إعداد الأستاذ : قواس — **سلسلة تمارين حول** — السنة الثانية ثانوي ( ع ت.ت ر. ر)

# الاشتقـاقــيـة (1)

■ $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$

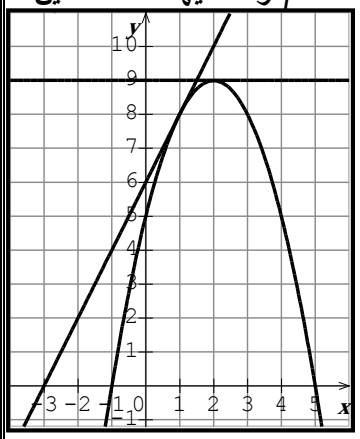
■ نسمي $l$ بالعدد المشتق عند $x_0$ ونرمز له بـ $f'(x_0)$

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ هي معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$

■ $f'(x_0)$ هو ميل المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$

## ◈العدد المشتق◈معادلة المماس◈

**1** الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $f$ ومماسيها عند النقطتين ذات الفاصلتين 1 و 2



أ- بقراءة بيانية اوجد القيم $f(1), f'(1), f(2), f'(2)$

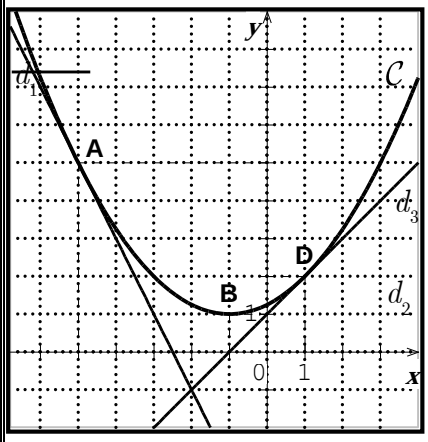
ب- نقبل ان $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=-x^2+4x+5$

اثبت ان $f$ قابلة للاشتقاق عند 5

جـ اوجد معادلة المما س للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند النقطة ذات الفاصلة 5

**2** ليكن $\mathcal{C}$ هو التمثيل البياني للدالة $f$، ولتكن $d_1$ ، $d_2$ و $d_3$ مماساته عند $A$ ، $B$ و $D$ على الترتيب




1)اوجد معادلة كل مماس

2)ارسم ثم أكمل الجدول

| $x$ | -5 | -1 | 1 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $f(x)$ | | | |

**3** اثبت ان كانت $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ ثم اكتب معادلة المماس لمنحنيها عند $x_0$ في كل مما يلي :

**1)** $f(x)=3x-11\ ;x_0=-7$

**2)** $f(x)=-2x^2-x+5\ ;x_0=1$

**3)** $(7-x)^2-2;x_0=5$ **4)** $x^3+x^2+1;x_0=0$

**5)** $f(x)=\frac{3}{x+1}\ ;x_0=-2$ **6)** $f(x)=\frac{3x}{x+4}\ ;x_0=2$

**7)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ ;x_0=9$ **8)** $f(x)=\sqrt{x+1}\ ;x_0=3$

**9)** $f(x)=7\sqrt{1-x};x_0=1$ **10)** $f(x)=-5\sqrt{x+3};x_0=1$

**4** $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=x^2-3x+2$ و $C_f$ منحنيها

**1)** اوجد معادلة المماس لـ $C_f$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ في كل حالة : $x_0=0$ , $x_0=1$ , $x_0=2$ و $x_0=3$

**2)** ارسم المماسات و المنحنى $(C_f)$ .

**5** في كل حالة اكتب معادلة المماس للمنحنى $C$ عند النقطة $A$ والذي معامل توجيهه هو $a$

**1)** $A(2;0)\ ;a=1$ **2)** $A(-1;3)\ ;a=-2$

**3)** $A(-2;3)\ ;a=\frac{3}{2}$ **4)** $A(2;\sqrt{2})\ ;a=\sqrt{2}$

**6** برهن ان مماس المنحنى $(C):y=2-\frac{1}{2}x^2$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 , يقطع محور الفواصل في $B(\frac{5}{2};0)$

