إعداد الأستاذ
إبراهيم وعلي حسين

الهندسة الفضائية
لأقسام
السنة الثانية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ
الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ مَالِكِ يَوْمِ الدِّينِ
إِيَّاكَ نَعْبُدُ وَإِيَّاكَ نَسْتَعِينُ
اهْدِنَا الصِّرَاطَ الْمُسْتَقِيمَ
صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ
غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ
وَلَا الضَّالِّينَ

وقل رب زدني علما
سبحانك لا علم لنا الا ما علمتنا انك أنت العليم الحكيم

الهندسة في الفضاء السنة الثانية:

الكفاءة	الوحدة التعلّمية (المحاور)	الموارد (الأهداف التعليمية)	التسيير المنهجي للتعلمات		التقويم المرحلي	التوقيت
			توجيهات وإرشادات	التكفل بالمنطق وت إ إ		
• تنمية تصور الأشكال في الفضاء • استعمال المنظور المتساوي القياس لتمثيل الأشكال الهندسية • التعرّف على الأوضاع النسبية في الفضاء	• إنشاء مقطع بمستو. • إنشاء مقطع رباعي وجوه بمستو.	المقاطع المستوية	• نستعمل بديهيات الوقوع والترتيب المدروسة في السنة الأولى لتبرير هده الإنشاءات. • نكتفي بدراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين ، مستقيم ومستوي ، مستويين.	• استعمال برمجيات الهندسة الحركية مثل (GeoGebra).		
	تقـــويم					

• ممارسة الحساب الشعاعي في المستوي وفي الفضاء	• ممارسة الحساب الشعاعي في الفضاء.	• الحساب الشعاعي في الفضاء.	• نمدد العمليات المألوفة على الأشعة في المستوي إلى الفضاء.			
	• استعمال الأشعة لإثبات توازي شعاعين واستقامية ثلاث نقط.					
	• البرهان على أن الأشعة من نفس المستوي.		• نمدد العمليات المألوفة على الأشعة في المستوي إلى الفضاء، بتوظيف خواص الجمع الشعاعي وضرب شعاع بعدد حقيقي ونتجنب كل دراسة نظرية لبنية الفضاء الشعاعي.			
	تقـــويم					

الكفاءة	الوحدة التعلّمية (المحاور)	الموارد (الأهداف التعليمية)	التسيير المنهجي للتعلمات		التقويم المرحلي	التوقيت
			توجيهات وإرشادات	التكفل بالمنطق وت إ إ		
ممارسة الحساب الشعاعي في الهندسة التحليلية في المستوي وفي الفضاء	• تعليم نقطة أعطيت إحداثياتها.	• التعليم في الفضاء	• تهدف هذه الفقرة إلى تمكين التلاميذ من التعليم في الفضاء. • يتعلق الأمر هنا بمعلم متعامد ومتجانس.	• يمكن استعمال برمجيات الهندسة الحركية مثل *Geo Gebra*		
	• تعيين معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات.		• نستعمل الترميز $P\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ مثلا للدلالة على مستو الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ ونعيّن معادلته، مما يساعد على استخراج معادلات المستويات المطلوبة.			
	• تعيين معادلات مستقيم معرّف بنقطة وشعاع توجيه له		• نشير إلى الحالات الخاصة التي تكون فيها إحدى مركبات شعاع التوجيه معدومة			
	• إثبات أنّ أشعة معطاة تنتمي إلى نفس المستوي.					

• استعمال مبرهنة فيتاغورس لإيجاد المسافة بين نقطتين.	• المسافة بين نقطتين.	• تستعمل مبرهنة فيتاغورس لإيجاد هذا الدستور، ثمّ يوظف في التطبيقات للحصول على معادلات كل من: * الكرة التي مركزها مبدأ المعلم * الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الإحداثيات.		
• استعمال دستور المسافة بين نقطتين لتعيين معادلة مجموعة تحقق خاصية ما.		* المخروط الدوراني الذي رأسه مبدأ المعلم ومحوره أحد محاور الإحداثيات. في حالة الأسطوانة، يمكن اعتبار أولا مقطع الكرة التي مركزها O ونصف قطرها r بأحد مستويات الإحداثيات، مثلا مقطع الكرة بالمستوي الذي معادلته $z=0$ هو دائرة مركزها O ومعادلتها في المستوي $P\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ هي $x^2+y^2=r^2$ وثم نتساءل عن معنى هذه المعادلة عندما يتغير z.		
تقـــويم				

المقاطع المستوية و الأشعة في المستوي

-1-

المقاطع

المستوية

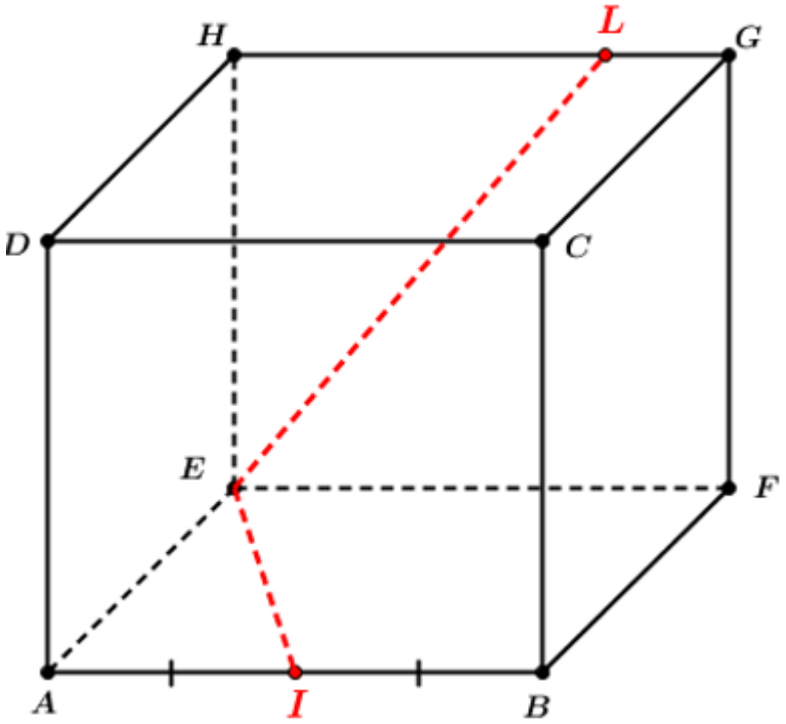
المقاطع المستوية لمكعب

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

نشاط 1: (الكتاب المدرسي ص238)

تذكرة :

يقطع مستو $(\mathcal{P})$ مستويين متوازيين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ وفق مستقيمين متوازيين $(\mathcal{D}_1)$ و $(\mathcal{D}_2)$.



نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ولتكن النقطتان I و L حيث I منتصف $[AB]$ و L نقطة من $[GH]$ تحقق

$$GL = \frac{1}{4}GH$$

من الواضح أن النقط E ، I و L ليست على استقامة واحدة فهي تحدد إذن مستويا نرمز إليه بـ (EIL) .

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

1- أنشئ القطعة المستقيمة $[KL]$ تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $DCGH$.

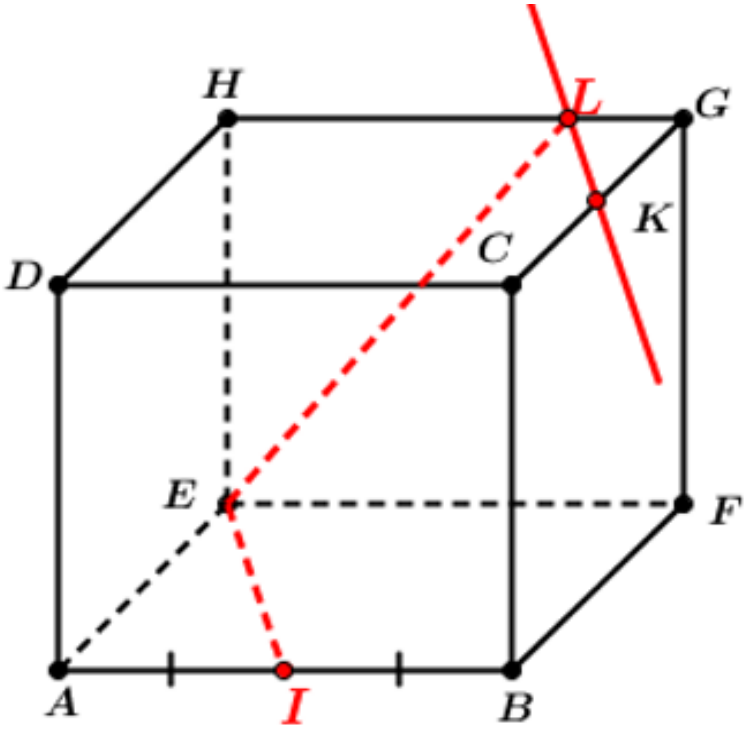
2- أنشئ تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $ABCD$.

3- استنتج تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $BCGF$.

4- عين تقاطع المستوي (EIL) مع المكعب $ABCDEFGH$.

الحل :

1- أنشئ القطعة المستقيمة $[KL]$:



بما ان الوجهين $DCGH$ و $ABFE$ متوازيين

والمستوي (EIL) يقطع الوجه $ABFE$ وفق المستقيم (EI)

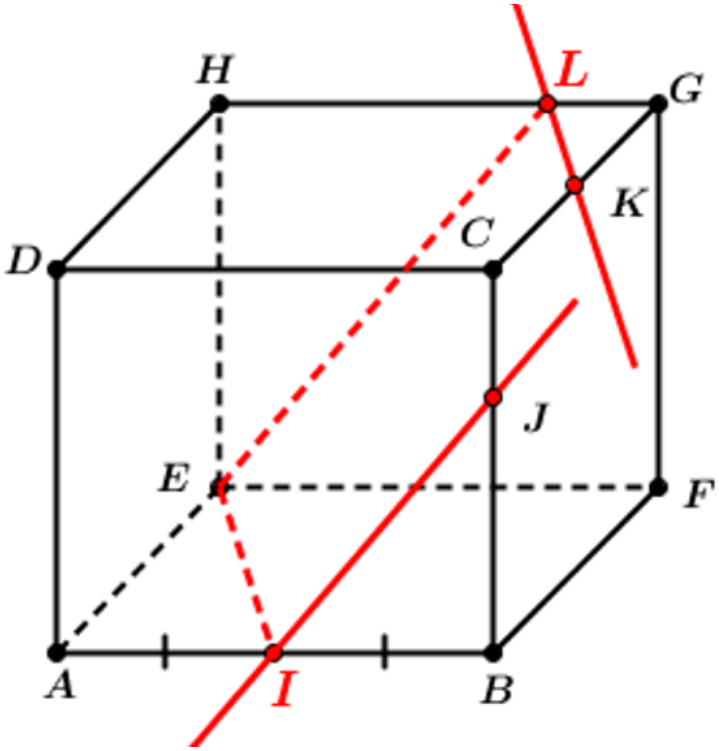
ومنه النقطة K هي نقطة تقاطع المستقيم المار من النقطة L

و الموازي للمستقيم (EI)

وبذلك نحصل على القطعة $[KL]$.

2- إنشاء تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $ABCD$.

بما ان الوجهين $ABCD$ و $EFGH$ متوازيين



والمستوي (EIL) يقطع الوجه $EFGH$ وفق القطعة $[EL]$

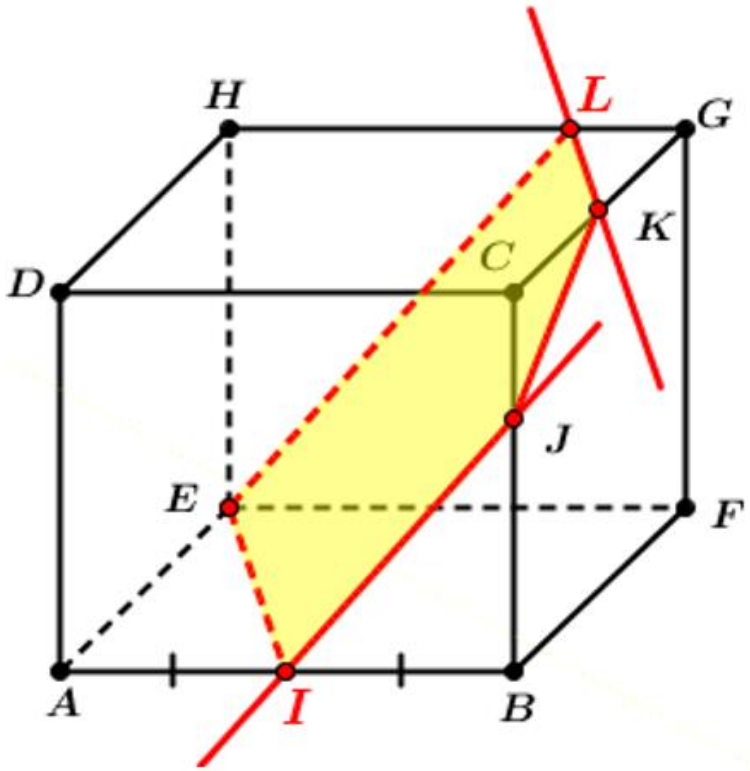
نرسم المستقيم المار من النقطة I والموازي للمستقيم (EL)

فيقطع الحرف $[CB]$ في النقطة J

وبذلك نحصل على

القطعة $[IJ]$ التى تمثل تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $ABCD$

3- استنتاج تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $BCGF$:



بما ان المستوي (EIL) يقطع المستقيمين المتقطعين

(CG) و (CB) في النقطتين K و J على الترتيب

وبذلك المستوي (EIL)

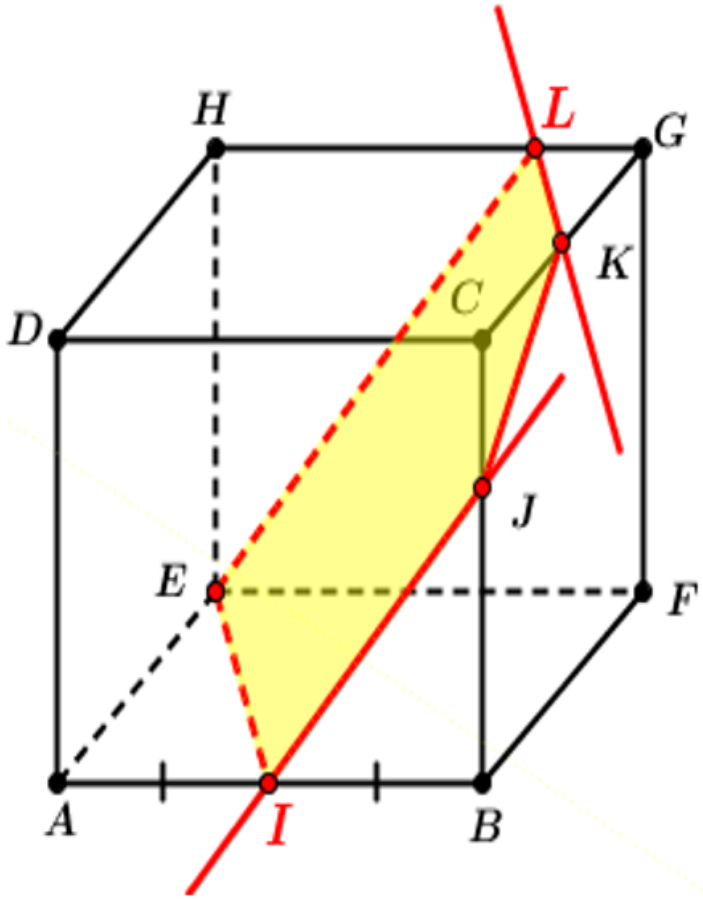
يقطع الوجه $BCGF$

وفق القطعة $[KJ]$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

4- تعين تقاطع المستوي (EIL) مع المكعب $ABCDEFGH$:

من الخطوات السابقة نستنتج أن



المستوي (EIL) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق خماسي الاضلاع $IELKJ$

القطعة		الوجه		المستوي
$[IE]$	وجه	$ABFE$	وجه	(MNP)
$[EL]$	وجه	$EFGH$	وجه	
$[LK]$	وجه	$DCGH$	وجه	
$[KJ]$	وجه	$BCGF$	وجه	
$[JI]$	وجه	$ABCD$	وجه	
$\{E\}$		$ADHE$		

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

المقاطع المستوية لمكعب :

مقطع مكعب بمستو $(\mathscr{P})$ هو :

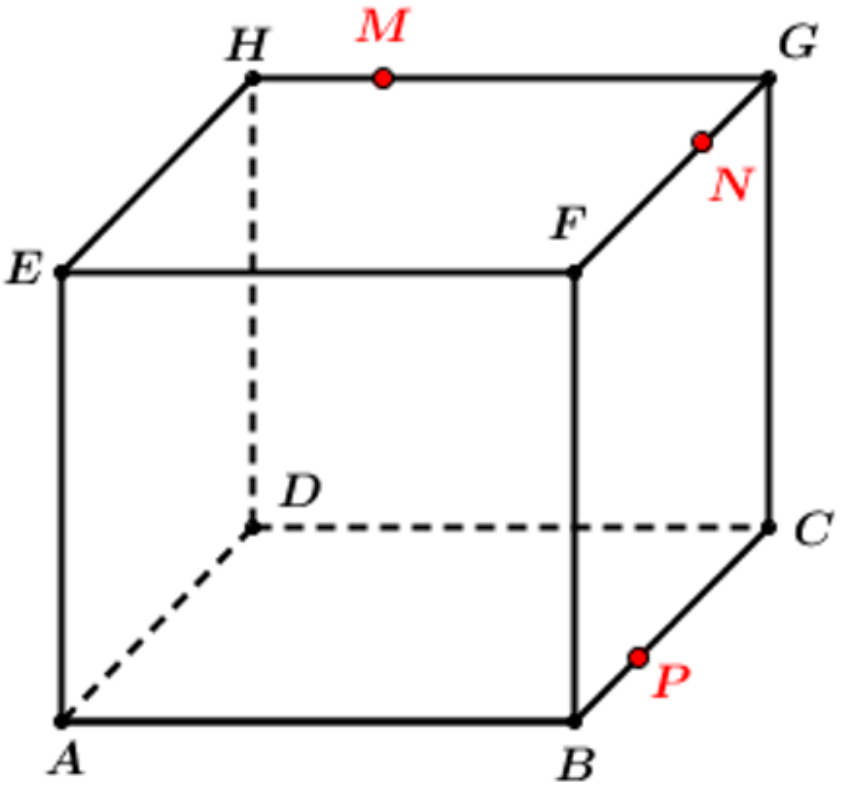
- مربع إذا كان المستوي $(\mathscr{P})$ موازيا لأحد أوجه المكعب .
- قطعة مستقيمة أو مستطيل إذا كان المستوي $(\mathscr{P})$ موازيا لأحد أحرف المكعب .
- نقطة ، مثلث ، سداسي الاضلاع

متوازي أضلاع ، شبه منحرف أو خماسي في الحالات الأخرى.

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

إنشاء مقطع مكعب بمستو :

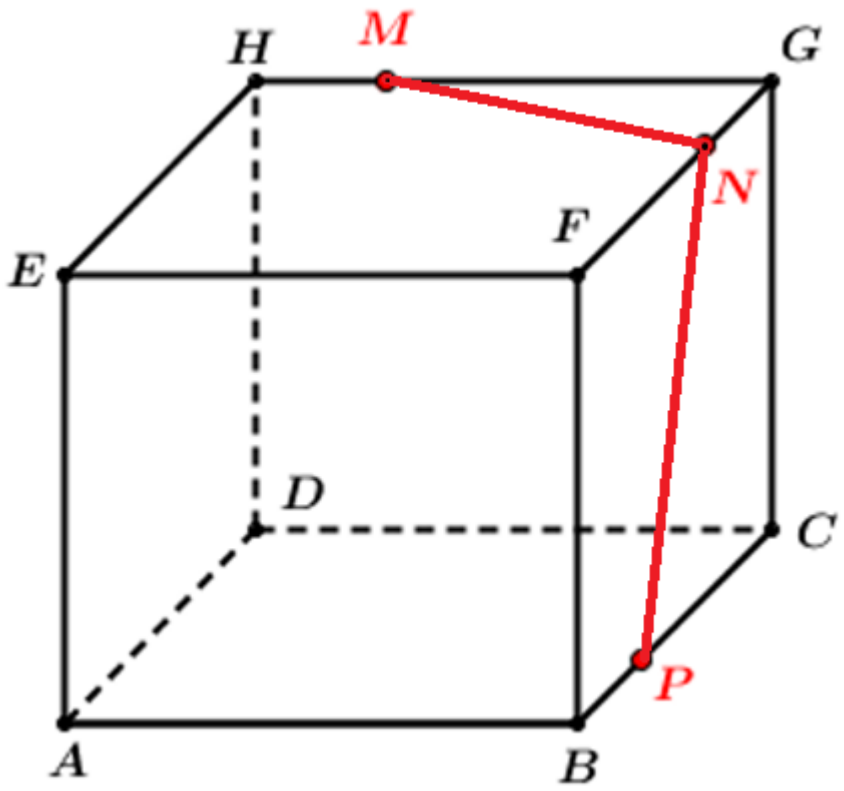
مثال 1 :



$ABCDEFGH$ مكعب و M ، N و P

ثلاث نقط من الاحرف $[GH]$، $[FG]$ و $[BC]$

- أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNP).



