC=3$

و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$.

4.1: خواص الجداء السلمي

مبرهنة

من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$$(1)\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} \quad (2)\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$(3)\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} \quad (4)\ (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) \quad (5)\ \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

البرهان: نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}(x,y)$، $\vec{v}(x',y')$ و $\vec{w}(x'',y'')$

1. لدينا $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=x'x+y'y\end{cases}$ و بما أن $xx'=x'x$ و $yy'=y'y$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2. إحداثيات الشعاع $\vec{v}+\vec{w}$ هي $(x'+x'',y'+y'')$. لدينا إذن:

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+xx''+yy'+yy''\\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+xx''+yy''=xx'+xx''+yy'+yy''\end{cases}$$ و منه

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

3. إحداثيات الشعاع $\lambda\vec{u}$ هي $(\lambda x,\lambda y)$. لدينا إذن:

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=(\lambda x)x'+(\lambda y)y'=\lambda(xx'+yy')=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

◄ ملاحظة: يتم، بإتباع نفس الطريقة، البرهان على الخاصيتين (3) و (5).

أمثلة:

- $2\vec{u}\cdot\left(-3\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}\right)=(2\vec{u})\cdot(-3\vec{v})+(2\vec{u})\left(\frac{1}{2}\vec{w}\right)=-6\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+3\vec{v})=2\vec{u}^2+6\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-3\vec{v}^2=2\vec{u}^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^2$

تطبيق A، B و C ثلاث نقط. بين أنه من أجل كل نقطة M:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

استنتج أن ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة H.

الحل 1. نضع: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}$ و منه:

$$\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

و بما أن: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$، $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

و $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ فإن $\alpha=0$

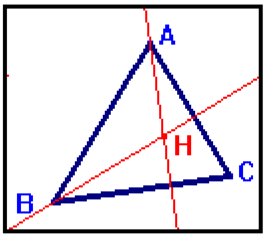
1. إذا كان ABC مثلثا فإن (مثلا) ارتفاعيه اللذين يشملان A و B متقاطعان في نقطة H لأنهما عموديان على مستقيمين متقاطعين. لنبين أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.

لدينا حسب السؤال1 و بأخذ $M=H$: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

و بما أن $(AH)\perp(BC)$ و $(BH)\perp(AC)$ فإن $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

و منه: $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و هذا يعني أن $(CH)\perp(AB)$

نستنتج هكذا أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.



تمرين منزلي 33 ص 299

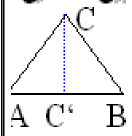
المؤسسة:	ثانوية رقان الجديدة	المستوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميدان التعلم:	هندسة
التاريخ:		الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوي
توقيت الحصة :	1 سا (من 09 الى 10)	موضوع الحصة :	تطبيقات الجداء السلمي –التعامد-

الكفاءات القاعدية : حساب الجداء السلّمي لشعاعين . استعمال خواص الجداء السلمي لإثبات علاقات تتعلق بالتعامد.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط مقترح

نشاط1: في الشكل التالي قارن بين العددين $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ ، $\vec{AB}\cdot\vec{AC'}$.



نشاط2: المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس و (Δ) مستقيم يشمل $A(2,-1)$ ، و $\vec{n}\binom{2}{1}$ شعاع عمودي على (Δ) ، و $N(x,y)$ نقطة من (Δ) .

1/ماذا يحقق $\overline{AN}$ و $\vec{n}$ ؟

2/ استنتج معادلة لـ (Δ) .

2/الجداء السلمي والاسقاط العمودي

1.2 المسقط العمودي لشعاع على محور او شعاع

تعريف: $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على محور $(O;\vec{u})$.يسمى الشعاع $\vec{v}'$ ، المعرف بِ $\vec{v}'=\overrightarrow{C'D'}$ ، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O;\vec{u})$ (أو على الشعاع $\vec{u}$)

2.2 الجداء السلمي و المسقط العمودي لشعاع

مبرهنة

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$

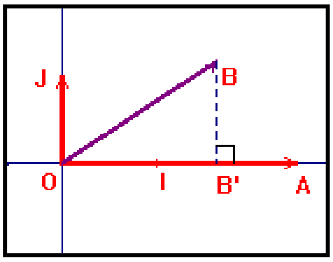
البرهان: نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بحيث يكون الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطيا و يكون لهما نفس الاتجاه.

نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ ولتكن B' المسقط العمودي لِ B على (OA).