**7** ليكن : $(C):y=x^2$ و $(D):y=-4x-4$

**1)** ادرس تقاطع المنحنيين $(C)$ و $(D)$

**2)** استنتج ان $(D)$ هو المماس لـ $(C)$ عند نقطة يطلب احداثياتها

**8** ليكن $(C):y=3x^3+2x^2-7x-6$

$(D):y=2x+2$

**1)** عين $a$ , $b$ و $c$ حيث: $(C):y=(x+1)(ax^2+bx+c)$

**2)** اثبت ان $(C)$ و $(D)$ لهما نقطة مشتركة ترتيبها معدوم

**3)** اثبت ان $(D)$ مماس لـ $(C)$ عند نقطة يطلب احداثياتها

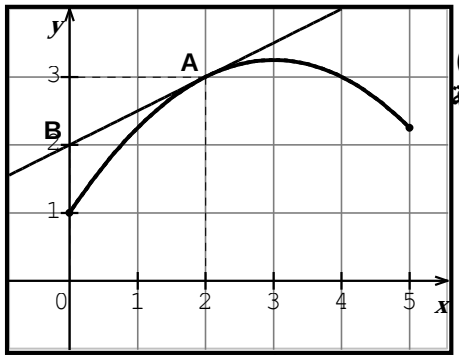
**9** $(C)$ منحن يشمل $A(2;4)$ و $(\Delta)$ مستقيم معادلته $y=3x+5$

اكتب معادلة لمماس المنحنى $(C)$ عند $A$ والذي يوازي $(\Delta)$

**10** اكتب معادلة لمماس المنحنى $(C)$ عند $A(-1;-3)$ والذي شعاع توجيهه $\vec{i}$ .

## ◈التقريـب التالــفي◈

**1** $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $[0;5]$ و $(C)$ منحنيها البياني المماس $(T)$ لـ $(C)$ عند النقطة $A(2;3)$ يشمل النقطة $B(0;2)$




**1)** اوجد $f'(2,1)$

**2)** اكتب معادلة لـ $(T)$

**3)**استنتج القيم المقربة لـ $f(1,8)$ و $f(2,1)$

**2** $f$ دالة قابلة للاشتقاق عند كل قيمة $x_0$ من $\mathbb{R}$

حيث ان : $f(2)=3$ , $f'(2)=4$ و $f'(2,1)=2$

**1)** باستعمال احسن تقريب تالفي ل $f$ عند 2 عين قيمة مقربة $f(2)$

**2)**باستعمال احسن تق تالفي لـ $f$ عند $2,1$ جدقيمة مقربة لـ $f(2,2)$

اقلب الصفحة

## ◈الدوال المشتقة◈

**1** 1) ذكر بمشتقة كل من : $f : x \mapsto x^2$ و $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

منحنيي هاتين الدالتين يتقاطعان في نقطة فاصلتها 1

- اوجد معادلة لمماس كل منحنى عند هاته النقطة

2) ذكر بمشتقة كل من الدالتين $\sin$ و $\cos$ . على المجال $[0;4]$

منحنيي هاتين الدالتين يتقاطعان في نقطة فاصلتها $\frac{\pi}{4}$ .

- اوجد معادلة لمماس كل منحنى عند هاته النقطة

**2** $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

1) بين ان $g$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعين دالتها المشتقة

2) $f$ دالة قابلة للاشتقاق على حيث $f'(t) = 2 - t$ و $f(0) = 1$

نضع $\varphi = f - g$

أ) برهن انه من اجل كل عدد $a$ ومن اجل كل عدد غير معدوم $h$

لدينا : $\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + a - 2 + 0,5h$

ب) استنتج ان الدالة $\varphi$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ج) برر ان الدالة $\varphi$ ثابتة .