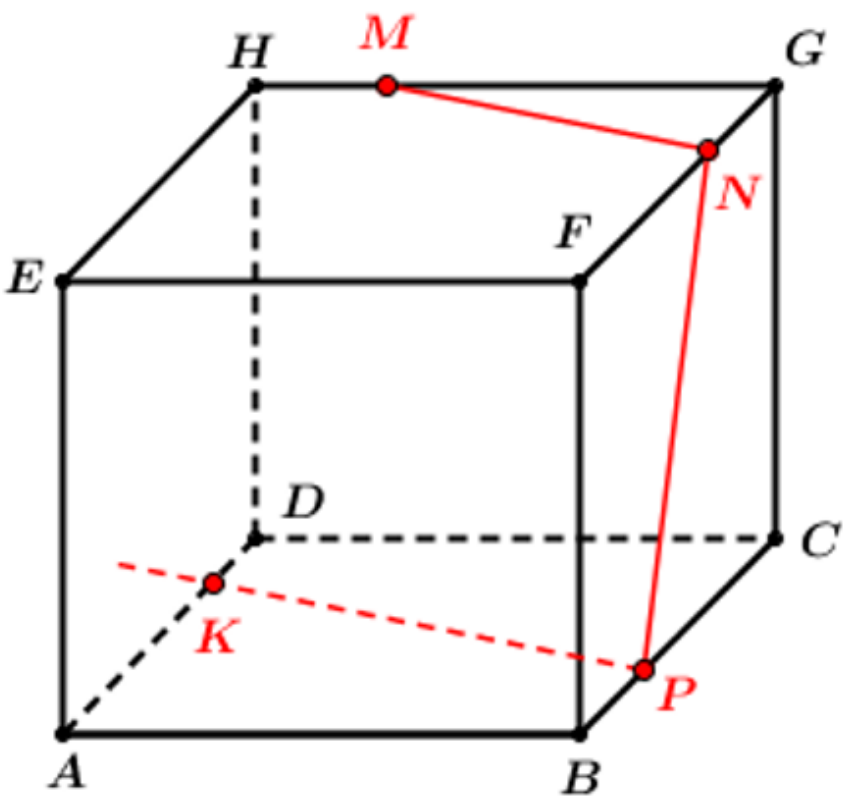
الحل :

1- لدينا مباشرة من الشكل

$$(MNP)\cap EFGH=[MN]$$

$$(MNP)\cap BCGF=[PN]$$

2- لدينا



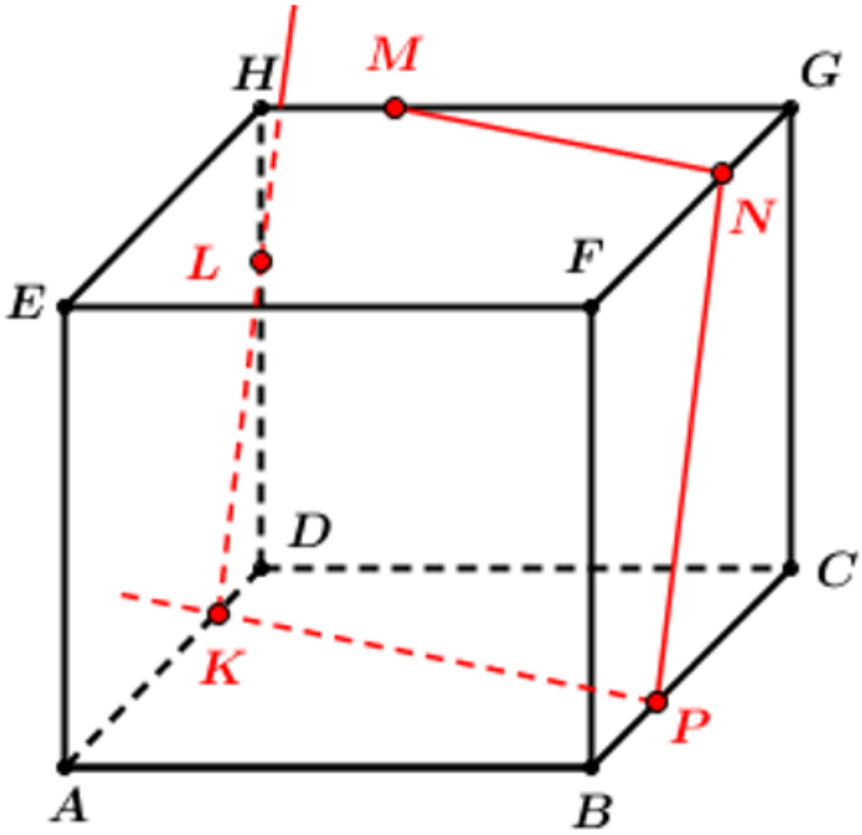
$$\begin{cases} (ABCD) \parallel (EFGH) \\ (MNP) \cap BCGF = [PN] \\ P \in [BC] \end{cases}$$

فان المستوي (MNP) يقطع المستوي $(ABCD)$

وفق مستقيم يمر من P ويوازي (NM)

فيقطع $[AD]$ في النقطة K

3- لدينا



$$\begin{cases} (ADHE) \parallel (BCGF) \\ (MNP) \cap ABCD = [PK] \\ K \in [AD] \end{cases}$$

فان المستوي (MNP) يقطع المستوي $(ADHE)$

وفق مستقيم يمرمن K ويوازي (PN)

فيقطع $[DH]$ في النقطة L.

4- أخيرا المستوي (MNP)

يقطع كل من المستقيمين المتقاطعين

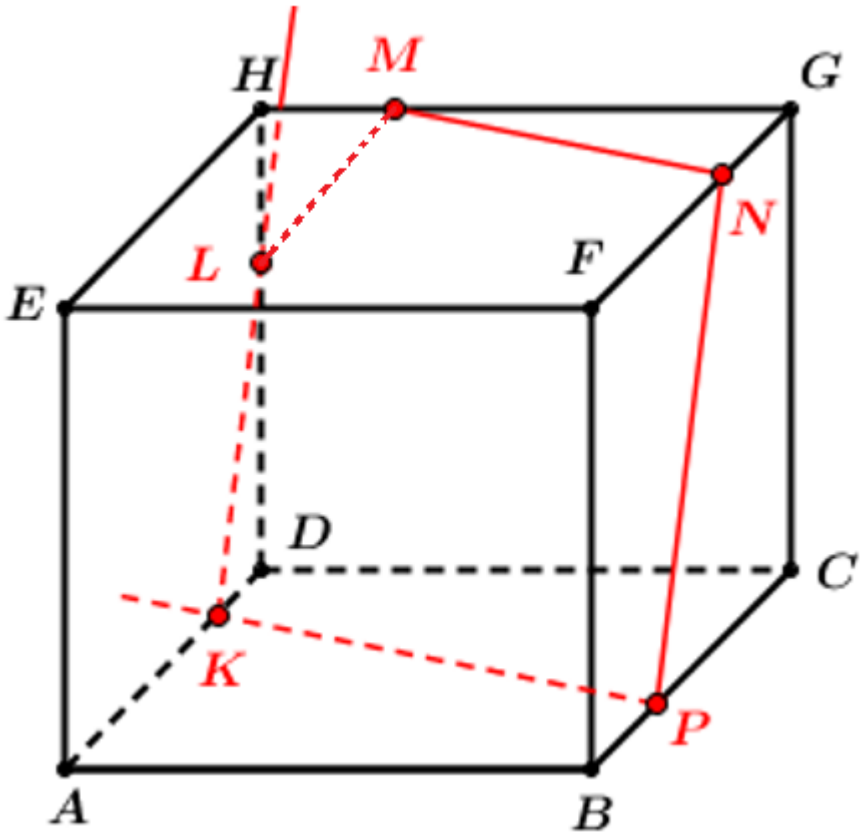
(HG) و (DH)

في النقطتين M و L على الترتيب

ومنه المستوي (MNP)

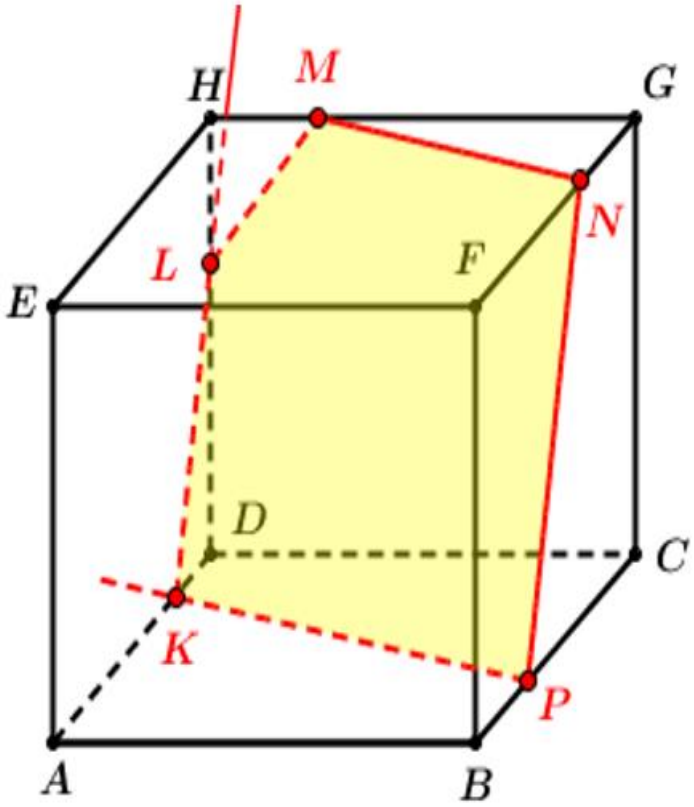
يقطع الوجه $DCGH$

وفق القطعة $[LM]$



إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان

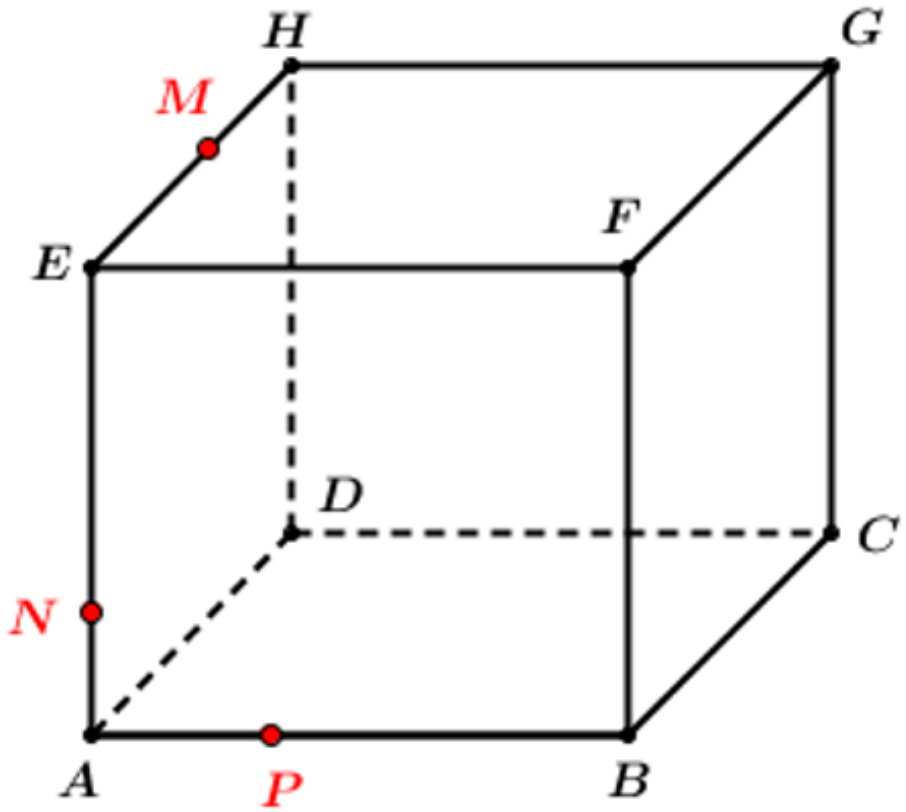


المستوي (MNP) يقطع المكعب $ABCDEFGH$
وفق خماسي الاضلاع $MNPKL$

القطعة		الوجه		المستوي
$\varnothing$	وفق	$ABFE$	//	(MNP)
$[KP]$		$ABCD$		
$[PN]$		$BCGF$		
$[NM]$		$EFGH$		
$[ML]$		$DCGH$		
$[LK]$		$ADHE$		

مثال 2 :

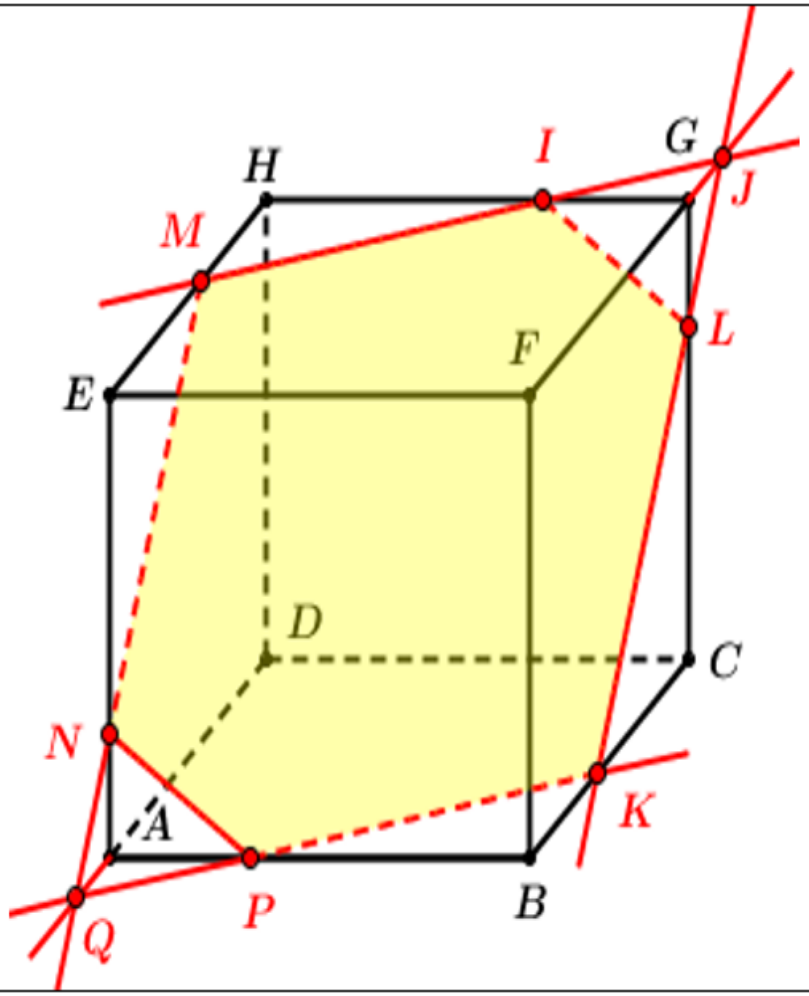
$ABCDEFGH$ مكعب و M ، N و P ثلاث نقط من الاحرف $[EH]$، $[AE]$ و $[AB]$ كما هو موضح في الشكل المقابل .



- أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNP)

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان



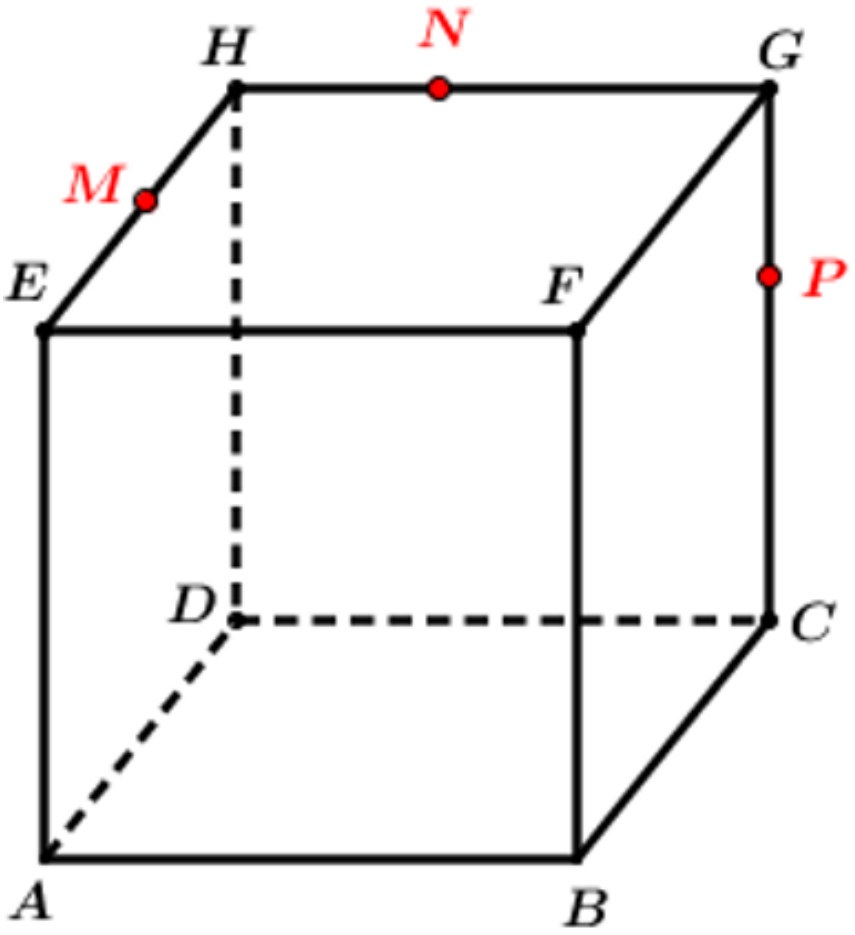
المستوي (MNP) يقطع المكعب $ABCDEFGH$

وفق سداسي الاضلاع $MNPKLI$

القطعة		الوجه		المستوي
$[NP]$	وفق	$ABFE$	وفق	(MNP)
$[PK]$		$ABCD$		
$[KL]$		$BCGF$		
$[LI]$		$DCGH$		
$[IM]$		$EFGH$		
$[MN]$		$ADHE$		

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تطبيق



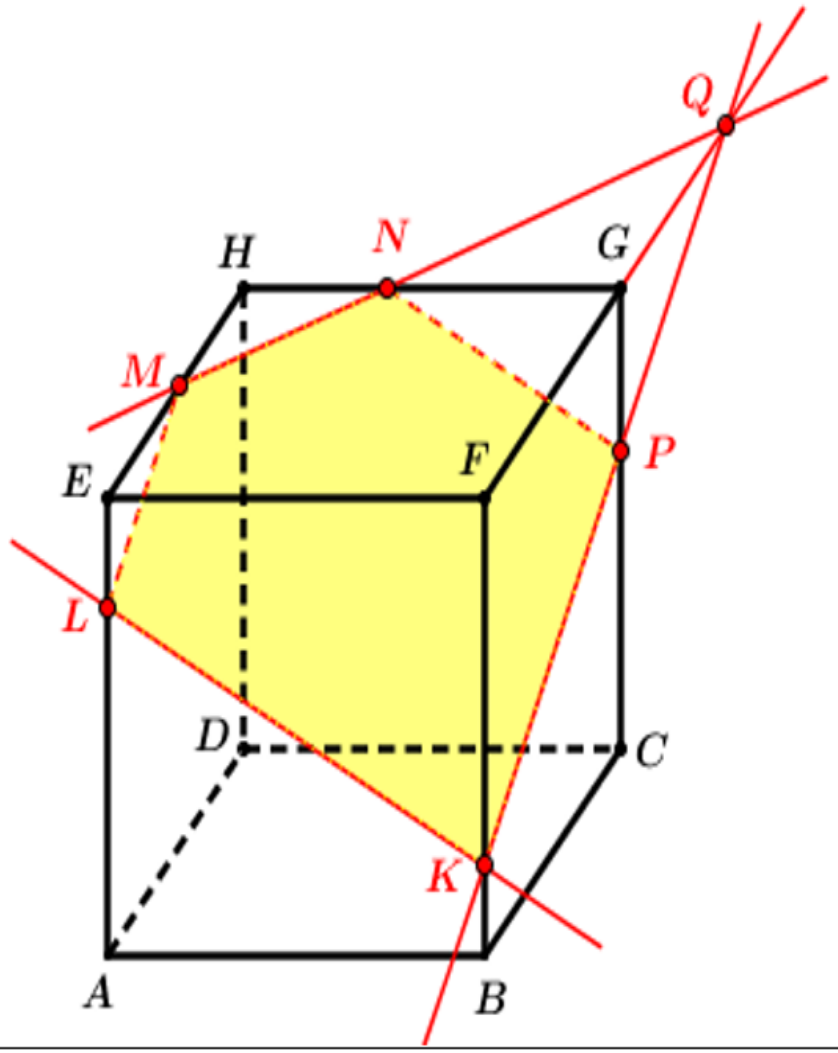
$ABCDEFGH$ مكعب

- M نقطة من الحرف $[EH]$
- N نقطة من الحرف $[HG]$
- P نقطة من الحرف $[GC]$

- أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNP)