إذن $\vec{v}'=\overrightarrow{OB'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ على الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$

لدينا هكذا: $O(0,0)$ ، $A(x_A,0)$ ، $B(x_B,y_B)$ و $B'(x_B,0)$ و منه

$\overrightarrow{OA}(x_A,0)$ ، $\overrightarrow{OB}(x_B,y_B)$ و $\overrightarrow{OB'}(x_B,0)$



لدينا: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+0\times y_B=x_Ax_B\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=x_Ax_B+0\times 0=x_Ax_B\end{cases}$ و منه

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$ أي: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$

نتيجة: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين و كانتا C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

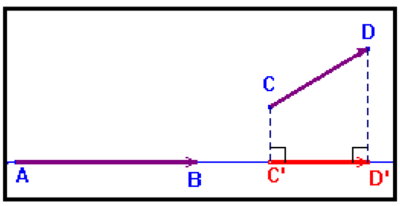
حالات خاصة:

- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و من نفس الاتجاه يكون:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\times CD$$

- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين يكون:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB\times CD$$



تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

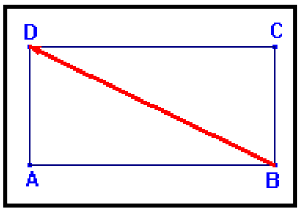
تبرز المساويات:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$."

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

مثال: إذا كان $ABCD$ مستطيلا حيث $AB=5$ و $CB=3$ فإن:



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-25$

لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{BA}$

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=3$

لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو $\overrightarrow{BC}$

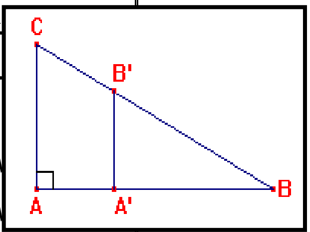
تطبيق: ABC مثلث قائم في A . A' نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$. المستقيم المار من A' و الموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (BC) في النقطة B' . قارن بين العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$.

الحـل:

المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ و منه

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}=AB\times AA'$$

لأن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ نفس الاتجاه.



المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{A'C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{A'A}$ و منه

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}=-AB\times AA'$$

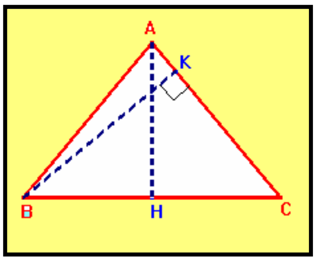
لأن اتجاه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$ متعاكسان أي

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$$

تطبيق ABC مثلث متساوي الساقين حيث $AB=AC=4$ و $BC=5$. و لتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. لتكن K المسقط العمودي للنقطة B على (AC). أحسب المسافة CK.



الحـل:

1. • بما أن المسقط العمودي لِ $\overrightarrow{CA}$ على $\overrightarrow{CB}$ هو $\overrightarrow{CH}$ فإن:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}=CH\times CB=\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{2}$$

• بما أن $(HA)\perp(CB)$ فإن: $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

• بما أن المسقط العمودي لِ $\overrightarrow{AB}$ على $\overrightarrow{CB}$ هو $\overrightarrow{HB}$ فإن:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=-HB\times BC=-\frac{5}{2}\times5=-\frac{25}{2}$$

2. بما أن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{CB}$ على $\overrightarrow{CA}$ هو $\overrightarrow{CK}$ فإن: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CK}$

لدينا من جهة ثانية حسب السؤال1 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{25}{2}$

لدينا هكذا: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CK}=\dfrac{25}{2}$ أي $CA\times CK=\dfrac{25}{2}$ و علما أن $CA=4$

نجد في الأخير: $CK=\dfrac{25}{8}$

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساويات:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=$
$\overrightarrow{AB}^2=AB^2$
$=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$."

... المترية ... برهنة ... ، M ... التي (M ...

نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

المؤسســــــــة:	ثانوية رقان الجديدة	المستــــــوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميــدان التعلم:	هندسة
التاريـــــــخ:		الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوى
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	تطبيقات الجداء السلمي

الكفاءات القاعديــــــة : كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له ونقطة منه، باستعمال الجداء السلّمي.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سيــــر الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط مقترح

3/تطبيقات الجداء السلمي

1.3 الشعاع الناظمي لمستقيم

تذكير : في معلم كيفي كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax+by+c=0$

حيث $(a,b)\neq(0,0)$ شعاع توجيهه $\vec{\mu}(-b,a)$ ، و كل معادلة من الشكل $ax+by+c=0$

حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ هي معادلة لمستقيم شعاع توجيهه $\vec{\mu}(-b,a)$.

تعريف القول أن الشعاع غير معدوم $\vec{v}$ ناظمي لمستقيم (Δ) يعني أن $\vec{v}$ عمودي على شعاع توجيه (Δ).