**3** احسب الدوال المشتقة للدوال الاتية :

1) $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 9$

2) $g$ معرفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{5}{2x+4}$

3) $h$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{3x+1}{x^2+x+1}$

4) $w$ معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $w(x) = (6x-5)\sqrt{x}$

**4** احسب الدوال المشتقة للدوال الاتية :

1) $f$ معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ : $f(x) = \frac{2x+7}{x-3}$

2) $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x\sqrt{2} + 9 + \frac{1}{x^2+1}$

3) $h$ معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ : $h(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$

**5** احسب الدوال المشتقة للدوال الاتية :

1) $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (2x-1)\cos x$

2) $g$ معرفة على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ بـ : $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

3) $h$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (3x^2 + x - 5)^2$

**6** احسب الدوال المشتقة محددا مجموعة قابلية الاشتقاق للدوال المركبة الاتية :

1) $f$ معرفة على $]-\infty;0,6]$ بـ : $f(x) = \sqrt{5-3x}$

2) $g$ معرفة على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ بـ : $g(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$

3) $h$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

**7** 1) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ عند النقطة ذات الترتيب المعدوم حيث: $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

2) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ عند النقطة $A(1;3)$ والذي معامل توجيهه 2

3) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ والذي يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = 5x - 1$ حيث : $f(x) = x^2 + 3x - 4$

4) اثبت أن المنحنى $C_f$ الممثل للدالة $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$ ، ثم اكتب معادلتيهما

5) حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ والذي يعامد المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{3}x + 1$ حيث : $f(x) = x^2 + 3x - 4$

**8** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

عين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث المنحنى الممثل للدالة $f$ يقبل مماسا عند النقطة $(1;-3)$ معامل توجيهه $\frac{2}{3}$ .

**9** $f$ دالة معرفة بـ : $f(x) = ax^2 + bx + c$

عين الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ بحيث المنحنى الممثل لـ $f$ يشمل النقطة $(0;1)$ و يقبل مماسا في النقطة $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$ موازيا لمحور الفواصل

## ◈المماس المشترك لمنحنيين◈

**1** لتكن $f$ معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$

و $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 - 5x + 4$

نسمي $(C_f)$ و $(C_g)$ منحنييهما البيانيين في م م م

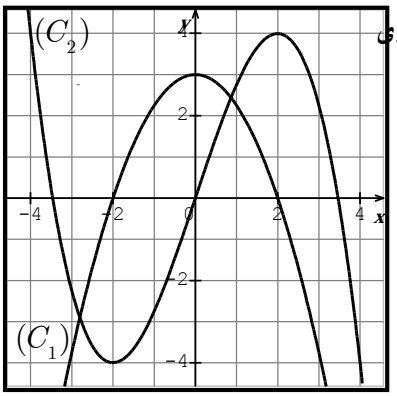
1) اثبت ان $(C_f)$ و $(C_g)$ يقبلان مماسا مشتركا عند النقطة ذات الفاصلة 3 . اكتب معادلة لهذا المماس نرمز له بـ $(T)$

2) يتقاطع $(C_f)$ و $(C_g)$ في نقطة اخرى اوجد احداثياتها .

اكتب معادلة المماس لكل منحن عند هاته النقطة

## ◈القراءة البيانية◈

**1** $(C_1)$ و $(C_2)$ منحنيين بيانيين لدالتين قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

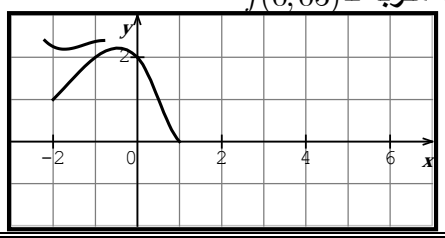



احد الدالتين هي مشتقة الاخرى ماهو منحنى الدالة المشتقة ؟

**2** $f$ دالة قابة للاشتقاق على المجال $[-2;7]$ الشكل اسفله يمثل المنحنى البياني للدالة المشتقة $f'$

1) ادرس اتجاه تغير $f$ وشكل جدول تغيراتها

2) اذا علمت ان $f(0) = 3$ ,اكتب معادلة لمماس منحنى الدالة $f$ عند 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(0,05)$