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان



(2)

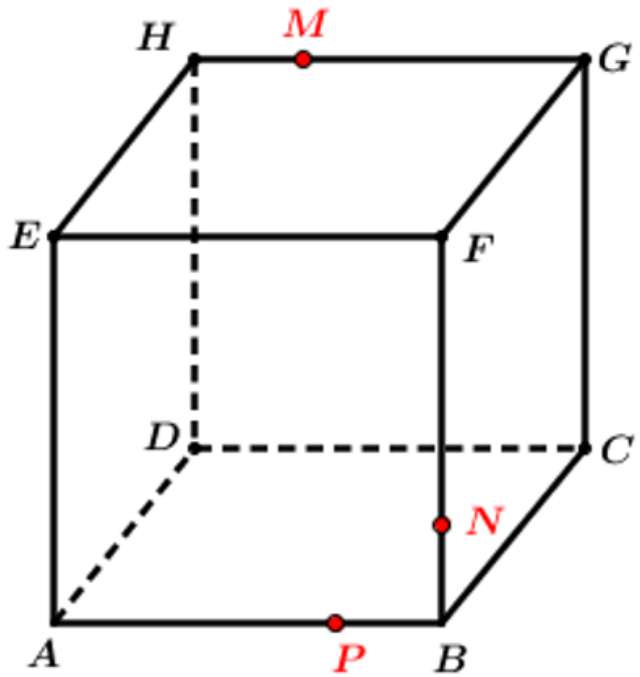
المستوي (MNP) يقطع المكعب $ABCDEFGH$

وفق خماسي الاضلاع $MNPKL$

القطعة		الوجه		المستوي
$[MN]$	وجه	$EFGH$	وجه	(MNP)
$[NP]$		$DCGH$		
$[PK]$		$BCGF$		
$[KL]$		$ABFE$		
$[LM]$		$ADHE$		
$\varnothing$		$ABCD$		

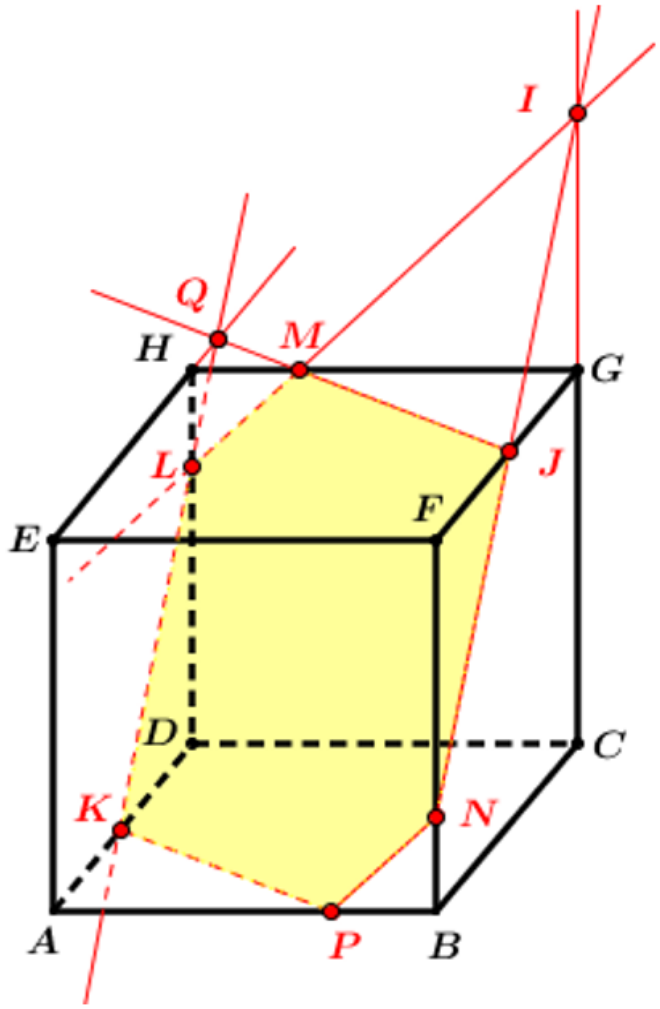
إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تطبيق

1	$ABCDEFGH$ مكعب • M نقطة من الحرف $[HG]$ • N نقطة من الحرف $[FB]$ • P نقطة من الحرف $[AB]$ كما هو موضح في الشكل المقابل. • أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNP)	

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان



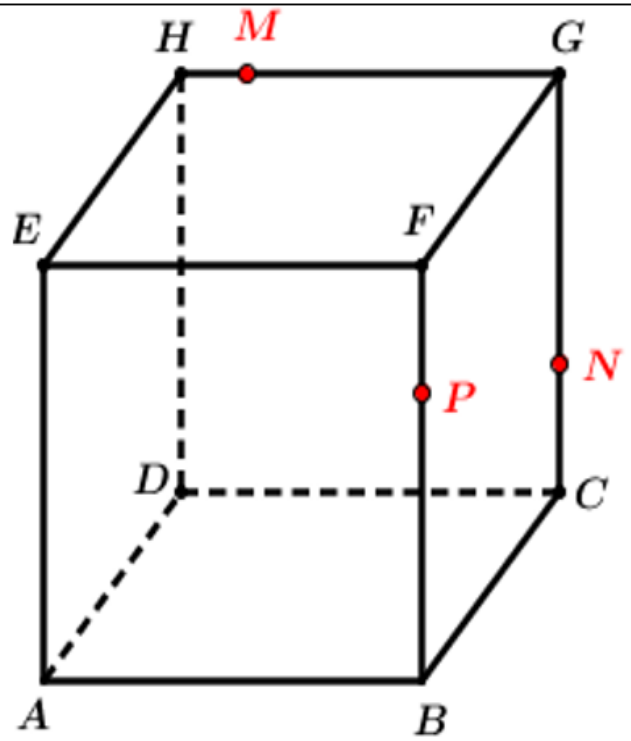
(1)

المستوي (MNP) يقطع المكعب $ABCDEFGH$

وفق سداسي الاضلاع $MNPKLI$

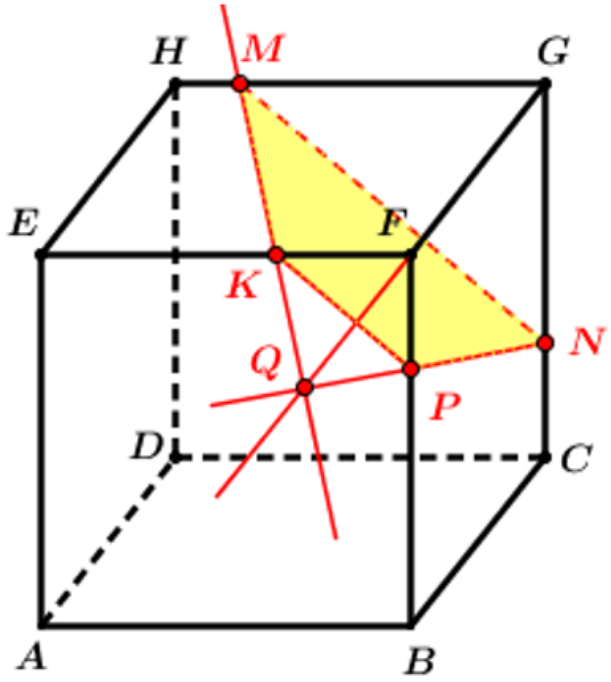
القطعة		الوجه		المستوي
$[PN]$	وفق	$ABFE$	توازي	(MNP)
$[NJ]$		$BCGF$		
$[JM]$		$EFGH$		
$[ML]$		$DCGH$		
$[LK]$		$ADHE$		
$[KP]$		$ABCD$		

تطبيق

3	$ABCDEFGH$ مكعب • M نقطة من الحرف $[HG]$ • N نقطة من الحرف $[GC]$ • P نقطة من الحرف $[BF]$ كما هو موضح في الشكل المقابل . • أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNP)	

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان

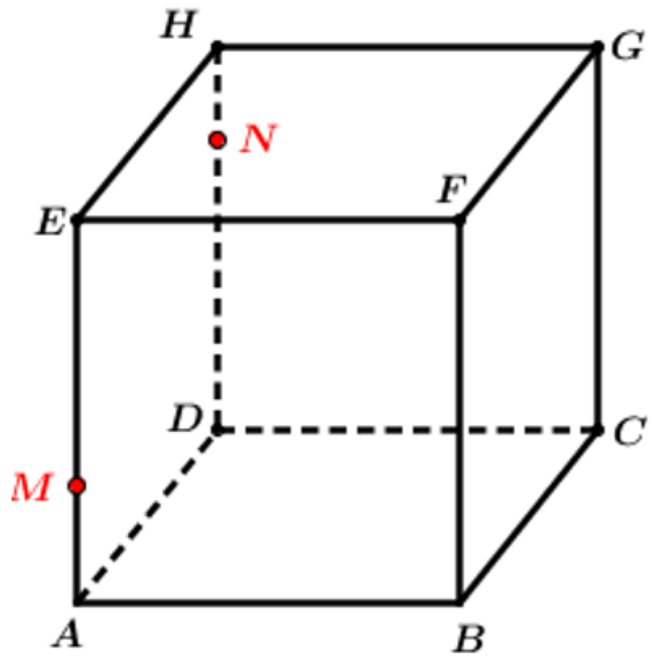


(3)

المستوي (MNP) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق شبه المنحرف $MNPK$

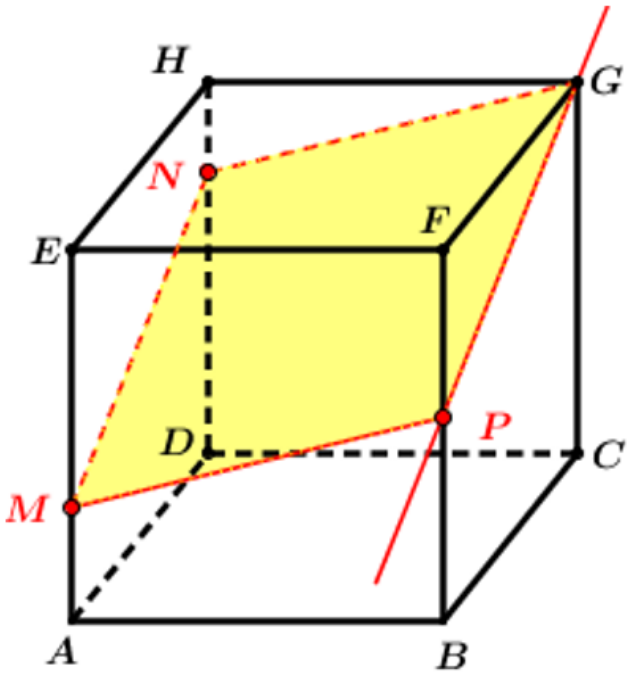
القطعة		الوجه		المستوي
$[MN]$		$DCGH$		(MNP)
$[NP]$		$BCGF$		
$[PK]$		$ABCD$		
$[KM]$		$EFGH$		
$\varnothing$		$ABFE$		
$\varnothing$		$ADHE$		

تطبيق

4	$ABCDEFGH$ مكعب • M نقطة من الحرف $[DH]$ • N نقطة من الحرف $[AE]$ كما هو موضح في الشكل المقابل . • أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNG)	

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان

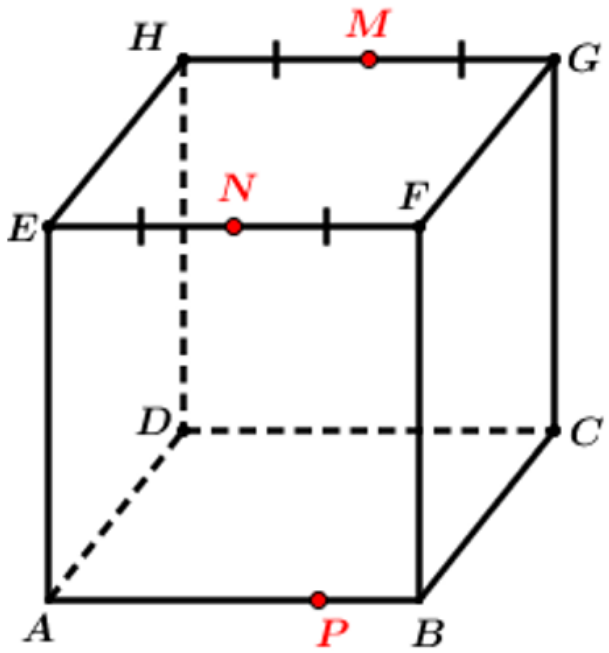


(4)

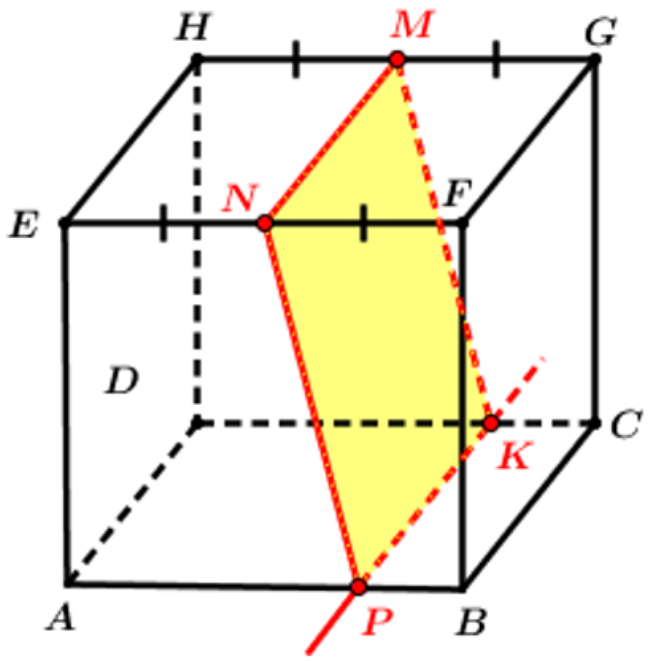
المستوي (MNG) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق متوازي أضلاع $MNGP$

القطعة		الوجه		المستوي
$[MN]$	وفق	$ADHE$	يوازي	(MNG)
$[NG]$		$DCGH$		
$[GP]$		$BCGF$		
$[PM]$		$ABCD$		
$\{G\}$		$EFGH$		
$\varnothing$		$ABFE$		

تطبيق

5	$ABCDEFGH$ مكعب • M منتصف الحرف $[HG]$ • N منتصف الحرف $[EF]$ • P نقطة من الحرف $[AB]$ كما هو موضح في الشكل المقابل . • أنشئ مقطع المكعب بالمستوي (MNP)	

النتيجة هي ان



(5)

المستوي (MNP) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق المستطيل $MNPK$

القطعة		الوجه		المستوي
$[MN]$	//	$EFGH$	//	(MNP)
$[NP]$	//	$ABFE$	//	
$[PK]$	//	$ABCD$	//	
$[KM]$	//	$DCGH$	//	
$\varnothing$	//	$ADHE$	//	
$\varnothing$	//	$BCGF$	//	

المـــقاطـــــع المســـــتويـــة

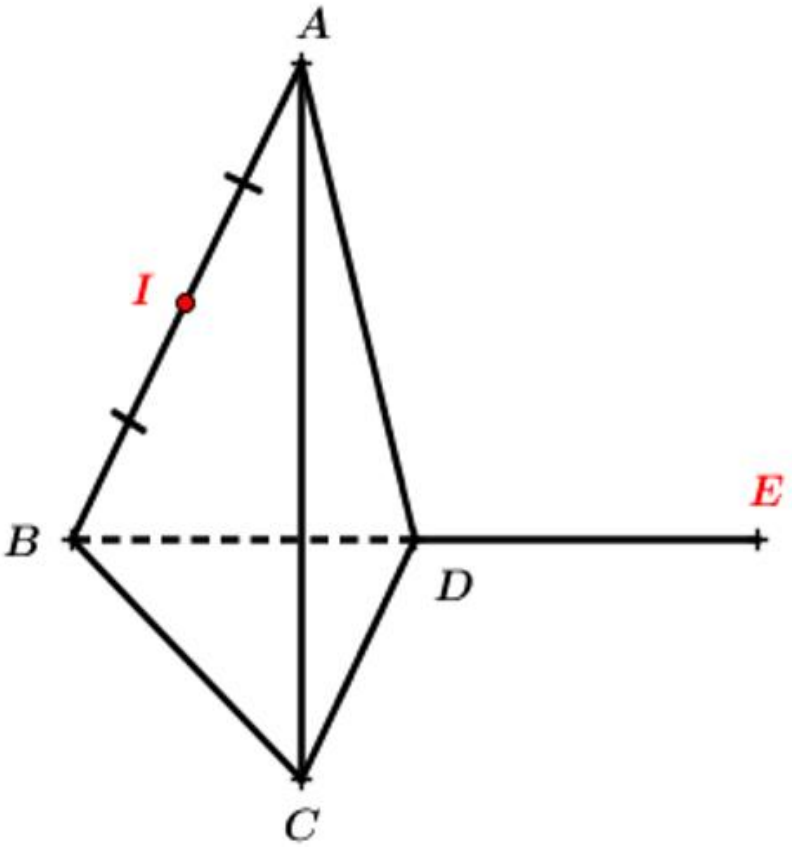
لرباعي وجـوه

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

نشاط 2: (الكتاب المدرسي ص238)

تذكرة :

إذا كان مستقيم موازيا لمستويين متقاطعين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ يكون موازيا للمستقيم $(\mathcal{D})$ تقاطع $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$.



نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ولتكن النقطتان I و E حيث I منتصف $[AB]$

و E نظيرة B بالنسبة إلى D .

نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيم (IE) و الموازي للمستقيم (CD) .

1- عين تقاطع المستوي $(\mathscr{P})$ مع المستوي (ABD) .

2- بين أن تقاطع المستويين $(\mathscr{P})$ و (BCD) هو المستقيم الذي يشمل النقطة E و يوازي المستقيم (CD).

- أنشئ المستقيم (Δ) .

3- أنشئ المستقيم (Δ') تقاطع المستويين $(\mathscr{P})$ و (ABC) .