2.3 معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس تكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{v}(a,b)$ شعاع ناظمي له ، معادلة من الشكل : $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

البرهان:

$(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس $\vec{n}(a,b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوى

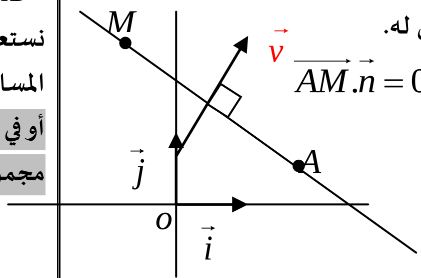
و ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له.

إذن (Δ) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

حيث $\vec{v}(a,b),\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$

معناه $\overrightarrow{AM}.\vec{v}=0$ و منه $ax+by-ax_0-by_0=0$

بوضع : $c=-ax_0-by_0$ نحصل على $ax+by+c=0$



ملاحظة : إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة لمستقيم (Δ) فإن : $\vec{\mu}(-b,a)$ شعاع توجيه

(Δ) و منه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ ناظمي للمستقيم (Δ) لأن $\vec{n}\perp\vec{\mu}$ أي $\vec{v}.\vec{\mu}=0$

مثال : $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس ، (Δ) مستقيم يشمل $A(1,2)$ ناظمه

$\vec{v}(1,3)$ معادلة (Δ) تعطى بالشكل : $x+3y+c=0$

$A(1,2)\in(\Delta)$ معناه : $1+6+c=0$ أي $c=-7$ و منه معادلة (Δ) : $x+3y-7=0$

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. (Δ) و (Δ') مستقيمين معادلتيهما

على الترتيب $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$. يكون المستقيمان (Δ) و

(Δ') متعامدين إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$

التعليمات والتوجيهات:

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساويات:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=$

$\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

$=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

البرهان: $\overrightarrow{n_1}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (Δ)

$\overrightarrow{n_2}(a',b')$ شعاع ناظمي للمستقيم (Δ')

$(\Delta)\perp(\Delta')$ يكافئ $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

يكافئ $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ و منه $aa'+bb'=0$

ملاحظة: إذا كانت معادلة المستقيم (Δ) على الشكل $y=\alpha x+\beta$

و معادلة المستقيم (Δ') على الشكل: $y=\alpha' y+\beta'$

$(\Delta)\perp(\Delta')$ يكافئ $\alpha\alpha'=-1$

تمرين: $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس . $A(1,2)$, $B(5,1)$, $C(-1,1)$

اوجد معادلة العمود المتعلق بالضلع $[BC]$

حل: لدينا: $(\Delta): ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{BC}$ هو شعاع ناظمي له $\overrightarrow{BC}(-6,0)$

إذن: $-6x+c=0$ بما ان $(\Delta)\leftarrow A(1,2)$ معناه $-6+c=0$ أي $c=6$

و منه $(\Delta): -6x+6=0$

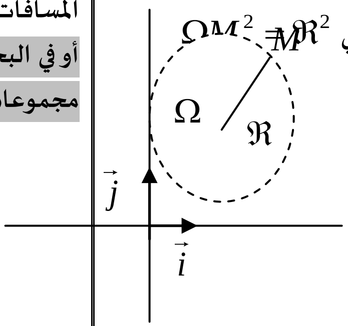
3.3 معادلة دائرة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1..3.3 معادلة دائرة علم مركزها ونصف قطرها

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها $\Re$ حيث $(\Re>0)$

(C) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث $\Omega M=\Re$ أي $\Omega M^2=\Re^2$



لدينا: $\Omega M^2=\Re^2$ يكافئ $(x-x_0)^2+(y-y_0)=\Re^2$

يكافئ: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\Re^2$

يكافئ $y^2+x^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2\quad\Re^2=0$

يكافئ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ / $a=-2x_0$, $b=-2y_0$

$c=+x_0^2+y_0^2-\Re^2$

مبرهنة

لكل دائرة علم مركزها و نصف قطرها معادلة من الشكل :

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ حيث c,b,a أعداد حقيقية

مثال 1: معادلة دائرة مركزها النقطة $\Omega(2,1)$ و نصف قطرها $\Re=\sqrt{2}$

هي $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$

أي: $x^2+y^2-2x-2y=0$

مثال 2: معادلة دائرة (C) مركزها النقطة $\Omega(-1,0)$ و تشمل النقطة $A(2,3)$

هي: $(x+1)^2+y^2=\Re^2$ بما أن $A\in(C)$ فإن $(2+1)^2+3^2=\Re^2$

أي: $\Re^2=2\times3^2$ و من $\Re=3\sqrt{2}$

و منه: معادلة (C) هي $(x+1)^2+y^2=18$

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و

نصف قطرها r $(r>0)$ هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساواتيات:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

الترميز "$\overrightarrow{AB}^2$" يقرأ: المربع السلمي للشعاع "$\overrightarrow{AB}$".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعة نقط.