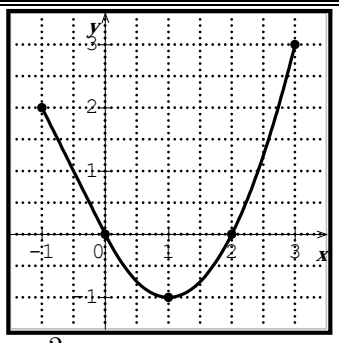



انتـــهى

إعداد الأستاذ : قواس **سلسلة تمارين حول** السنة الثانية ثانوي ( ع ت.ت ر. ر)

# الاشتقـاقــيـة (2)

**تمريـن 01 : ≪ القراءة البيانية ≫**



التمثيل البياني المقابل هو لدالة $g$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$

1) عين بيانيا اشارة $g(x)$ ثم اشارة $g'(x)$

2) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-1;3]$ بـ : $f(x)=[g(x)]^2$

احسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج اشارة $f'(x)$

**تمريـن 02 : ≪ ادرس تغيرات الدالة $f$ ≫**

1) $f(x)=-3x^2+12x-5$ ; $D=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{5x-3}{x-1}$ ; $D=\mathbb{R}-\{1\}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ; $D=[0;+\infty]$

4) $f(x)=\dfrac{x^3-2x-1}{x^3}$ ; $D=\mathbb{R}^*$

5) $f(x)=x^3-9x^2-21x+4$ ; $D=\mathbb{R}$

6) $f(x)=-3x+\cos 2x$ ; $D=\mathbb{R}$

**تمريـن 03 : ≪ مبرهنة القيم التوسطة ≫**

ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $I$ واستنتج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

1) $f(x)=2x^3-3x^2-1$ ; $I=[\frac{3}{2};2]$

2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x-2$ ; $I=[-1;0]$

3) $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ ; $I=[-\frac{3}{2};-1]$

4) $f(x)=\frac{x^3}{6}+x^2+4x-1$ ; $I=[0;\frac{1}{2}]$

**تمريـن 04 : ≪ اعطاء حصر لدالة ≫**

ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم اعط حصرا للعدد $f(x)$ من اجل كل $x$ من $D$

1) $f(x)=x^2+4x+5$ ; $D=[-4;0]$

2) $f(x)=-3x^2+6x+5$ ; $D=[0;2]$

3) $f(x)=x^3-x^2-2x-1$ ; $D=[-\frac{3}{2};\frac{5}{2}]$

4) $f(x)=5-\dfrac{3}{2x-1}$ ; $D=[1;\frac{3}{2}]$

5) $f(x)=\sqrt{4-5x}$ ; $D=[-9;0]$

6) $f(x)=(2x-10)(2-x)^2$ ; $D=[1;3]$

**تمريـن 05 : ≪ قراءة جدول التغيرات ≫**

**I)** ليكن جدول تغيرات دالة $f$ معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و $(C)$ منحنيها البياني في م م م

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f(x)$ | $-4$ | ↗ | $5$ | ↘ | $1$ |

1) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[-2;1]$ ثم استنتج اشارة $f(x)$ حسب قيم $x$

2) عين حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $[-2;3]$

3) هل $(C)$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2 معادلته $y=x-1$, برر اجابتك

**II)** نعتبر ان عبارة $f$ هي من الشكل : $f(x)=ax^2+bx+c$

1) بالاعتماد على المعلومات الواردة في الجدول , بين ان $a=-1$, $b=2$ و $c=4$

2) اكتب معادلة المماس $(T)$ لـ $(C)$ في النقطة $A(2;4)$

3) اوجد قيمة تقريبية للعدد $f(2;0003)$

**تمريـن 06 : ≪ دراسة دالة ناطقة ≫**

$f$ دالة معرفة على المجال $[-3;3]$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ و $(C)$ منحنيها البياني في م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) اثبت انه من اجل كل $x$ من $[-3;3]$ , $f(x)=a+\dfrac{bx}{x^2+1}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ على $[-3;3]$

3) بين ان النقطة $H$ التي فاصلتها $0$ هي مركز تناظر لـ $(C)$

3) اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ لـ $(C)$ في $H$ 5) انشئ $(\Delta)$ و $(C)$