4- أنشئ تقاطع المستوي $(\mathscr{P})$ مع رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

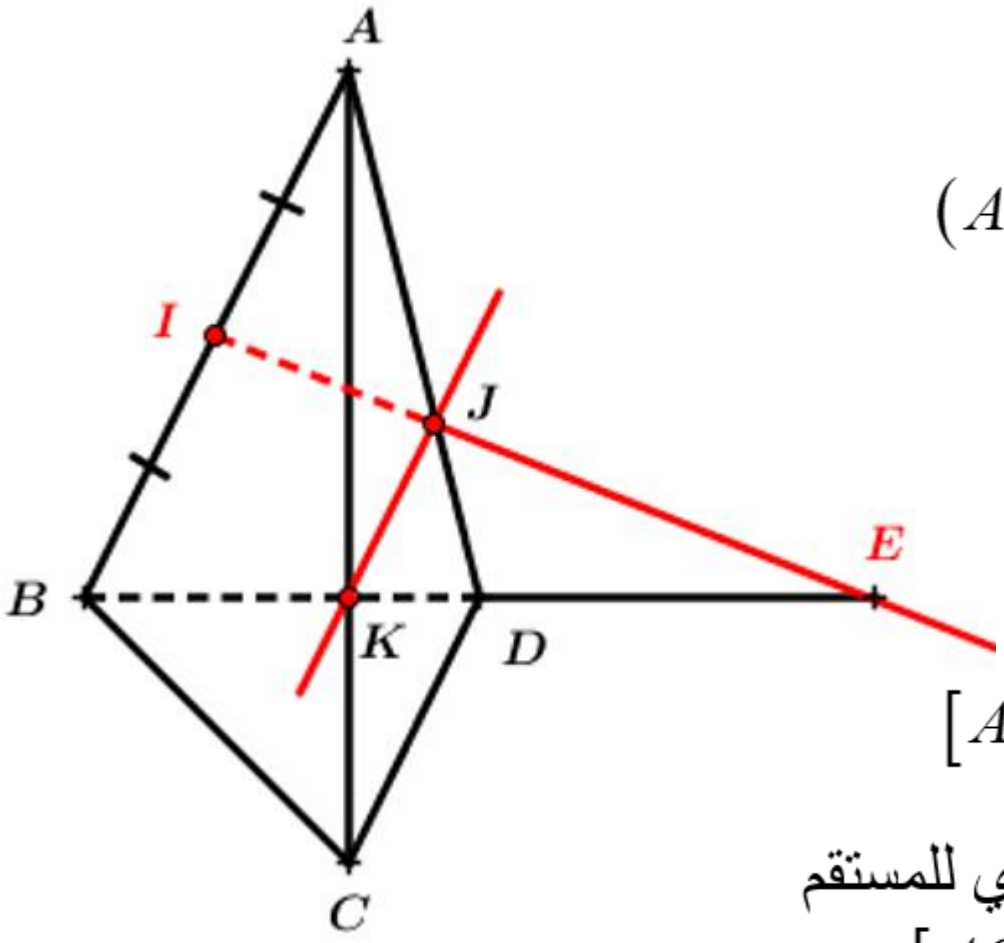
1- تعين تقاطع المستوي $(\mathscr{P})$ مع المستوي (ABD)

لدينا $(\mathscr{P})\parallel(CD)$ و $(IE)\subset(\mathscr{P})$

فان المستوي $(\mathscr{P})$ يقطع المستوي (ABD)

وفق (JK) مستقيم يوازي (CD)

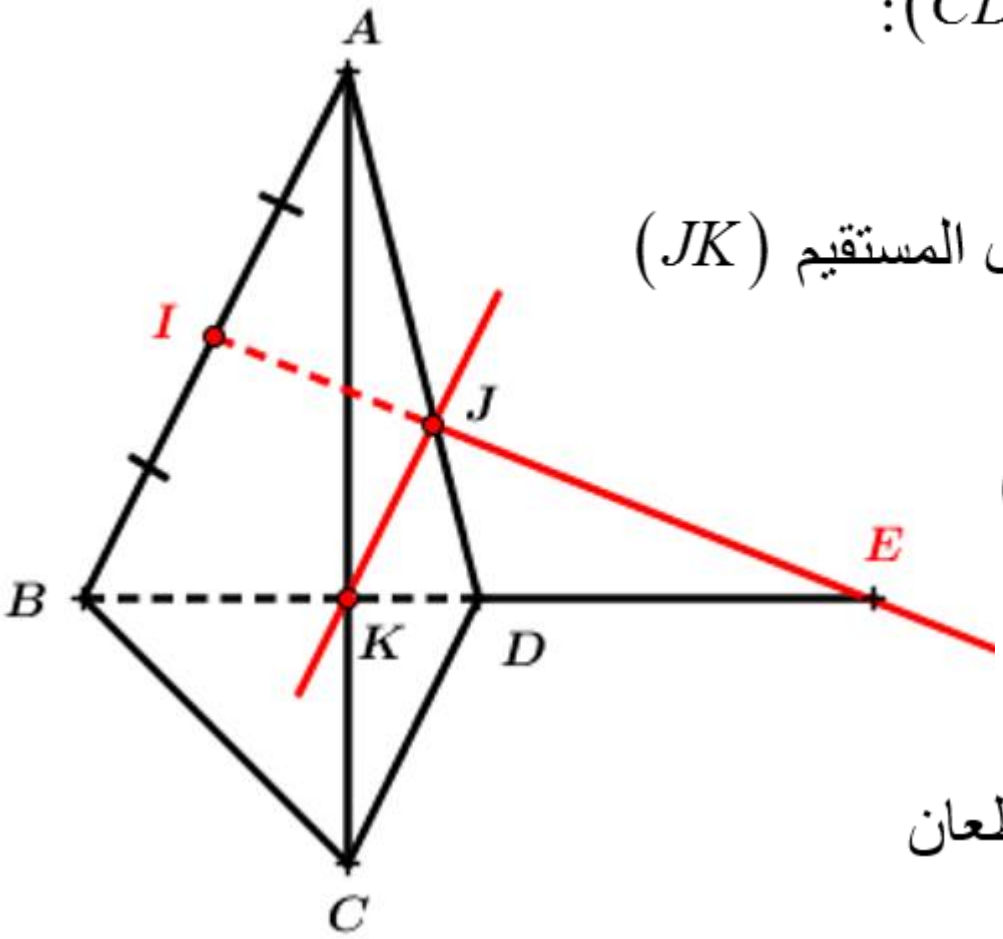
فنحصل على النقطة J.



من تقاطع المستقيم (IE) و القطعة $[AD]$

و النقطة K من تقاطع المستقيم الموازي للمستقم (CD) والمار من النقطة J و القطعة $[AC]$.

2- التحقق ان المستويين $(\mathscr{P})$ و (BCD) متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة E و يوازي المستقيم (CD):



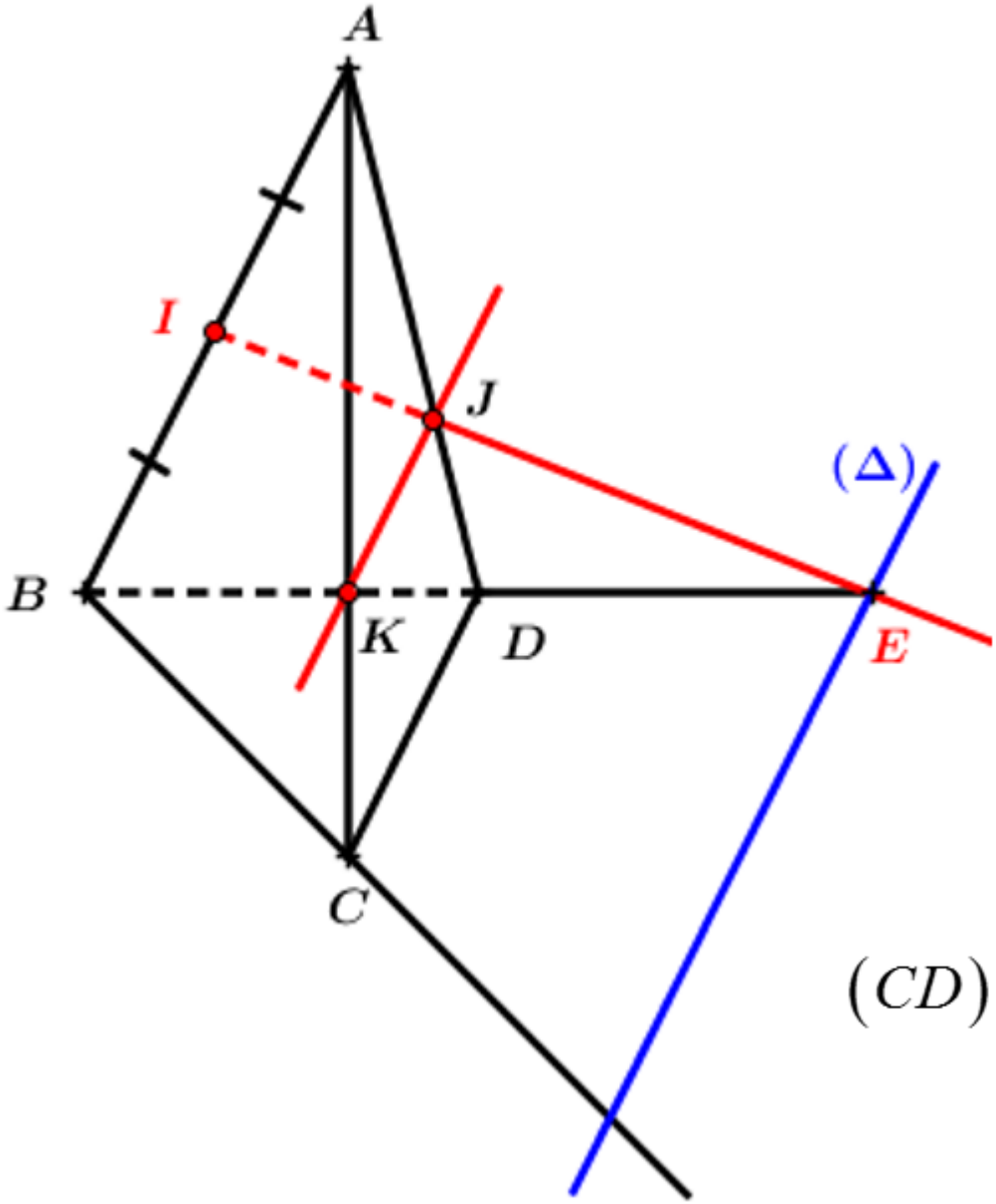
بما ان المستوي $(JKE) = (\mathscr{P})$ يشمل المستقيم (JK)

و المستوي (BCD) يشمل (CD)

(حسب مبرهنة السقف)

فان المستويين $(\mathscr{P})$ و (BCD) يتقاطعان

و فق مستقيم يشمل النقطة E ويوازي (CD)



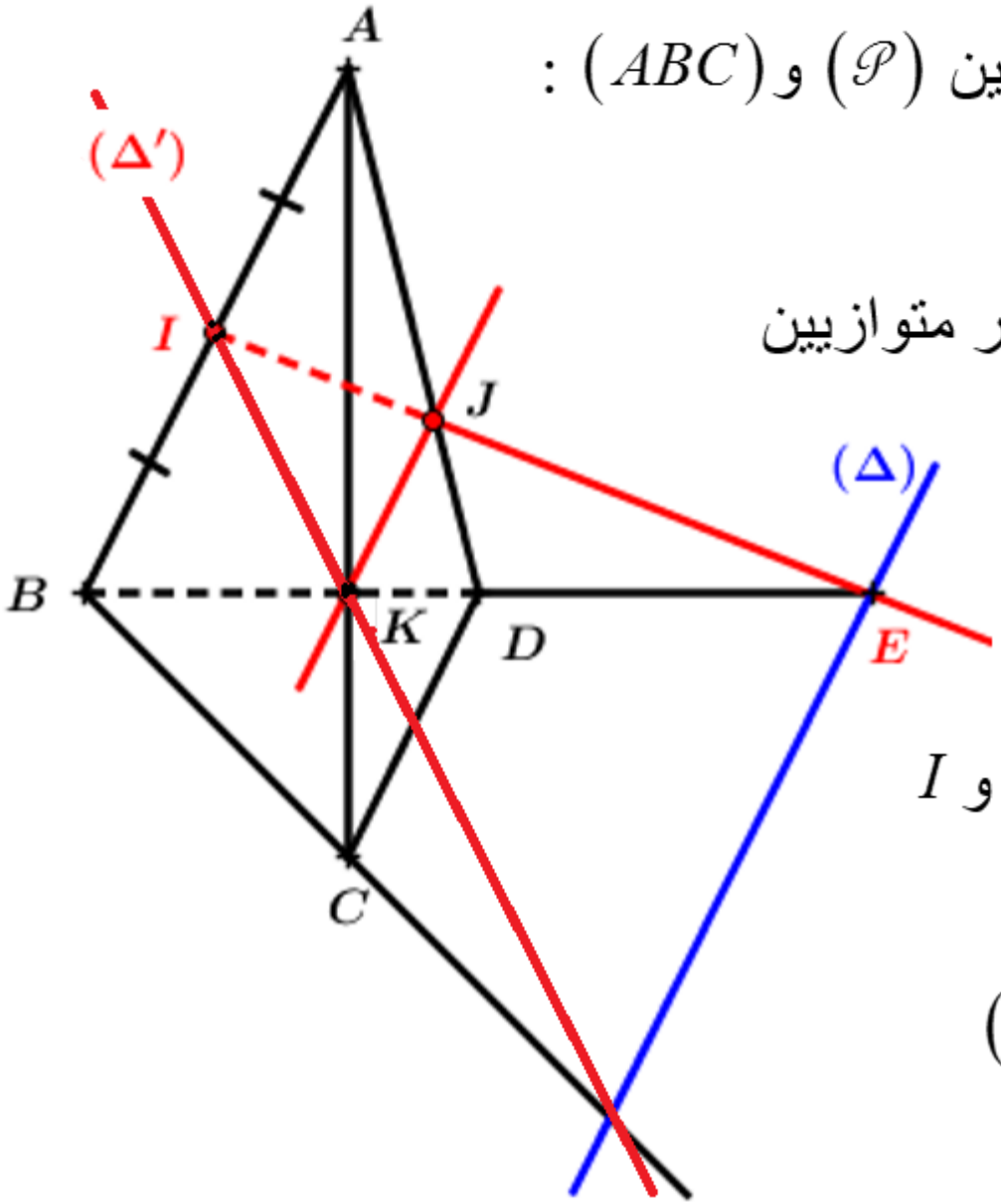
- أنشئ المستقيم (Δ)

بما ان $(\Delta)=(BCD)\cap(\mathscr{P})$

فان

المستقيم (Δ) يشمل النقطة E ويوازي (CD)

3- إنشاء المستقيم (Δ') تقاطع المستويين $(\mathscr{P})$ و (ABC) :

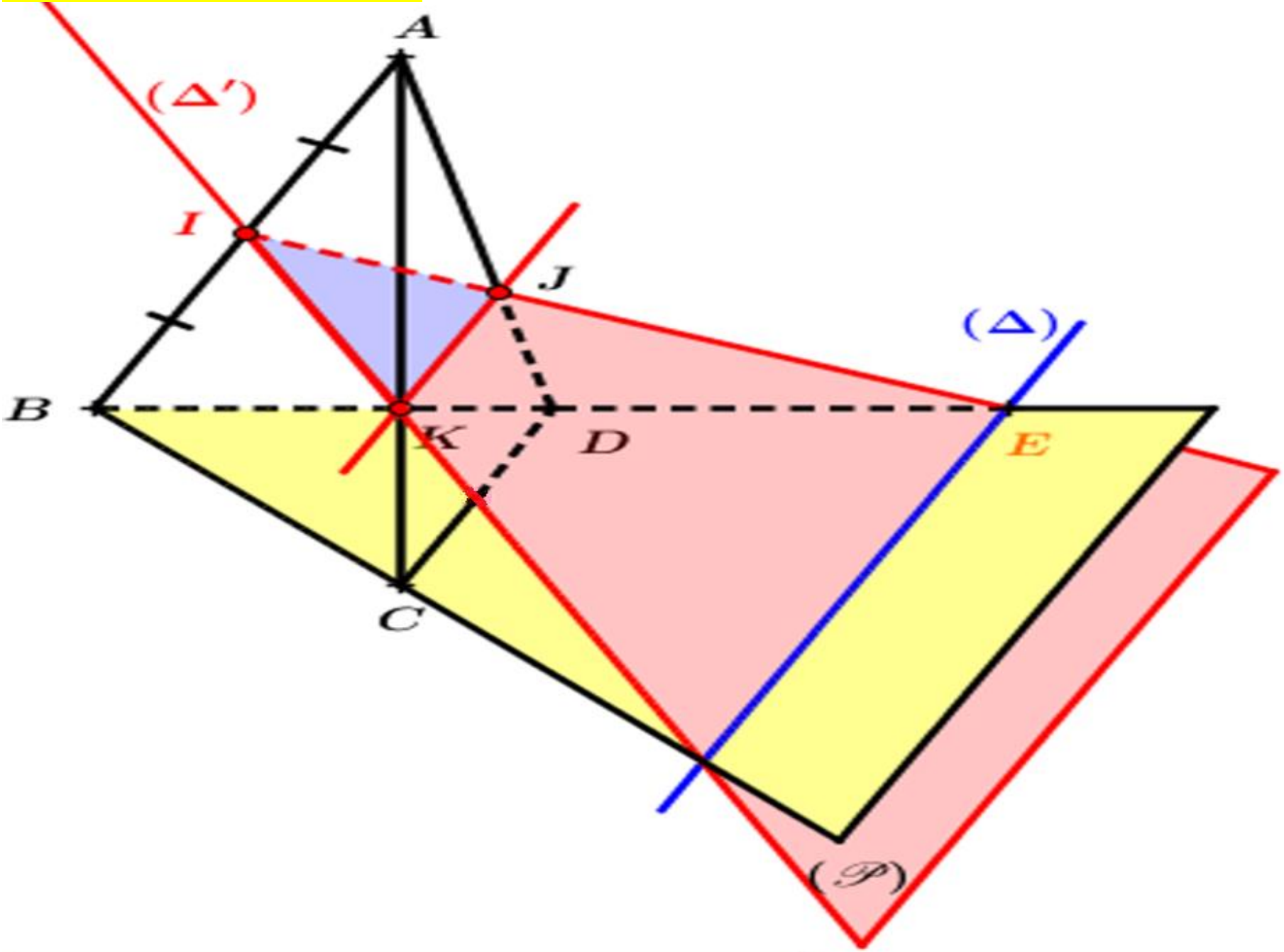


بما ان المستويين $(\mathscr{P})$ و (ABC) غير متوازيين

ويشتركان في النقطتين المتمايزتين K و I

إذا مستقيم تقاطعهما هو $(\Delta')=(IK)$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين



المقاطع المستوية لرباعي وجوه :

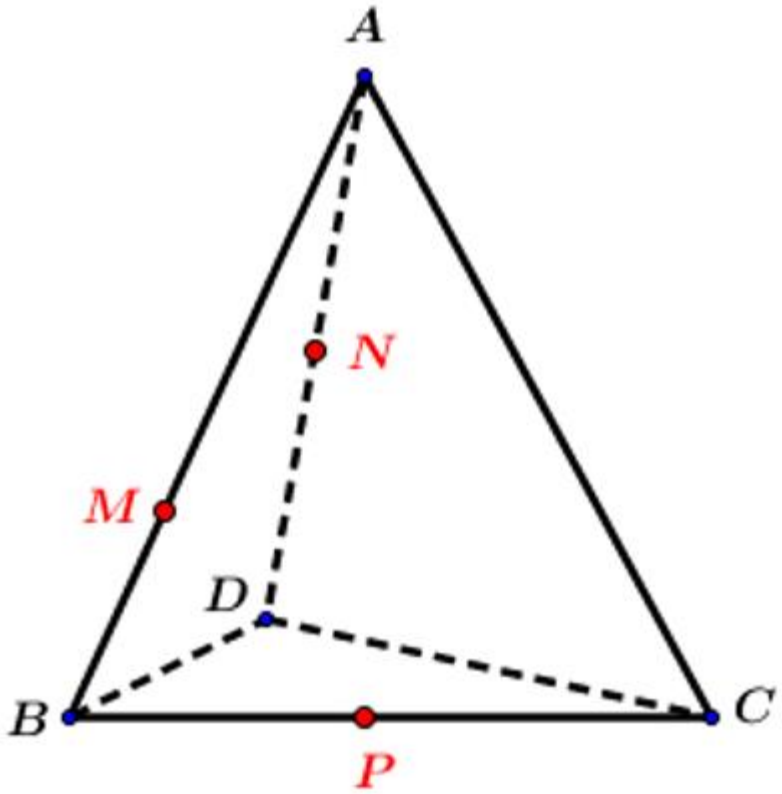
مقطع رباعي وجوه بمستو $(\mathscr{P})$ هو :

- نقطة أو مثلث إذا كان المستوي $(\mathscr{P})$ موازيا لأحد أوجه رباعي الوجوه .
- نقطة ، قطعة مستقيمة أو رباعي في الحالات الاخرى .

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

إنشاء مقطع رباعي الوجوه بمستو :

مثال:



$ABCD$ رباعي وجوه حيث :

M نقطة من الحرف $[AB]$

و النقطة N من الحرف $[AD]$

و النقطة P من الحرف $[BC]$

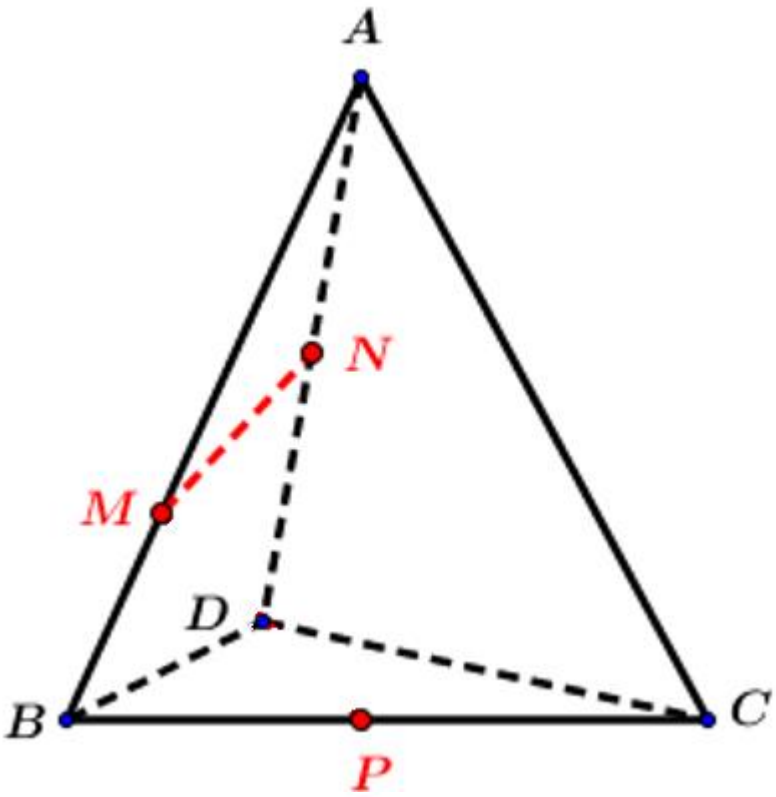
كما هو موضح في الشكل المقابل .