2.3.3 معادلة دائرة علم

لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$.

(C) باستثناء A و B هي مجموعة النقط M

بحيث يكون المثلث AMB قائما في M

أي: $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$

مقال: معادلة دائرة قطرها $[AB]$ حيث $A(1,2)$ و $B(3,4)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

$M(x,y)\in(C)$ معناه $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$ أي:

$(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$

و منه: $x^2+y^2-4x-6y+11=0$

بطريقة اخرى: لتكن (C) الدائرة التي قطراها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا كذلك $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B.

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

مبرهنة

لكل دائرة علم مركزها و نصف قطرها معادلة من الشكل:

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ حيث c,b,a أعداد حقيقية

دراسة المسألة العكسية: هل كل معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ هي معادلة دائرة

نضع: $(r)=\{M(x,y)/\,x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ حيث $M(x,y)$ نقطة من

المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. ما طبيعة المجموعة (r) ؟

$M(x,y)\leftarrow(r)$ معناه: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

معناه: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$

أي: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

لدينا الطرف الأيسر للمساواة موجب و الطرف الثاني للمساواة إشارته مثل إشارة

a^2+b^2-4c

1/ إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فإن (r) هي ϕ

2/ إذا كان $a^2+b^2+4c=0$ فإن (r) هي النقطة $\varpi\left(-\frac{a}{2},\frac{-b}{2}\right)$

3/ إذا كان $a^2+b^2-4c>0$ فإن (r) هي دائرة مركزها $\varpi\left(-\frac{a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ و نصف قطرها

$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

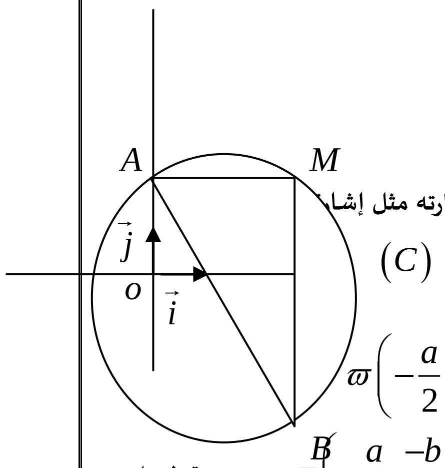
تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساواتان:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.



تمرين : المستوى المنسوب غالى معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

(E) مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ من المستوى بحيث : $x^2+y^2-10x+4y+23=0$

ما هي طبيعة المجموعة (E) أعط عناصرها المميزة.

حل : لدينا : $x^2+y^2-10x+4y+23=0$ تكافئ $(x-5)^2+(y+2)^2=5$

و منه (E) عبارة دائرة مركزها و نصف قطرها $\sqrt{6}$

تطبيق $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس.

1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$.
3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2-2x-3=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
4. هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة ؟

حــل:

1. معادلة (C) هي $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$ أي: $x^2+y^2+4x-2y+2=0$
2. $M(x,y)\in(C')$ يعني أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

أي: $(-2-x)(-3-x)+(-1-y)(2-y)=0$

و منه معادلة (C') هي $x^2+y^2+5x-y+4=0$

3. لتكن (C'') مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2x-3=0$ $(*)$

لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ و منه تكتب $(*)$ على الشكل: $(x-1)^2-1+y^2-3=0$

لدينا إذن $(x-1)^2+y^2=2^2$. (C'') هي إذن الدائرة التي مركزها النقطة $I(1,0)$ و نصف قطرها 2.

4. نكتب $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ على الشكل $\left(x^2+2x\right)+\left(y^2-4y\right)+8=0$

و بما أن $x^2+2x=(x+1)^2-1$ و $y^2-4y=(y-2)^2-4$ يكون لدينا:

$(x+1)^2+(y-2)^2=-3$

الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب و بالتالي لا توجد نقط $M(x,y)$ إحداثياها تحقق هذه المساواة.

المجموعة (Γ) هي إذن مجموعة خالية.

ملاحظة: لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة

III/ تطبيقات : ت1) رقم74، 75، 76 ص 303.

المؤسسة:	ثانوية رقان الجديدة	المستوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميدان التعلم:	هندسة
التاريخ:		الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوي
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	حساب مسافات اقياس وزوايا

الكفاءات القاعدية : استعمال خواص الجداء السلمي و/أو عبارته التحليلية لحساب مسافات وأقياس زوايا.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط مقترح

نشاط1: I منتصف [AB] و M كيفية

1/ بين أن $MA^2+MB^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$.