**تمريـن 07** : ≪ استعمال الدالة المساعدة ≫

الدالة كثير الحدود $P$ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$

1) شكل جدول تغيرات $P$ على $\mathbb{R}$ 2) بين ان المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-\frac{1}{2};0[$

3) استنتج اشارة $P$ على $\mathbb{R}$

4)الدالة العددية $G$ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$

عين اتجاه تغير الدالة $G$ على $\mathbb{R}$

**تمريـن 08** : ≪ استعمال الدالة المساعدة ≫

**I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) ادرس تغيرات $g$ 2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1,6;1,7[$

3) استنتج اشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

**II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$ و $(C_f)$ منحنيها البياني في م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين انه من اجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$, ثم استنتج اتجاه تغير $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) عين معادلة لـ $(\Delta)$ مماس المنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة

3) ادرس الوضعية النسبية بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ ,ماذا تلاحظ 4) ارسم $(\Delta)$ و $(C_f)$

الوحدة 4 سم

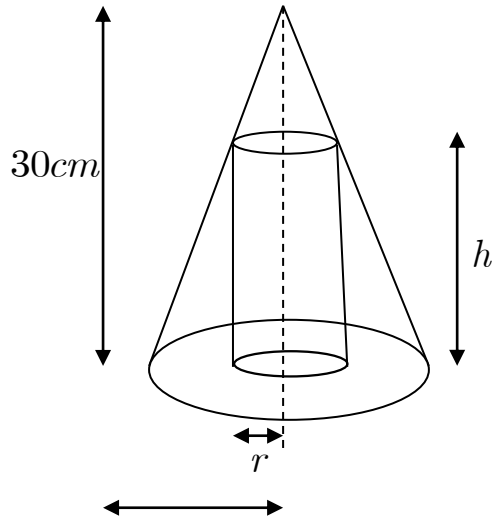
**تمريـن 09** : ≪ optimisation : البحث عن القيمة الكبرى ≫

مخروط دوراني ارتفاعه $30cm$ ونصف قطر قاعدته $10cm$

نريد رسم بداخله اسطوانة دورانية يأخذ حجمها $V(r)$ اكبر قيمة ممكنة

نضع ارتفاع الاسطوانة $h$ ونصف قطر قاعدتها $r$ ( بـ : $cm$ )

كما هو موضح في الشكل المقابل




1) اثبت ان : $h = 3(10 - r)$

2) عبر عن $V(r)$ حجم الاسطوانة بدلالة $r$

3) ادرس تغيرات الدالة $V$

4) استنتج قيم $h$ و $r$ حتى يأخذ الحجم $V(r)$ اكبر قيمة ممكنة

**تمريـن 10** : ≪ optimisation : البحث عن القيمة الصغرى ≫

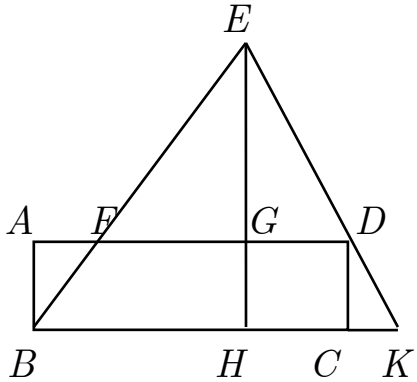
ليكن $ABCD$ مستطيل حيث $AB = 1$ و $H.BC = 3$ نقطة من $(BC)$ حيث $BH = 2$,

$E$ نقطة من المستقيم العمودي على $(BC)$ في $H$

والذي يقطع $(AD)$ في $G$.

$(EB)$ يقطع $(AD)$ في $F$ و $(ED)$ يقطع $(BC)$ في $K$.

نرمز بـ $x$ للمسافة $EG$




1) عبر عن $FG$ و $HK$ بدلالة $x$

2) عبر بدلالة عن المساحة $f(x)$ لشبه المنحرف $FBKD$

3) عين قيمة $x$ التي من اجلها تكون هذه المساحة اصغر ما يمكن

**انتـــهى**