أنشئ مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (MNP)

الحل :

1- تقاطع الوجه ABD والمستوي (MNP) :

بما ان النقطتين M و N تنتميان للمستويين (ABD) و (MNP)



إذا $(MNP)\cap(ABD)=(NM)$

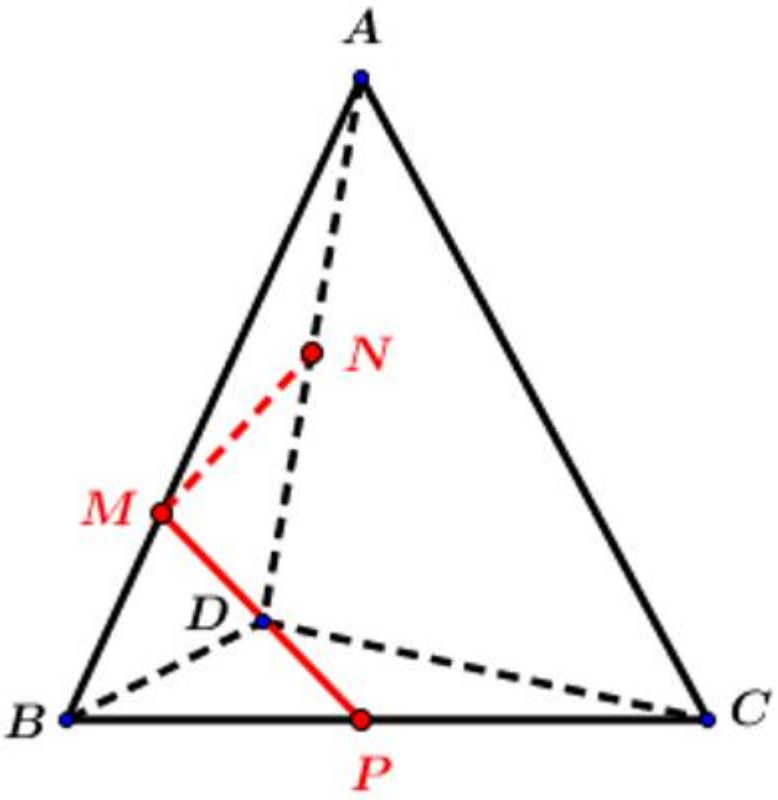
وبما ان $M\in[AB]$ و $N\in[AD]$

فان المستوي (MNP)

يقطع الوجه ABD وفق القطعة $[NM]$

2- تقاطع الوجه ABC والمستوي (MNP) :

بما ان النقطتين M و P تنتميان للمستويين (ABC) و (MNP)



إذا $(MNP)\cap(ABC)=(MP)$

وبما ان $M\in[AB]$ و $P\in[BC]$

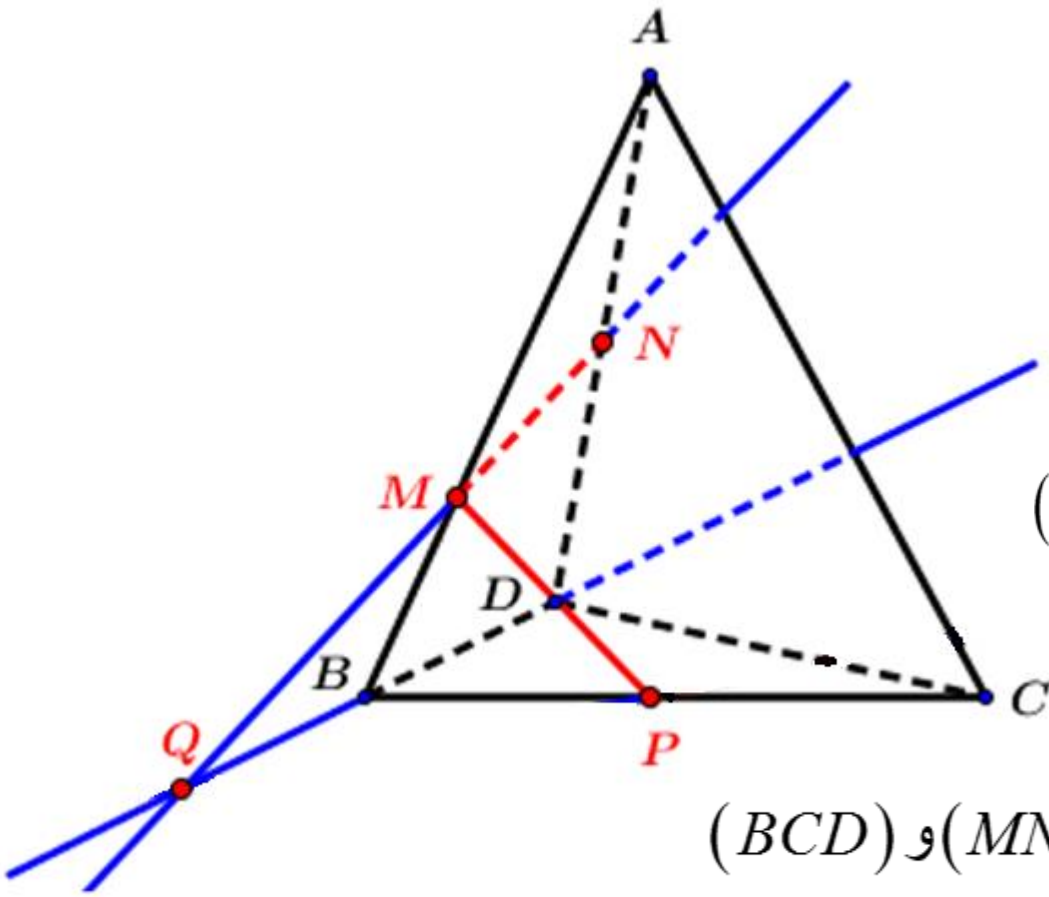
فان المستوي (MNP)

يقطع الوجه ABC وفق القطعة $[MP]$

3- تقاطع الوجه BCD والمستوي (MNP) :

المستقيمين (NM) و (DB) من نفس المستوي ABD

و يتقاطعان في نقطة ولتكن Q



ومن جهة اخرى المستقيم (NM)

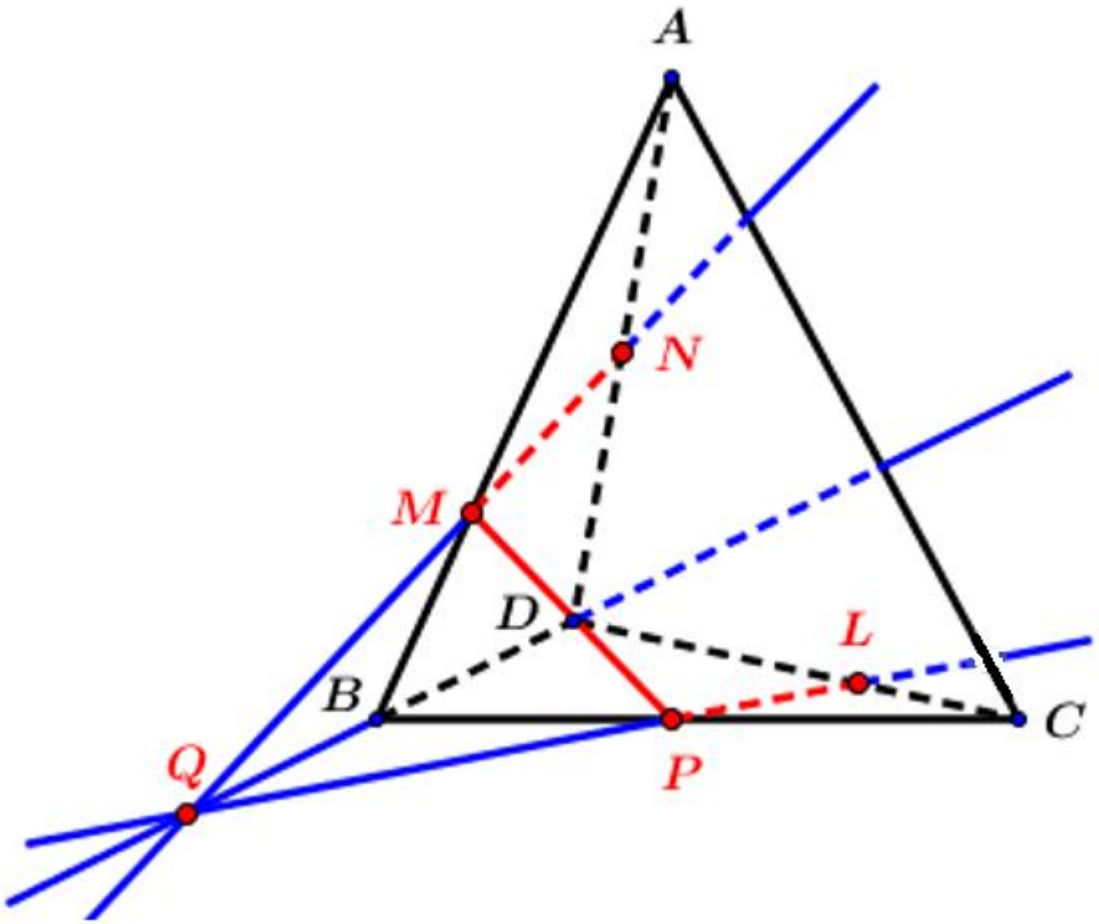
و المستقيم (DB) محتواة في المستوي (BCD)

فان النقطة Q تنتمي للمستويين (MNP) و (BCD)

و كذلك النقطة P تنتمي للمستويين (MNP) و (BCD)

إذا (QP) هو مستقيم تقاطع المستويين (MNP) و (BCD)

و المستقيم (QP) يقطع القطعة $[CD]$ فى النقطة L



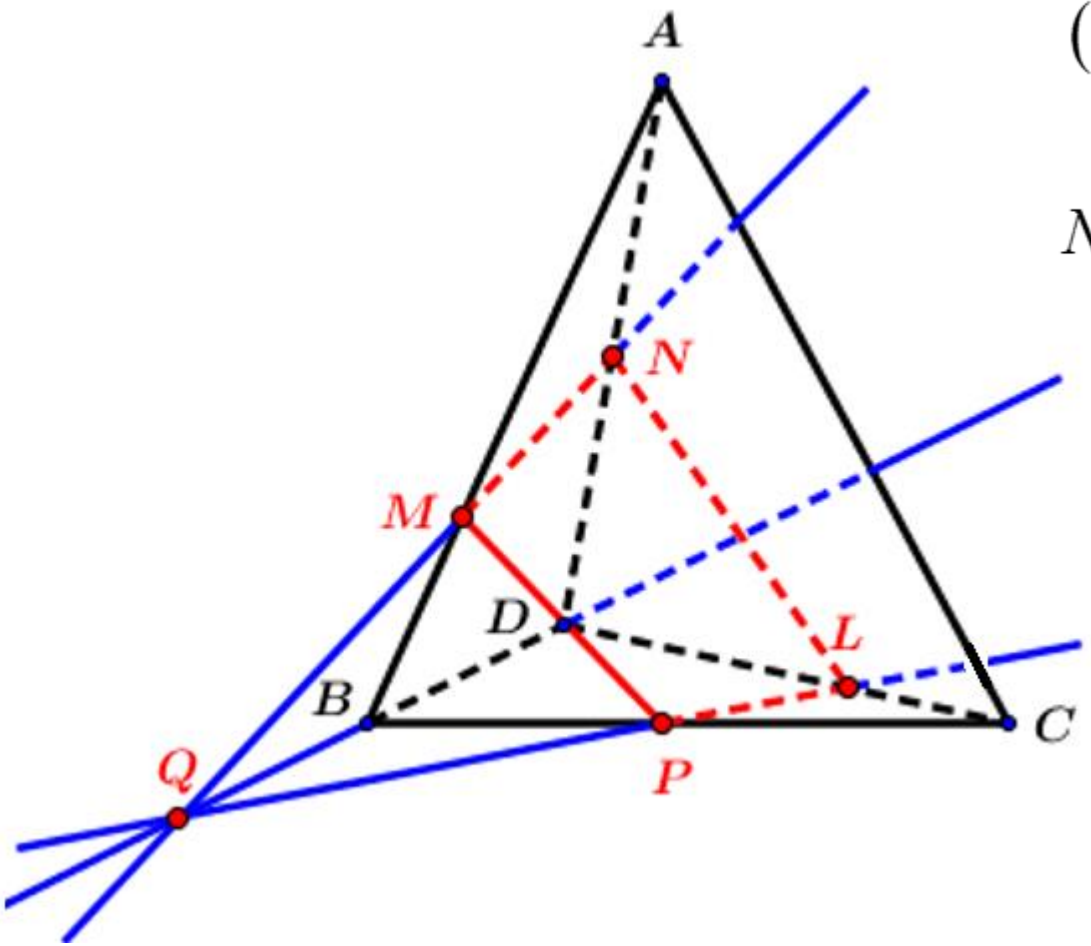
وبذلك المستوي (MNP)

يقطع الوجه BCD

وفق القطعة $[PL]$

4- تقاطع الوجه ADC والمستوي (MNP)

بما ان النقطتين N و L تنتميان للمستويين (ADC)و (MNP)



إذا $(MNP)\cap(ADC)=(LN)$

وبما ان $L\in[DC]$ و $N\in[AD]$

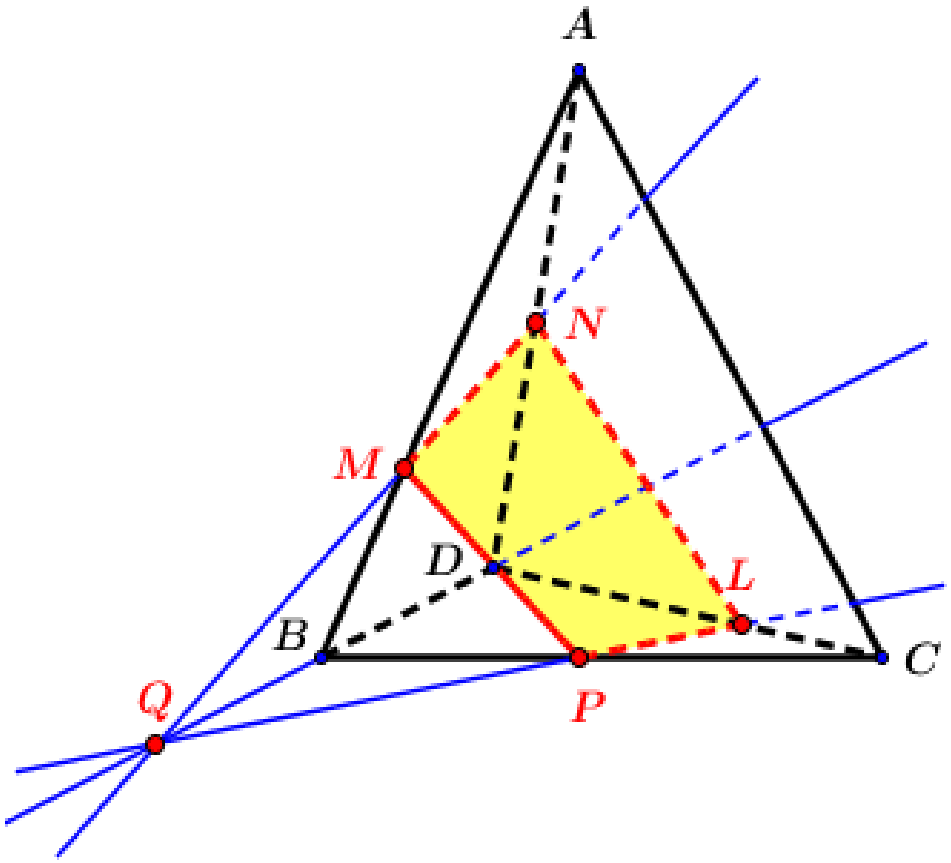
فان المستوي (MNP)

يقطع الوجه ADC

وفق القطعة $[LN]$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

5- الخلاصة :



المستوي (MNP) يقطع رباعي الوجوه $ABCD$ وفق الرباعي $NMPL$

القطعة	الوجه	المستوي
$[NM]$	ABD	(MNP)
$[MP]$	ABC	
$[PL]$	BCD	
$[LN]$	ADC	

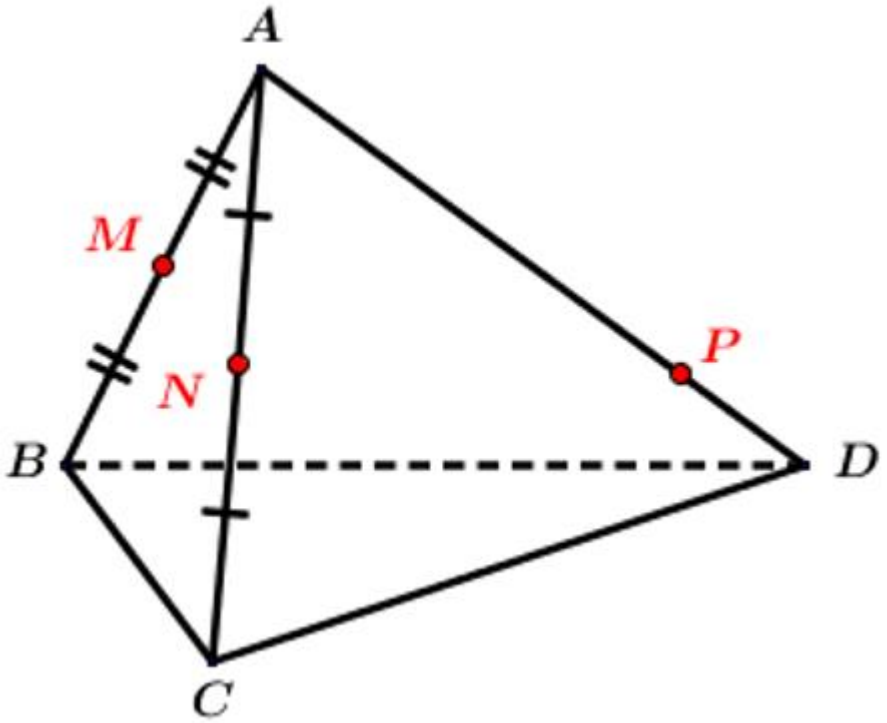
تطبيق

$ABCD$ رباعي وجوه كما هو موضح في الشكل المقابل حيث :

النقطة M منتصف الحرف $[AB]$

و النقطة N منتصف الحرف $[AC]$

و النقطة P من الحرف $[AD]$ وتختلف عن منتصفها



1- أنشئ مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (MNP)

2- حدد تقاطع المستويين (MNP) و (BCD)

- انشئ مستقيم تقاطعهما

في حالة $(PD < PA)$

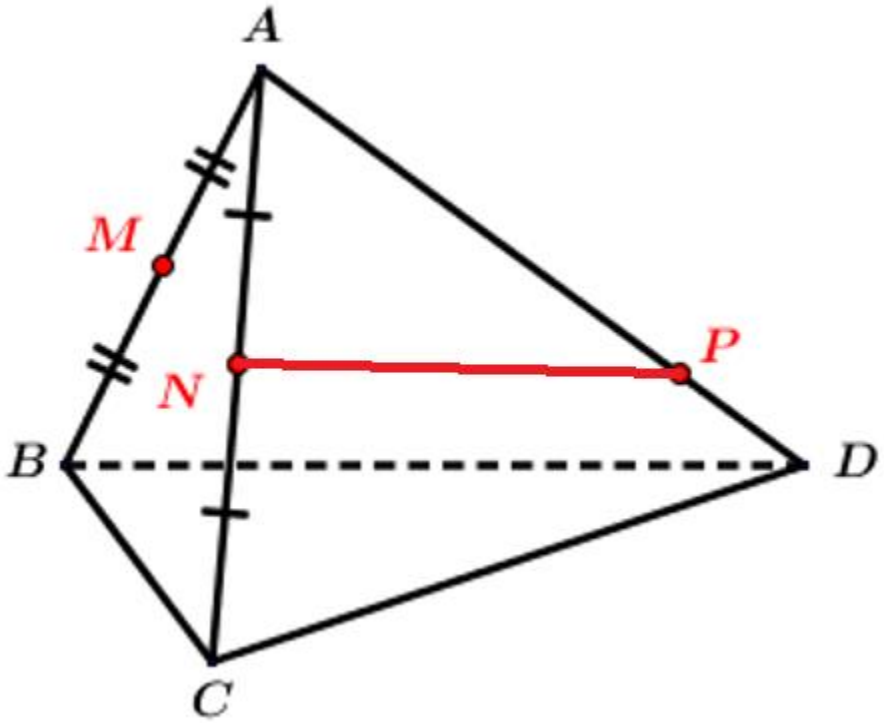
ثم حالة $(PD > PA)$

3- ماذا يمكن القول بالنسبة للمستويين (MNP)و (BCD)

في حالة النقطة P تكون منتصف القطعة $[AD]$.