2/ استنتج أن $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

نشاط2: نعتبر المستقيم $(\Delta): x+y-3=0$ والنقطة $A(-1,2)$. نريد حساب بعد A عن (Δ).

لتكن $H(x,y)$ المسقط العمودي لـ A على (Δ).

1/ هات شعاع توجيه $\vec{v}$ لـ (Δ).

2/ جد $\vec{v}.\overrightarrow{AH}$.

3/ حل الجملة

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ \vec{v}.\overrightarrow{AH}=0 \end{cases}$$

في R.

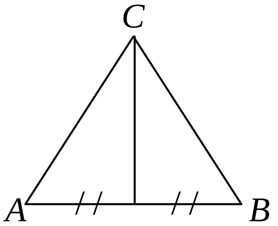
4/ استنتج إحداثيتي H، واحسب المسافة AH.

5/ باعتبار $(\Delta): ax+by+c=0$ أحسب العدد $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

الإنجاز (سير الحصة)

4/ حساب أطوال اقياس وزوايا

1.4 مبرهنة المتوسط



A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. M نقطة كيفية من المستوي.

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

و منه: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

و بما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

2.4 العلاقات المترية في مثلث

ABC مثلث. نضع $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$، $BAC=A$، $CBA=B$، و $ACB=C$ و لتكن S مساحة المثلث ABC.

1.2.4 مبرهنة الكاشي

مبرهنة

ABC مثلث حيث $AB=c$. $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (1) \qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad (2)$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad (3)$

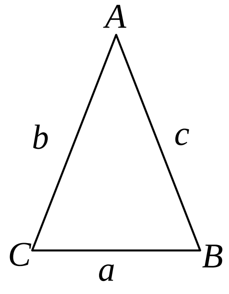
البرهان: لدينا : $\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right)^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$

$=AC^2+AB^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ و منه : $\alpha^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

لدينا : $\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)^2=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2$

$=CB^2+CA^2-2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

و منه : $C^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$



أي : $C^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

بنفس الطريقة نجد أن : $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

ملاحظة: إذا كان $C=\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos C=0$ و منه $ $C^2=a^2+b^2$

و التي تعرف بمبرهنة فيثاغورس

التعليمات والتوجيهات

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساويات: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$."

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

تمرين: ABC مثلث حيث $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$

1/ عين (r) مجموعة M من المستوى التي تحقق : $MA^2+MC^2=38$

2/ احسب A و عين قيمة مقربة الى $0,1$ لكل من B و C

حل: 1/لتكن I منتصف $[AC]$ ، لدينا : $MA^2+MC^2=38$ معناه

$$2MI^2+\frac{1}{2}AC^2=38$$

أي : $2MI^2=38-32$ و منه $MI^2=3$ أي : $MI=\sqrt{3}$ و

و منه (r) عبارة عن دائرة مركزها I و نصف قطرها $\sqrt{3}$

/2 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\,\widehat{A}$ و منه $\cos A=\frac{1}{2}$ و $0<A<180$

و عليه : $A=60^0$ ، $\cos B=\frac{1}{7}$ و منه $B=81,2^0$

$A+C+B=180^0$ و منه : $C=38,2^0$

2.2.4 قاعدة المساحة

تمرين 105 ص 306 : ABC مثلث حيث : $AB=7$ ، $BC=8$ و $AC=10$.

1) أحسب زوايا المثلث ABC . (تعطى النتائج مدورة إلى العشر) .

2) أحسب مساحة المثلث ABC .

مبرهنة

ABC مثلث حيث $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ و S مساحة المثلث ABC. لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

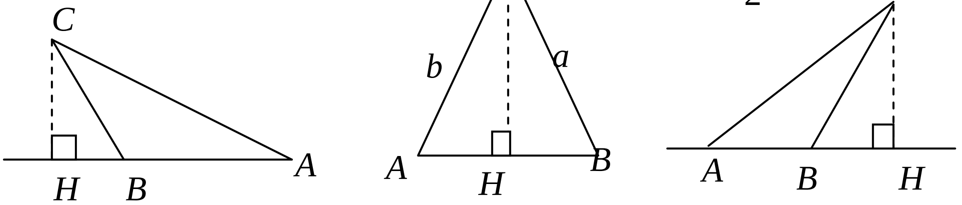
البرهان: H المسقط العمودي لـ C على $[AB]$

لدينا : $S=\frac{AB\times CH}{2}$ وكذا $\sin A=\frac{CH}{b}$ وكذلك $CH=b\sin A$

و منه : $S=\frac{1}{2}C\times b\sin A$ و مهما كان موضع النقطة H في المستقيم (AB)

فإن : $S=\frac{ab\times\sin A}{2}$ و بنفس الطريقة نجد : $S=\frac{a\times b\times\sin C}{2}$

$$S=\frac{a\times c\times\sin B}{2}$$



قانون الجيوب.