الحل :

1- أنشئ مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (MNP) :

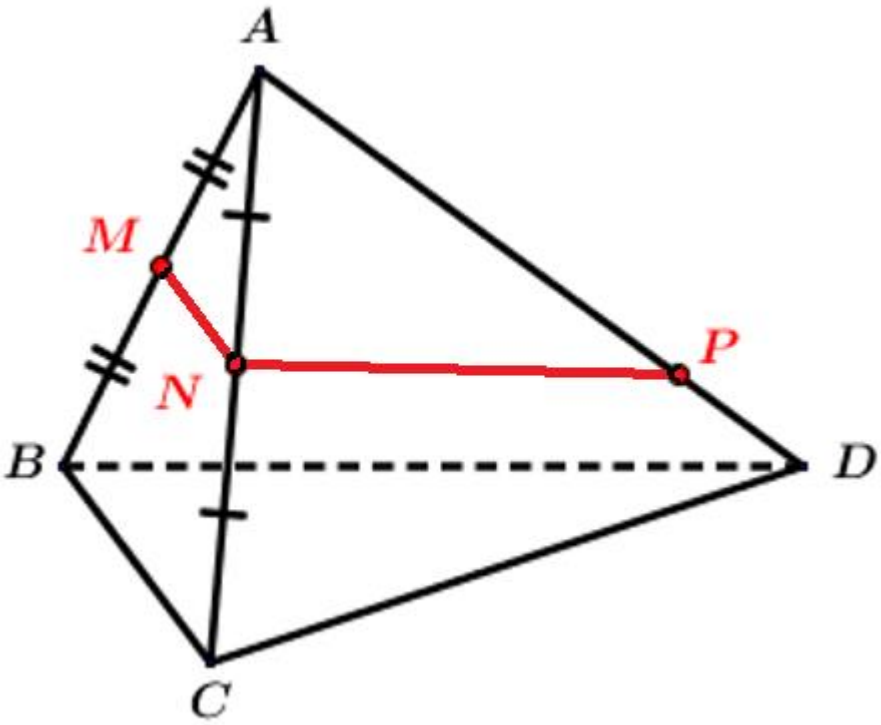


$$\begin{cases} N, P \in (ACD) \\ N, P \in (MNP) \end{cases}$$

ومنه $(MNP) \cap (ACD) = (NP)$

وبما ان $N \in [AC]$ و $P \in [AD]$

فان $(MNP) \cap ACD = [NP]$

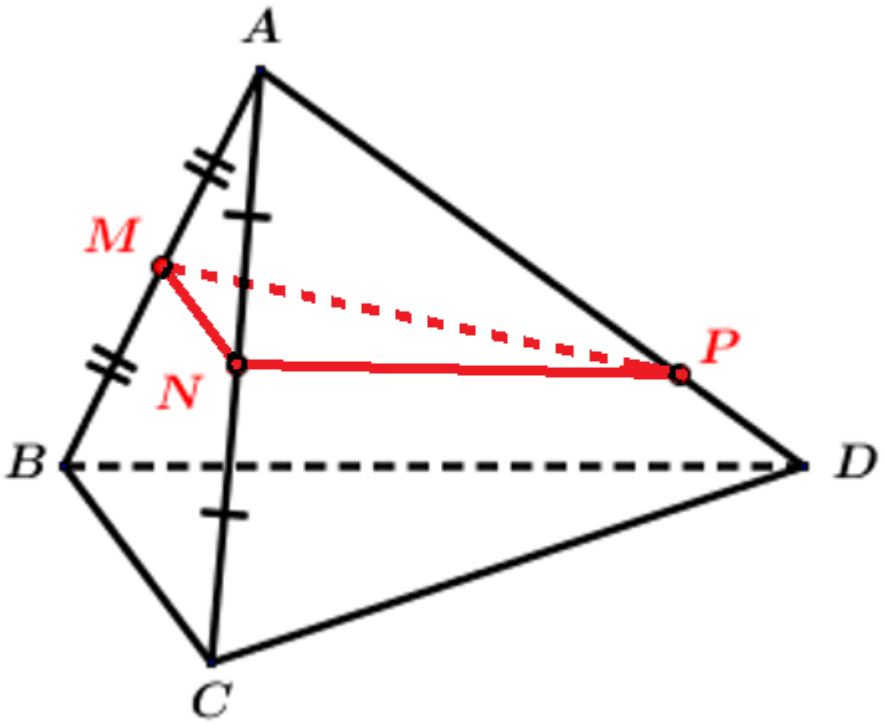


$$\begin{cases} N, M \in (ABC) \\ N, M \in (MNP) \end{cases}$$

ومنه $(MNP) \cap (ABC) = (NM)$

وبما ان $N \in [AC]$ و $M \in [AB]$

فان $(MNP) \cap ABC = [MN]$



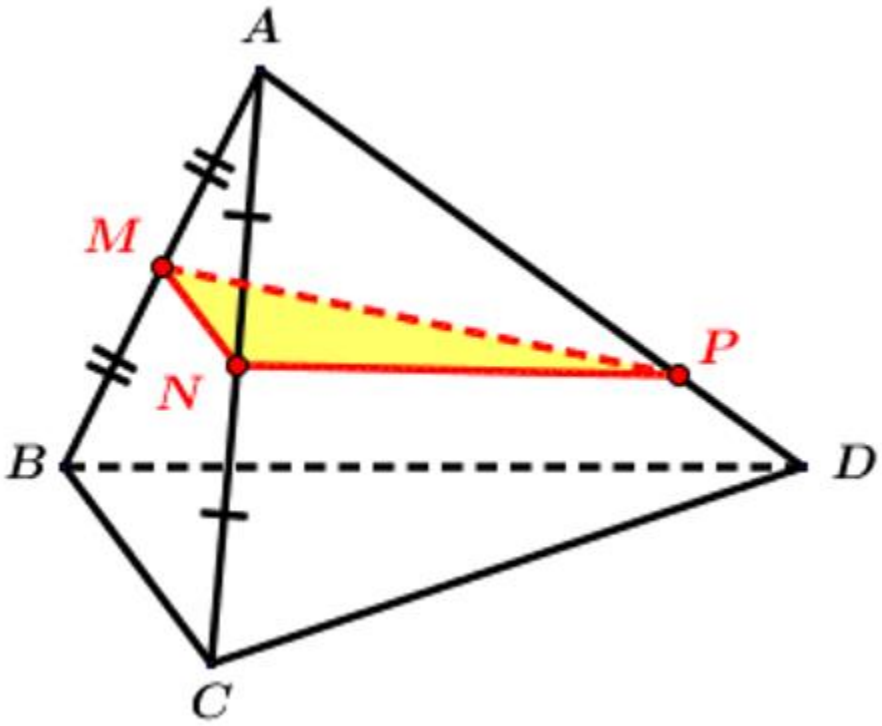
$$\begin{cases} P,M \in (ABD) \\ P,M \in (MNP) \end{cases}$$

ومنه $(MNP) \cap (ABD) = (PM)$

وبما ان $P \in [AD]$ و $M \in [AB]$

فان $(MNP) \cap ABD = [MP]$

ومنه نستنتج أن مقطع رباعي الوجوه $ABCD$



بالمستوي (MNP)

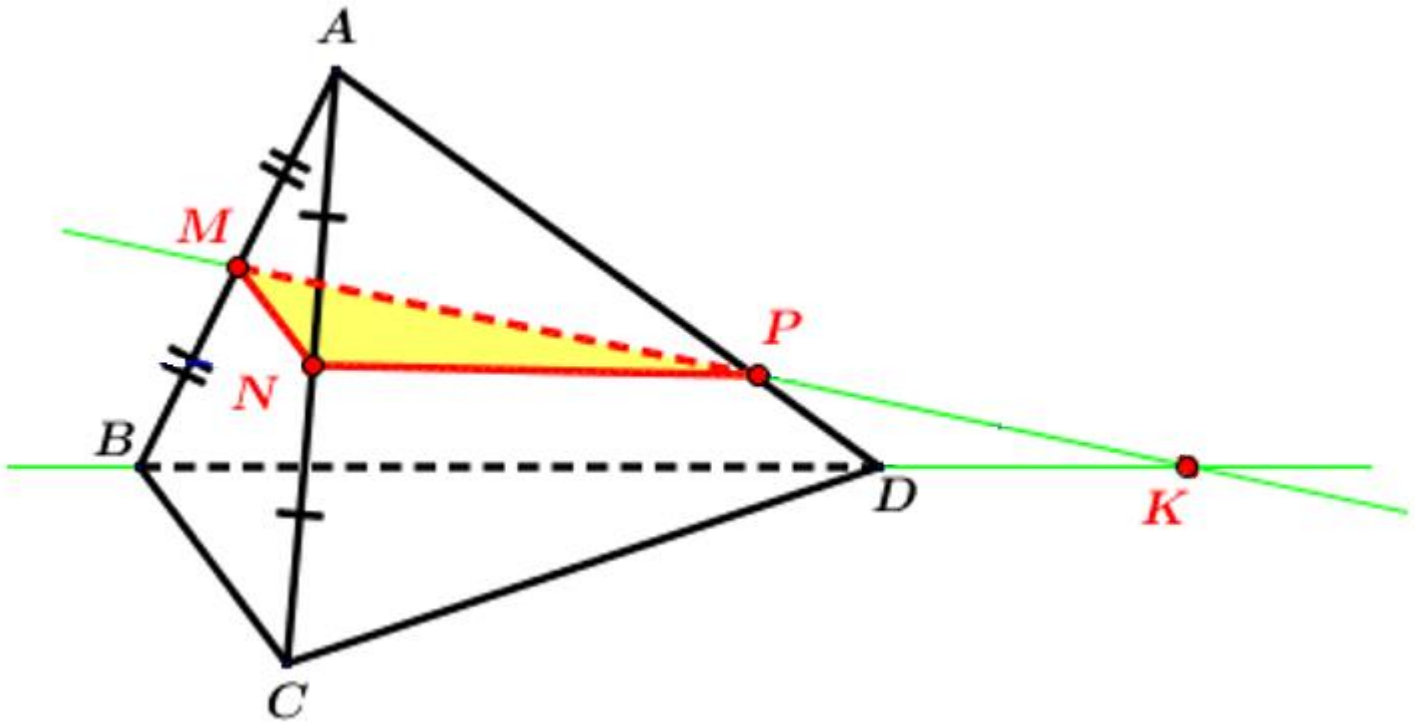
هو المثلث MNP

2- تحديد تقاطع المستويين (MNP) و (BCD) :

حالة $(PD < PA)$

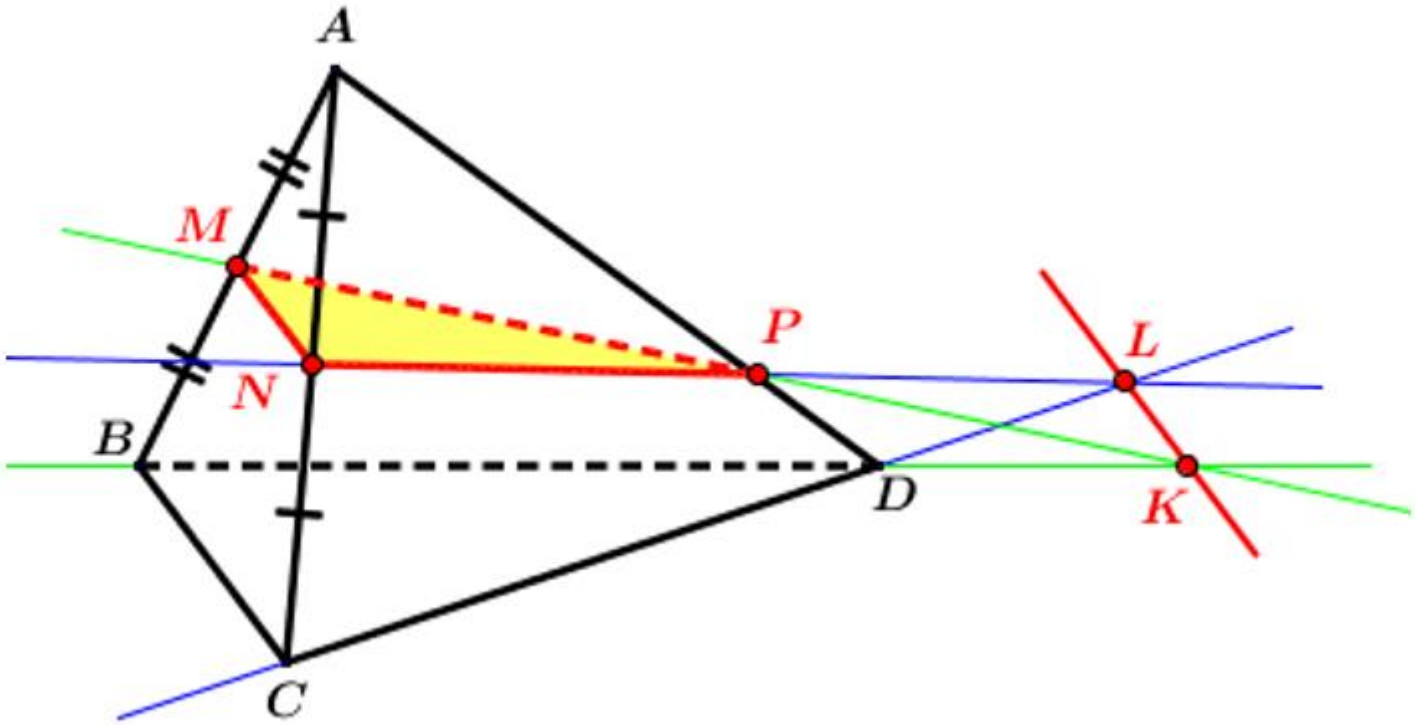
$(BD) \subset (ABD)$ و $(MP) \subset (ABD)$ و $(BD) \cap (MP) = \{K\}$

ومنه $K \in (MNP) \cap (BCD)$



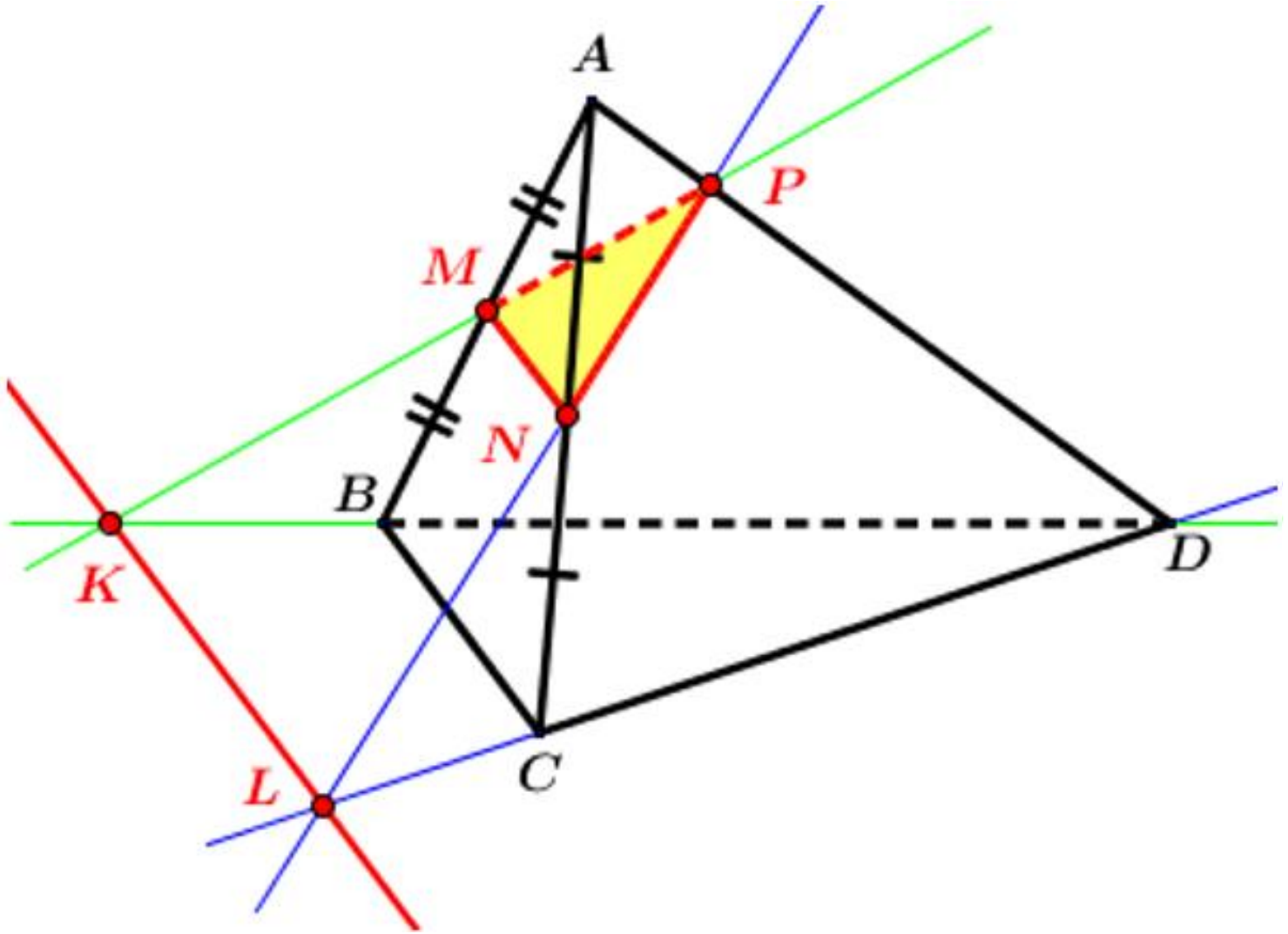
$(CD)\subset(ACD)$ و $(NP)\subset(ACD)$ و $(CD)\cap(NP)=\{L\}$