مبرهنة

ABC مثلث حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساويات:
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=$
$\overrightarrow{AB}^2=AB^2$
$=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

تقدم التعاريف

برهان: $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B$ بقسمة أطراف المساواة على abc نجد :

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ و منه : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

تمرين: ABC مثلث . نضع $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $BAC=A$

$CBA=B$ و $ACB=C$

نرمز إلى S إلى مساحة المثلث ABC و P إلى نصف محيطه.

/1 بين أن $1+\cos A=\frac{2P(p-a)}{bc}$ و أن $1-\cos A=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

/2 استنتج أن : $\sin A$ تكتب بدلالة b,a,p و c ثم بين أن :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

/3 نفرض أن : $a=15cm$ و $b=9cm$ و $c=11cm$

- احسب بـ cm^2 المساحة S ثم عين قيم مقربة لها إلى $0,01$
- عين قيمة مقربة لـ A إلى $0,01$

تطبيق:

ABC مثلث حيث: $BC=8$ ، $B=50°$ و $C=70°$.

1. أحسب A.
2. أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}.

الحل:

1. من $A+B+C=180°$ نجد $A=60°$.
2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$

و منه $AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{8\sin 70°}{\sin 60°}$ و $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{8\sin 50°}{\sin 60°}$

نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08 .

تمرين 105 ص 306

1) برهن أن المساحة S للمثلث ABC تكتب على الشكل : $S=\frac{1}{2}AC\times AB\times\sin A$.

2) استنتج العلاقتان المماثلة للسابقة واستنتج القاعدة المتعلقة بالجيوب :

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{AB\times AC\times BC}{2S}$$

3) تطبيقات :

أ) يعطى $BC=6$ ، $B=45°$ و $C=75°$.

ب) عين القيمة الحقيقية لكل من AB و AC باستعمال العلاقة $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A$.

ج) نضع $AB=x$ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية $(10,5)^2=x^2+12^2-(10,5)\times 12$

د) إذا كان $AB=10,5$ ، $AC=12$ و $C=60°$ فما هو عدد المثلثات الممكنة لهذه الحالة ؟ وهل هي متقايسة ؟

المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.
تبرز المساواتات:
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=$
$\overrightarrow{AB}^2=AB^2$
$=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$".
تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

المؤسســـــة:	ثانوية رقان الجديدة	المستـــــــوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميــدان التعلم:	هندسة
التاريـــــخ:		الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوى
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	حساب مسافات اقياس وزوايا

الكفاءات القاعديـــــة : استعمال خواص الجداء السلمي و/أو عبارته التحليلية لحساب مسافات وأقياس زوايا.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط مقترح

نشاط1: I منتصف [AB] و M كيفية

1/ بين أن
$MA^2+MB^2 = (\vec{MI}+\vec{IA})^2 + (\vec{MI}+\vec{IB})^2$.

2/ استنتج أن
$MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

نشاط2: نعتبر المستقيم $(\Delta): x+y-3=0$ والنقطة $A(-1,2)$. نريد حساب بعد A عن (Δ).

لتكن $H(x,y)$ المسقط العمودي لـ A على (Δ).

1/ هات شعاع توجيه $\vec{v}$ لـ (Δ).

2/ جد $\vec{v}.\vec{AH}$.

3/ حل الجملة $\begin{cases} x+y-3=0 \\ \vec{v}.\vec{AH}=0 \end{cases}$ في R.

4/ استنتج إحداثيي H، واحسب المسافة AH.

5/ باعتبار $(\Delta): ax+by+c=0$ أحسب العدد $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

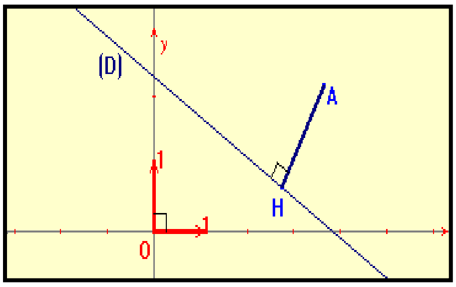
الإنجاز (ســـير الحصة)

5/ المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة A و مستقيم (Δ) هي المسافة AH بين A و النقطة H مسقطها العمودي على (Δ)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيما (Δ) معادلته $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ) و ليكن $\vec{n}(a,b)$ الشعاع الناظم للمستقيم (Δ).



1/ $\left|\vec{n}.\vec{AH}\right| = \left\|\vec{n}\right\|\times\left\|\vec{AH}\right\|\left|\cos\left(\vec{n},\vec{AH}\right)\right|$

$= \left\|\vec{n}\right\|\times AH\times 1$

$\left|\vec{n}.\vec{AH}\right| = \left\|\vec{n}\right\|\times AH$

$\left|\vec{n}.\vec{AH}\right| = \sqrt{a^2+b^2}\times AH .....(1)$

2/ $H\in(\Delta)$ حيث: $H(x,y)$, $\vec{n}(a,b)$, $\vec{AH}(x-x_0, y.y_0)$

$\left|\vec{n}.\vec{AH}\right| = \left|ax-ax_0+by-by_0\right|$

$= \left|ax+by-ax_0-by_0\right| = \left|-c-ax_0-by_0\right|$

$\left|\vec{n}.\vec{AH}\right| = \left|ax_0+by_0+c\right| .....(2)$

3) من (1) و (2) نستنتج أن : $\sqrt{a^2+b^2}\times AH = \left|ax_0+by_0+c\right|$

و منه $AH = \frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (Δ) معادلته : $ax+by+c=0$ هي : $d(A,D) = \frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تطبيقات:

- ❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعدلة: $y=2x+1$
- ❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم (D) ذو المعادلة: $x+y-2=0$
- ❖ لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$
  - بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
  - هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

التعليمات والتوجيهات

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساواتين: $\vec{AB}.\vec{AB} = \vec{AB}^2 = AB^2 = \left\|\vec{AB}\right\|^2$

الترميز "$\vec{AB}^2$" يقرأ: "المربع السلمي للشعاع $\vec{AB}$".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

	تمرين :1/ احسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (Δ) : $2x-y+1=0$ حل : $d(A,D)=\frac{\lvert 2(2)-3+1\rvert}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 2/ تعيين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x+y-2=0$ **حـل**: لدينا : $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=\Re^2$ و $\Re=\frac{\lvert 1-2+1-2\rvert}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ اذن : $(C)=(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{9}{2}$ **تمرين** 2/ بين أن المستقيمة : $(\Delta'):ax+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') : $(C'):x^2+y^2-2x-6y-13=0$ **حـل**: لدينا : معادلة (C') تكافئ : $(x-1)^2+(y-3)^2-13=0$ أي : $(C'):(x-1)^2+(y-3)^2=13$ و منه (C') هي دائرة مركزها $\varpi'(1,3)$ و نصف قطرها $\sqrt{13}$ و من جهة أخرى : $d(\Omega',\Delta')=\frac{\lvert 3(1)+2(3)+4\rvert}{\sqrt{13}}$ و منه $R'=\sqrt{13}$ و منه (Δ') هو مماس (C') . **III/ تطبيقات : ت1** من رقم96 إلى 106 ص306.	تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها. تبرز المساويات: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=$ $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$ $=\lVert\overrightarrow{AB}\rVert^2$ الترميز " $\overrightarrow{AB}^2$ " يقرأ: المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{AB}$". تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعة نقط.

المؤسســـــــة:	ثانوية رقان الجديدة	المستـــــــوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميـــدان التعلم:	هندسة
التاريـــــــخ:		الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوى
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	حساب مسافات اقياس وزوايا

الكفاءات القاعديـــــــة : استعمال خواص الجداء السلمي و/أو عبارته التحليلية لحساب مسافات وأقياس زوايا.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط مقترح

إرشادات للحل:

ت84: أدخل C بين A و M بعلاقة شال.

ت85: أدخل G منتصف $[AB]$ بين A و M وبين B و M بعلاقة شال. أو طريقة أخرى أدخل A بين B و M بعلاقة شال.

ت86: أ) أدخل G مرجح $(A,2)$ و $(B,-3)$ بين A و M وبين B و M بعلاقة شال. ب) أدخل G مرجح $(A,2)$ و $(B,-3)$ بين A و M وبين B و M بعلاقة شال في القوس الأيسر، ولاحظ أن ما داخل القوس الأيمن يساوي $B\hat{A}$.