ومنه $L\in(MNP)\cap(BCD)$



ومنه نستنتج $(MNP)\cap(BCD)=(KL)$

حالة $(PD > PA)$

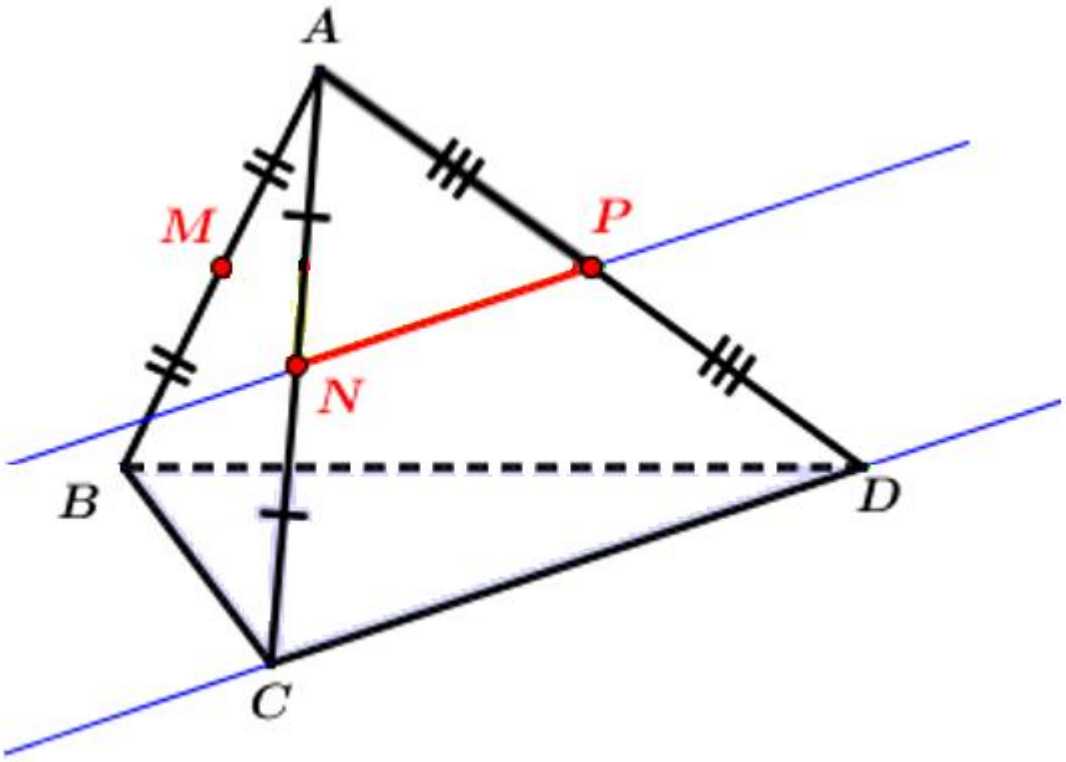


إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

3- في حالة النقطة P هي منتصف القطعة $[AD]$

- في مثلث ACD

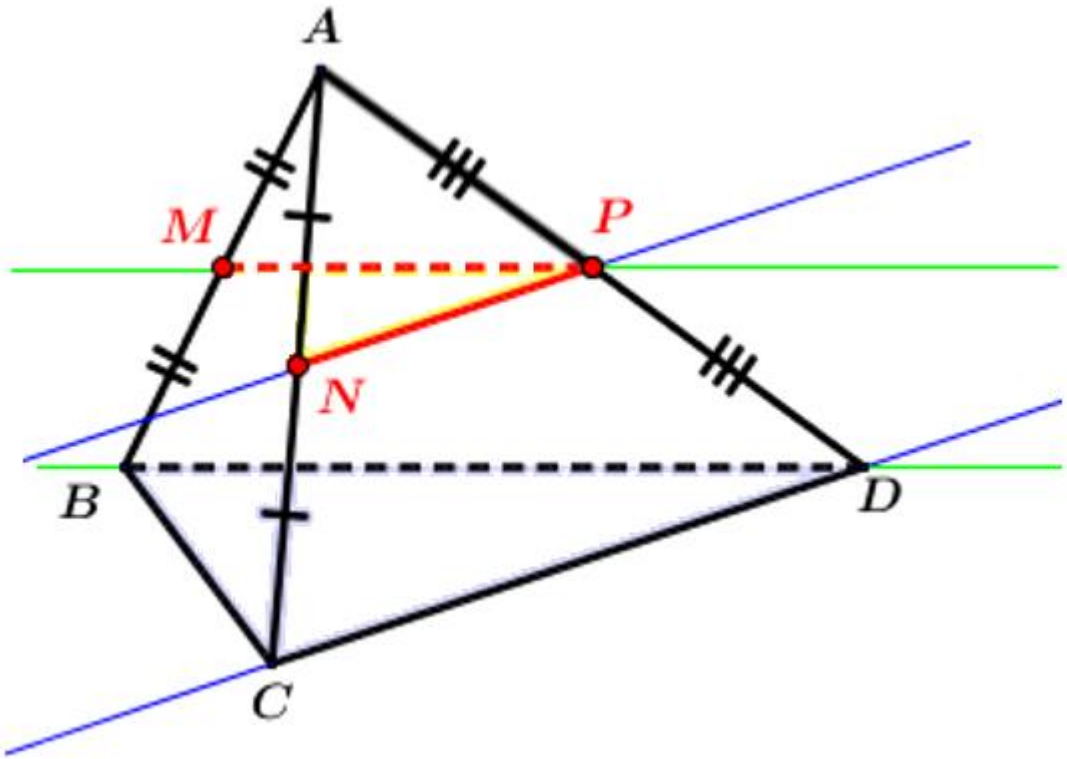
لدينا P منتصف $[AD]$ و N منتصف $[AC]$



فان $(PN)\parallel(DC)$

- في مثلث ABD

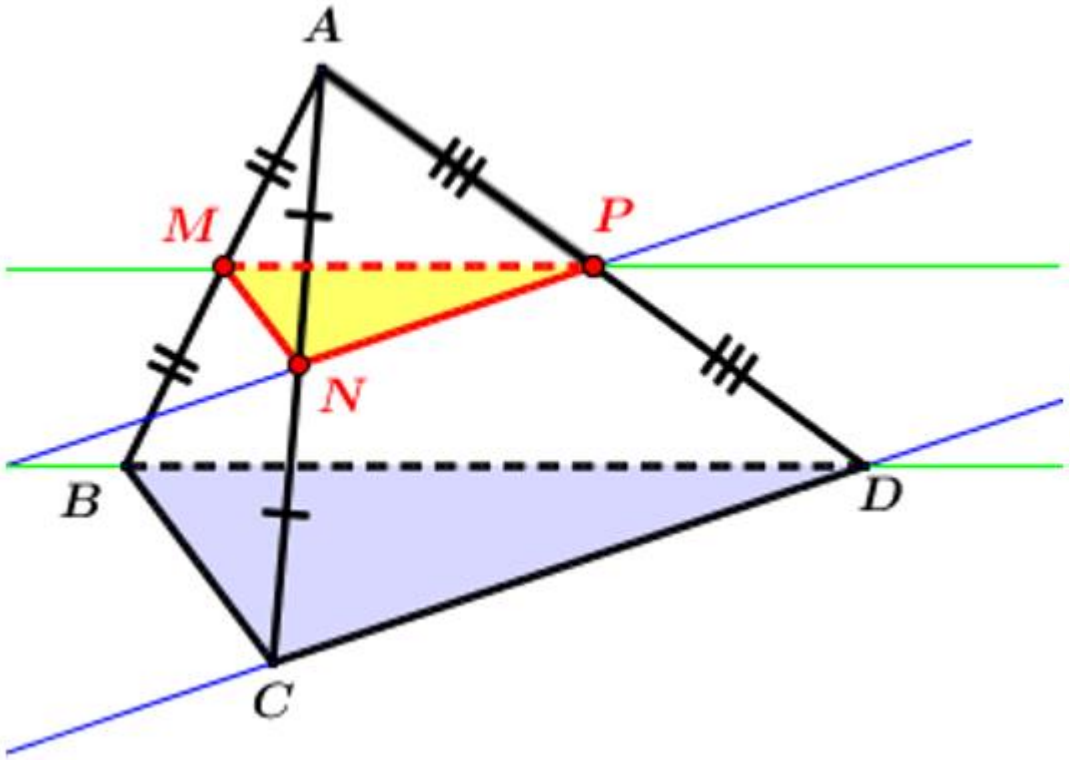
لدينا P منتصف $[AD]$ و M منتصف $[AB]$



فان $(PM)\|(DB)$

- لدينا المستقيمين المتقاطعين (PM) و (PN) من المستوي (MNP)

يوازيان المستقيمين المتقاطعين (DB) و (DC) من المستوي (BCD) على الترتيب



نستنتج أن $(MNL) \parallel (BCD)$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تطبيقات :

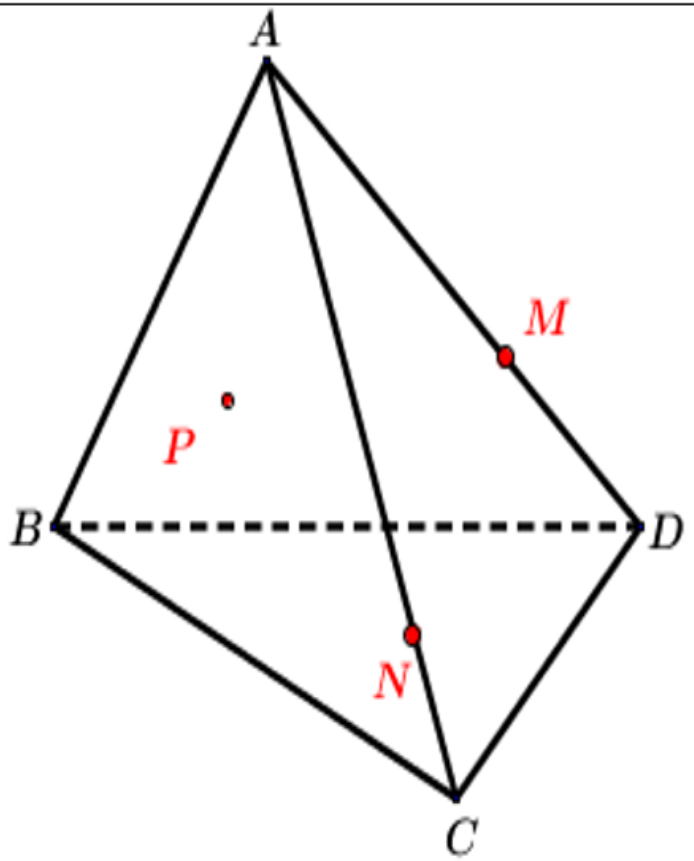
1

$ABCD$ رباعي الوجوه

- M نقطة من الحرف $[AD]$
- N نقطة من الحرف $[AC]$
- P نقطة من الوجه ABC

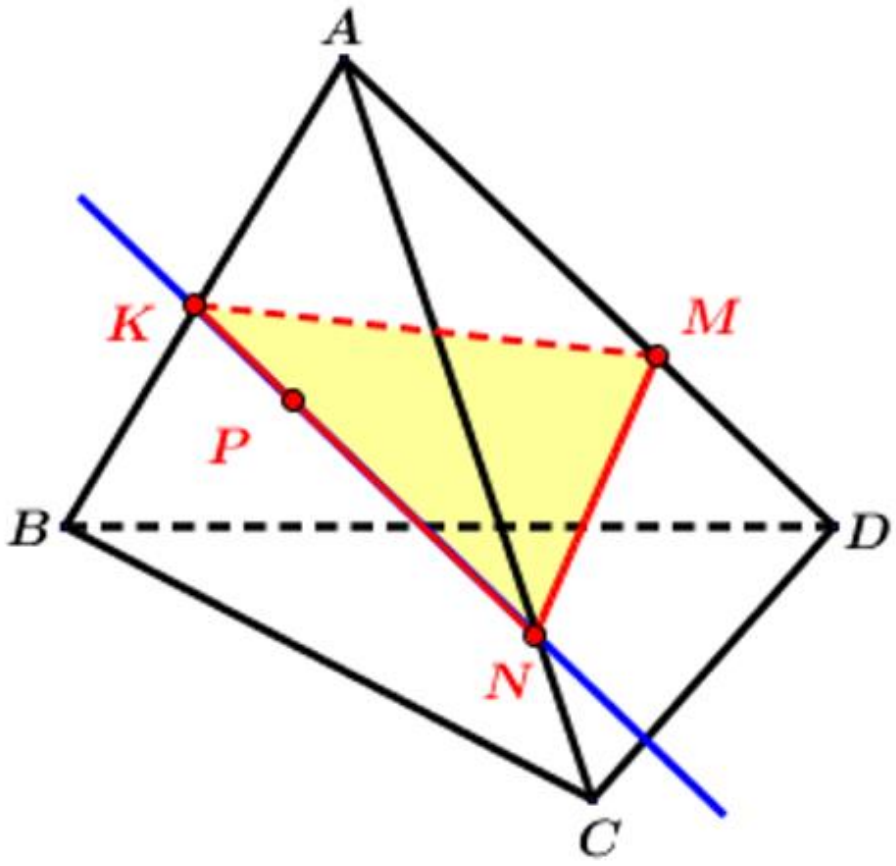
كما هو موضح في الشكل المقابل .

- أنشئ مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (MNP)



إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان



(1)

المستوي (MNP) يقطع رباعي الوجوه $ABCD$ وفق المثلث MNK

القطعة	الوجه	المستوي
$[MN]$	ACD	(MNP)
$[MK]$	ABC	
$[KM]$	ABD	
$\varnothing$	BCD	

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تطبيق

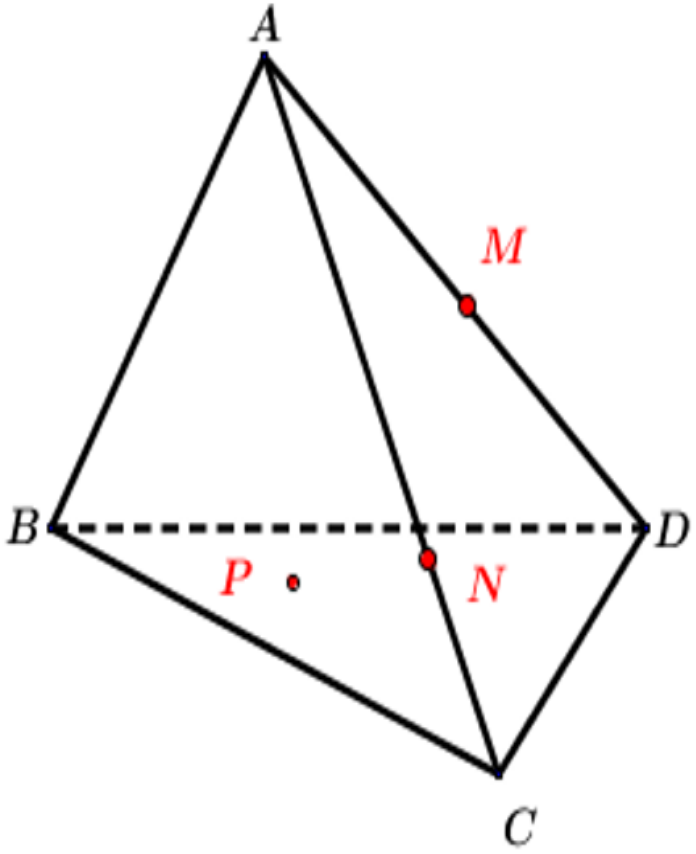
2

$ABCD$ رباعي الوجوه

- M نقطة من الحرف $[AD]$
- N نقطة من الحرف $[AC]$
- P نقطة من الوجه BCD

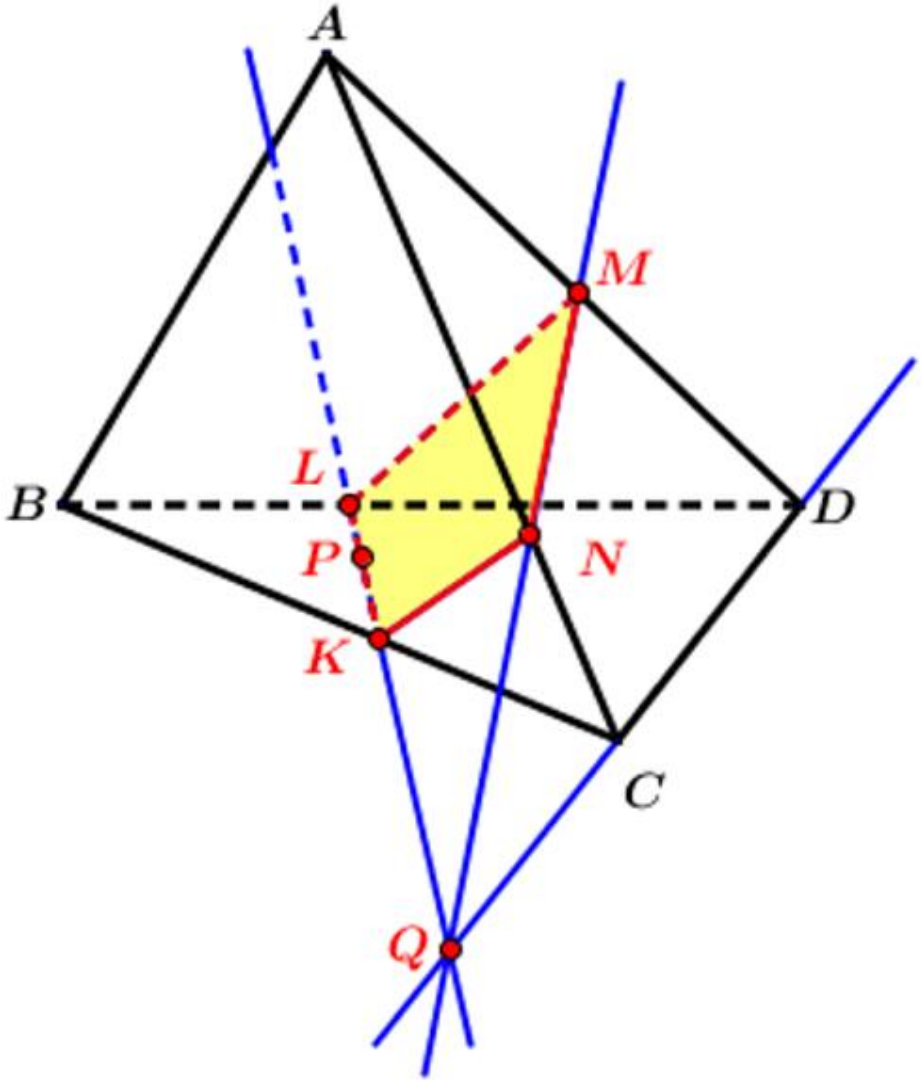
كما هو موضح في الشكل المقابل .

- أنشئ مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (MNP)



إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان

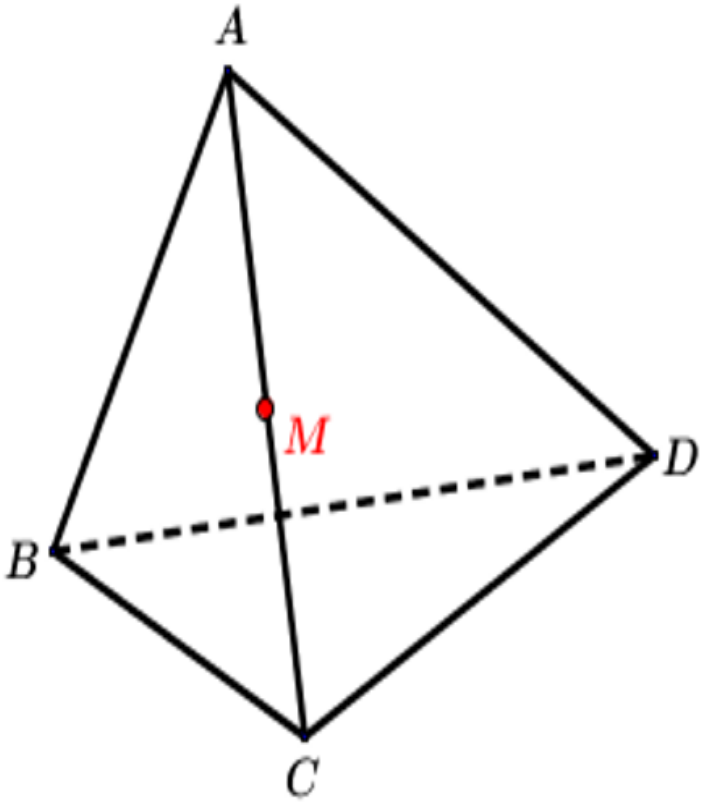


(2)

المستوي (MNP) يقطع رباعي الوجوه $ABCD$ وفق الرباعي $NMPL$

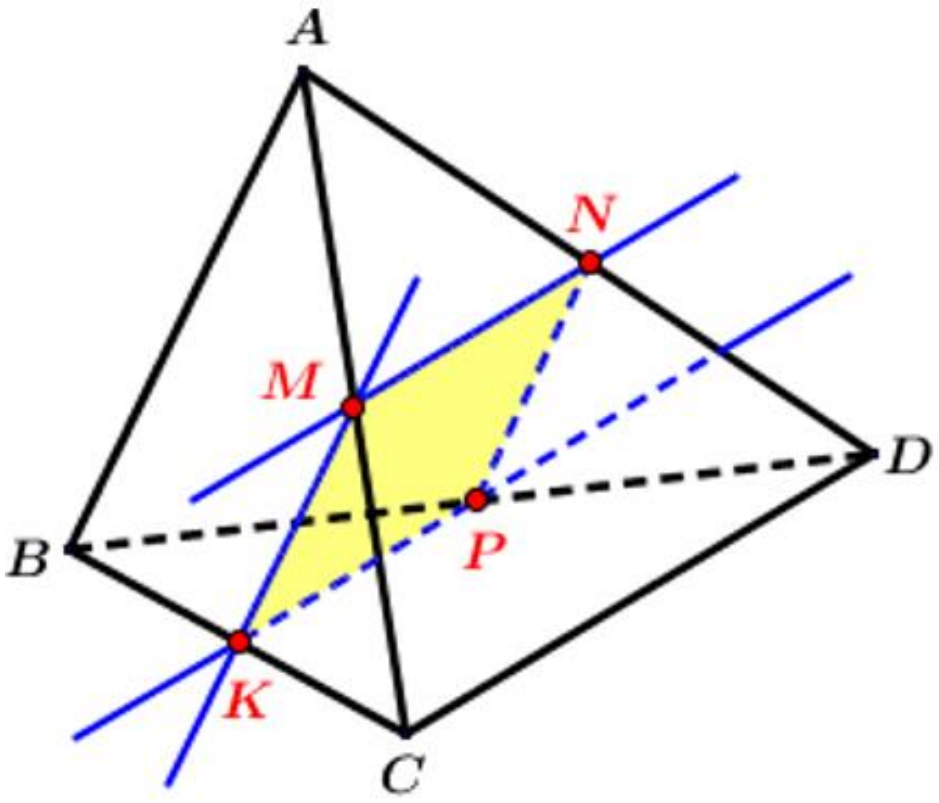
القطعة	الوجه	المستوي
$[MN]$	ACD	(MNP)
$[NK]$	ABC	
$[KL]$	BCD	
$[LM]$	ABD	

تطبيق

3	$ABCD$ رباعي الوجوه • M نقطة من الحرف $[AC]$ كما هو موضح في الشكل المقابل . - أنشئ مقطع رباعي الوجوه بالمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل النقطة M ويوازي كل من الحرفين $[AB]$ و $[CD]$.	

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

النتيجة هي ان



(3)

المستوي $(\mathscr{P})$ يقطع رباعي الوجوه $ABCD$ وفق متوازي الضلاع $MNPK$

القطعة	الوجه	المستوي
$[NM]$	ACD	$(\mathscr{P})$
$[MK]$	ABC	
$[KP]$	BCD	
$[PN]$	ABD	

-2-

الحساب الشعاعي في الفضاء

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

الحساب الشعاعى فى الفضاء

نشاط 3: الكتاب المدرسي (ص244)

(نقبل أنه يمكن تمديد قواعد الحساب على الاشعة في المستوي إلى الفضاء)

$ABCD$ رباعي وجوه نعتبر النقط E ، F و G حيث E منتصف الحرف $[CD]$

النقطة G مركز ثقل المثلث CDA و F تحقق العلاقة : $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{BF}$.