الإنجاز (ســير الحصة)

6/البحث عن مجموعة نقاط

تمارين الحل الهندسي

تمرين 84 من الكتاب: ABC مثلث. ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ؟

تمرين 85 من الكتاب: A و B نقطتان من المستوي حيث $AB=4$.
ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث $MA^2+MB^2=16$ ؟

تمرين 86 من الكتاب: A و B نقطتان متمايزتان من المستوى.
ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:
أ) $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ ؟
ب) $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ ؟

تمرين 87 من الكتاب: A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$
1) بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون:
$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$
2) نفرض أن $AB=1$
عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث :
$MA^2-MB^2=2$

تمرين 88 من الكتاب: لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي و G مرجح $(A;3)$ و $(B;2)$ حيث $AB=5$.
1) أ) اكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$
ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$
بين أن $G\in(E)$
برهن أن (E) هي المستقيم العمودي على (AB) في G.
2) حدد (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$MA^2+MB^2=7$

تمرين 89 من الكتاب: A و B نقطتان متمايزتان من المستوي .
ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$ ؟

التعليمات والتوجيهات

تقدم التعاريف المختلفة للجُداء السلمي يبرهن على تكافؤها.

تبرز المساويات:
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

الترميز "$\overrightarrow{AB}^2$" يقرأ: المربع السلمي للشعاع "$\overrightarrow{AB}$".

تدرج العلاقات المترية المألوفة (مبرهنة الكاشي، MA^2+MB^2 ، MA^2-MB^2) التي نستعملها لحساب المسافات أو الزوايا أو في البحث عن مجموعات نقط.

المؤسســـــــة:	ثانوية رقان الجديدة	المستـــــــوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	2014/2013	ميـــدان التعلم:	هندسة
التاريـــــخ:		الوحدة التعلمية:	الجداء السلمي في المستوى
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	دساتير الجمع

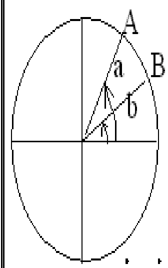
الكفاءات القاعديـــــة : توظيف الجداء السلمي لإثبات دساتير الجمع المتعلقة بجيب تمام و جيب وعبارة $\sin 2a$ و $\cos 2a$ التي تستنتج منها.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط مقترح

نشاط:

على الدائرة المثلثية في الشكل الموالي:



1/ أحسب: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$، باعتماد التعريف ثم باستخدام الإحداثيات واستنتج أن: $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$

2/ بين أن: $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$

3/ بالإعتماد على: $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$، $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ بين أن:

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

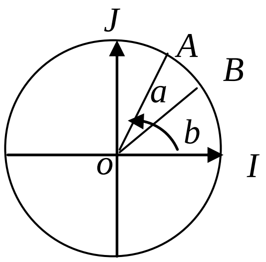
4/ أحسب: $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

7/ دساتير الجمع

1) حساب $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a-b)$, $\cos(a+b)$

نضع : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=b$, $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=a$

لدينا : $\overrightarrow{OB}(\cos b,\sin b)$, $\overrightarrow{OA}(\cos a,\sin a)$



$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos b\cos a+\sin b\sin a....(1)$$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})-(\vec{i},\overrightarrow{OB})$$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=a-b$$

لدينا : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\|\overrightarrow{OB}\|\times\|\overrightarrow{OA}\|\cos(a-b)$

و منه : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=1\times1\times\cos(a-b)$

أي : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos(a-b).....(2)$

من (1) و (2) نجد $\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b$

- لدينا :

$$\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\ \sin(-b)$$

$$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b$$

- نعلم ان : $\sin(a-b)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a-b)\right]$

$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$$

و منه : $\sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b$

$$\sin(a+b)=\sin(a-(-b))=\sin a\ \cos(-b)-\cos a\ \sin(-b)$$

$$\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b$$

مبرهنة

$$\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b$$

التعليمات والتوجيهات: توظيف الجداء السلمي لإثبات دساتير الجمع المتعلقة بجيب تمام و جيب وعبارة $\sin 2a$ و $\cos 2a$ التي تستنتج منها.

تمرين : احسب $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$

حل : لدينا : $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$ و منه : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$ و منه : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

2/ عبارة $\cos 2a$, $\sin 2a$

أ/ لدينا : $\cos 2a=\cos(a+a)=\cos a\ \cos a-\sin a\ \sin a$

و منه : $\cos^2 a=\cos^2 a-\sin^2 a$

لدينا : $\sin 2a=\sin a\ \cos a+\sin a+\sin a\ \cos a$

و منه : $\sin 2a=2\sin a\ \cos a$

ب/ $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$

$\cos a=1-2\sin^2 a$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

مبرهنة

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1$

$=1-2\sin^2 si$

تمرين : حساب $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ دون الحاسبة

حل : لدينا : $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$ أي : $\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ و منه : $\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$

أي : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$ أو $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$

بما أن $\frac{\pi}{8}$ موجود في الربع الأول من الدائرة المثلثية إذن : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ باستعمال : $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$

III/ تطبيقات : ت1) من رقم 108 إلى رقم 119 ص 307.