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

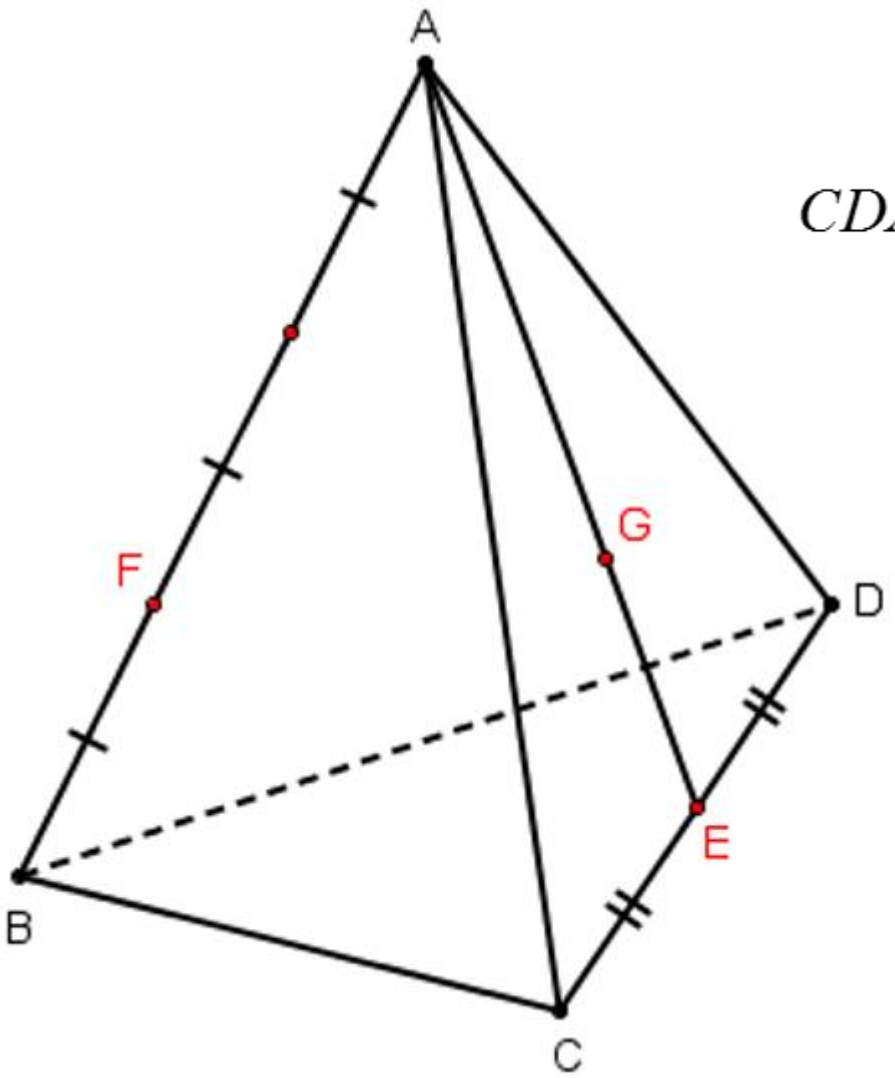
1- أنجز رسما مناسبا .

2- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{FA}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$ و عن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AE}$.

3- باستعمال العلاقة $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AG}$ بين أنه يوجد عدد حقيقي x يطلب تعيينه يحقق العلاقة $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{FG}$.

4- ماذا يمكن ان القول عن المستقيمين (BE) و (FG).

الحل:



- لدينا النقطة G مركز ثقل المثلث CDA

فان G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث CDA

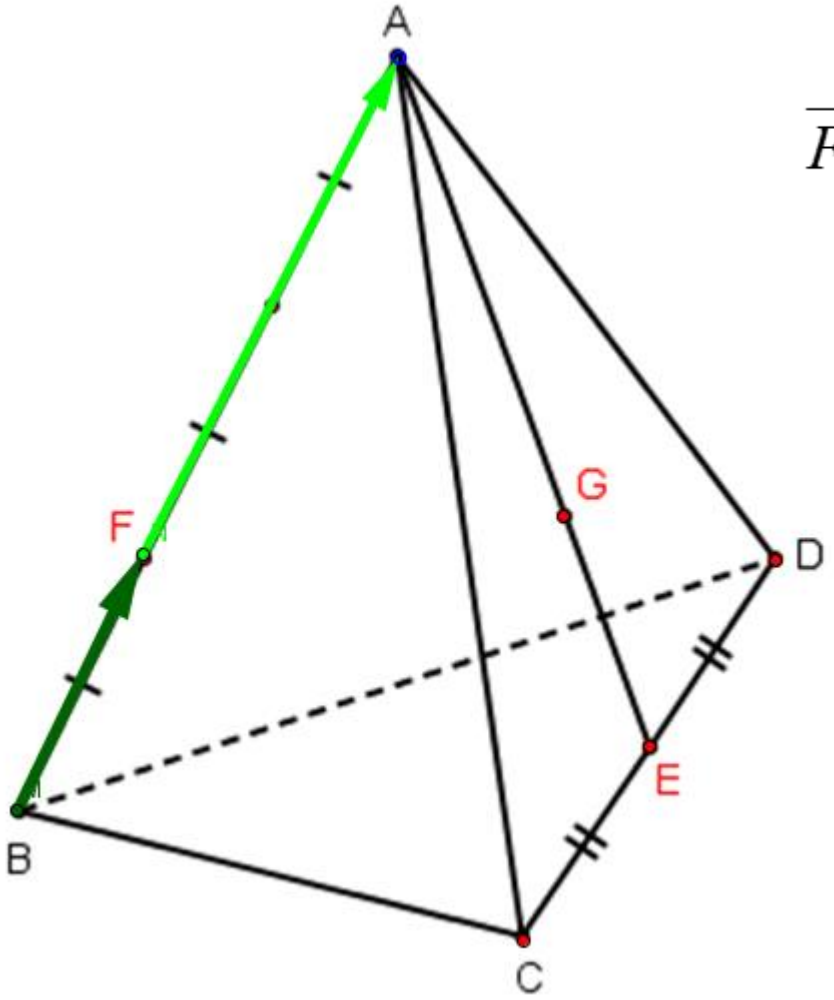
ولدينا $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{BF}$

فان $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BF}$

ومنه $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BF}$

ومنه $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

2- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{FA}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$:



- لدينا $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{BF}$ ومنه $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AF}$

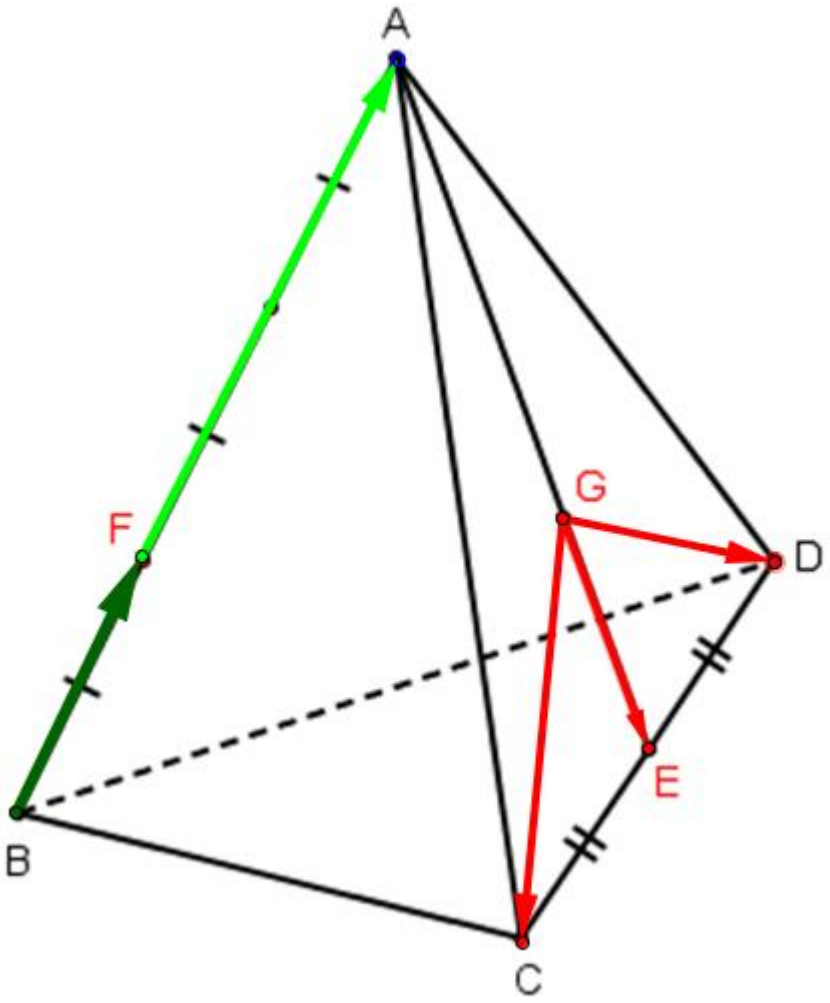
ومنه $\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BA}$

وبذلك $3\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{BA}$

إذا $\boxed{\overrightarrow{FA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}}$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AE}$:



- لدينا E منتصف الحرف $[CD]$

فان $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$

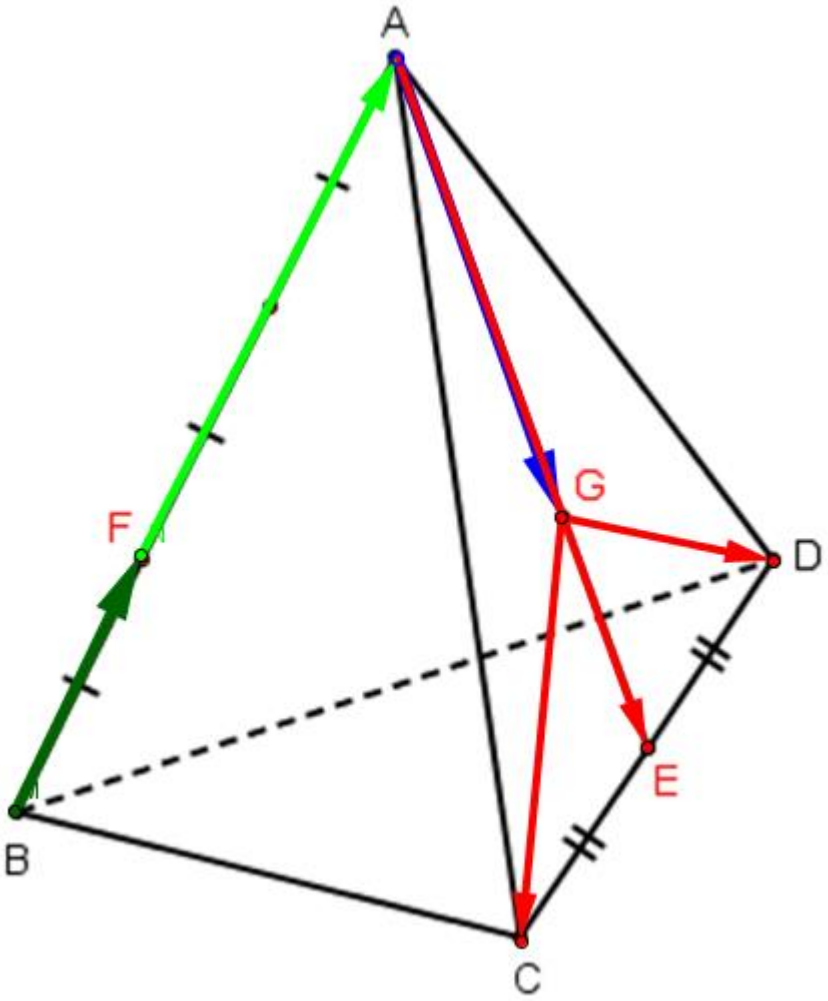
ومنه

$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GE} \quad \rightarrow (1)$$

النقطة G مركز ثقل المثلث CDA

فان

$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \quad \rightarrow (2)$$



ومن (1) و(2) نجد

$$2\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$

ومنه

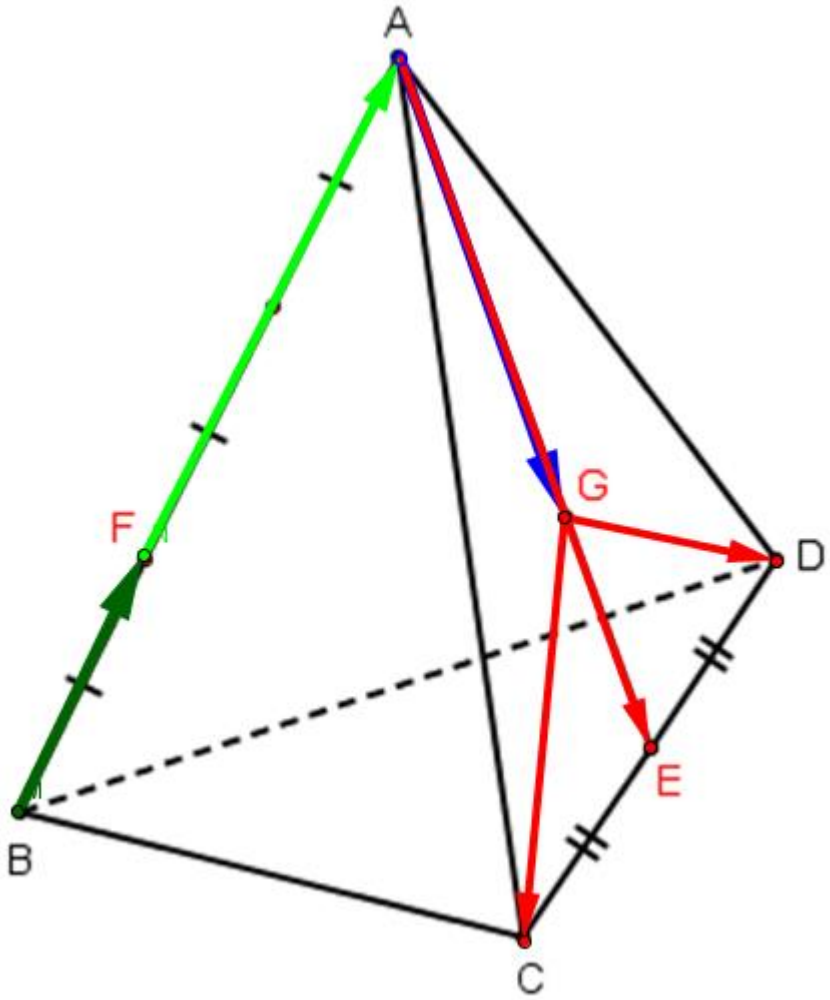
ومنه $3\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AE}$

$$2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$

ومنه $3\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AE}$

إذا $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}}$

3- إيجاد قيمة x الحقيقية :



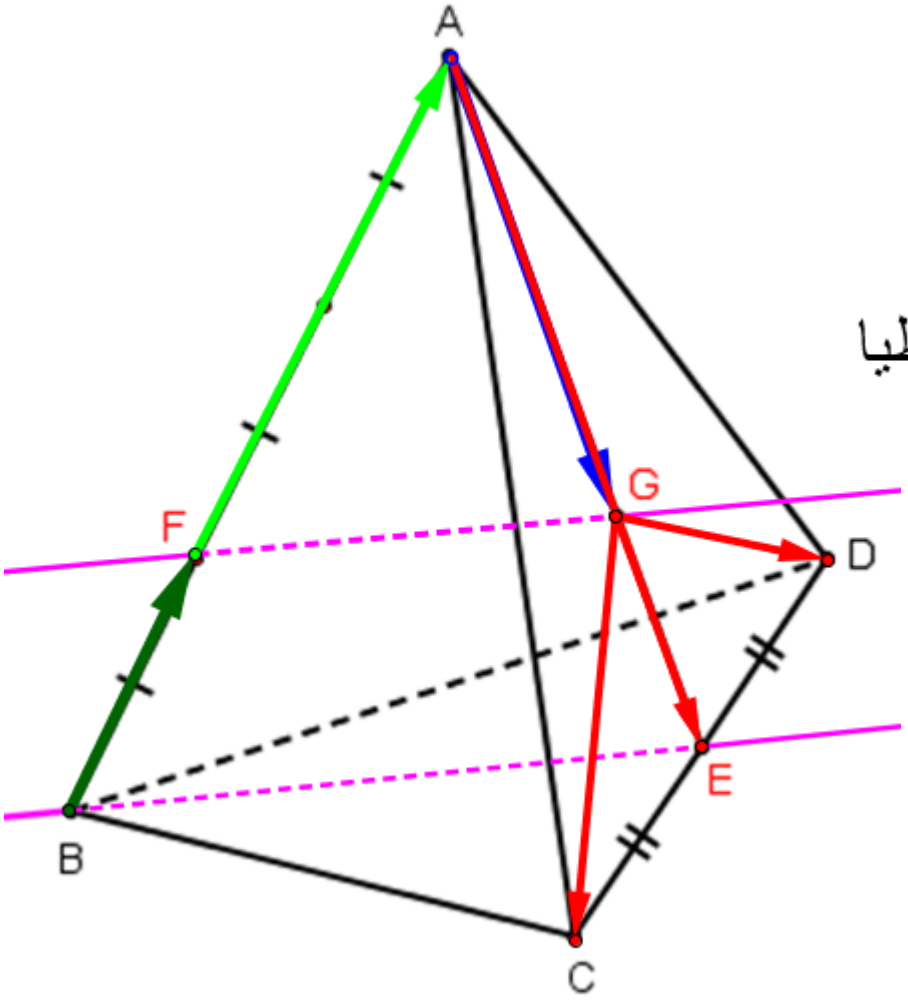
لدينا $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AG}$

ومنه $\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

وبذلك $\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right)$

ومنه $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FG}$

ومنه $\boxed{x = \frac{3}{2}}$



وضعية المستقيمين (BE) و (FG)

بما ان $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FG}$

ومنه الشعاعيين $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{FG}$ مرتبطين خطيا

وبذلك $\boxed{(FG)\parallel(BE)}$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

الحساب الشعاعي في الفضاء:

ملاحظة :

يتم تمديد تعاريف و خواص الأشعة و العمليات عليها في الهندسة المستوية إلى الفضاء .

نرفق ، كما في المستوي ، بكل ثنائية نقطية (A,B) من الفضاء الشعاع $\overrightarrow{AB}$

- نرمز إلى الاشعة بواسطة حرف مثل : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ،...

إذا كان $A \neq B$

- منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB)
- اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو من A نحو B
- طويلة $\overrightarrow{AB}$ ونرمز إليها بالرمز $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ هي المسافة AB لدينا : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

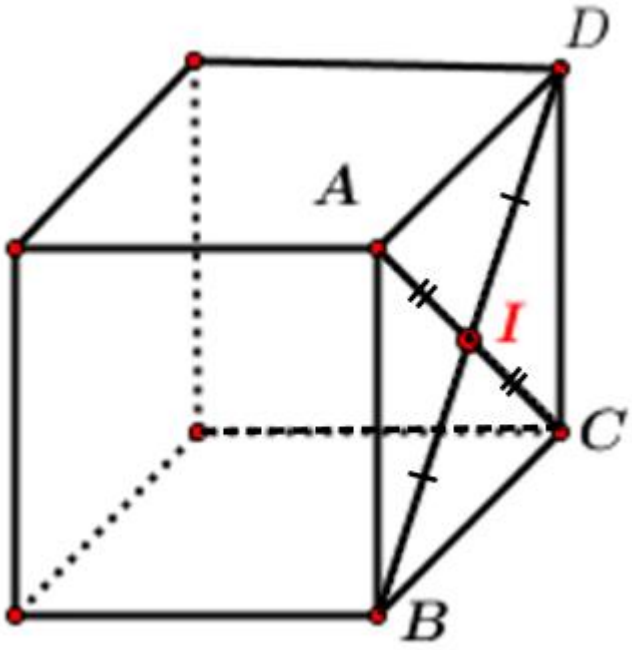
- إذا كان $A = B$ ، فان $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع المعدوم الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{0}$

- من أجل كل نقطة O ومن أجل كل شعاع $\vec{u}$ من الفضاء ،توجد نقطة وحيد M حيث $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

مبرهنة :

A ، B ، C و D أربع نقط من الفضاء

الخواص الثلاث الآتية متكافئة



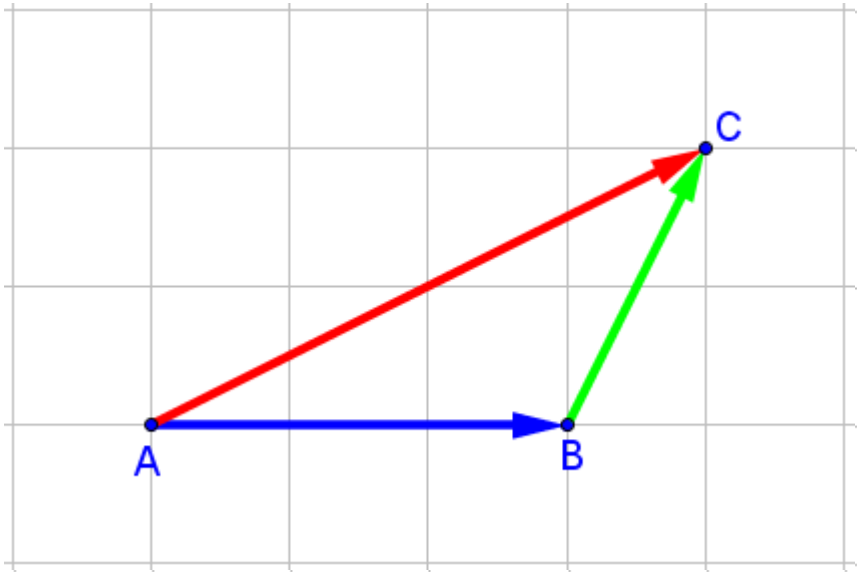
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع
- للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

2- العمليات على الأشعة :

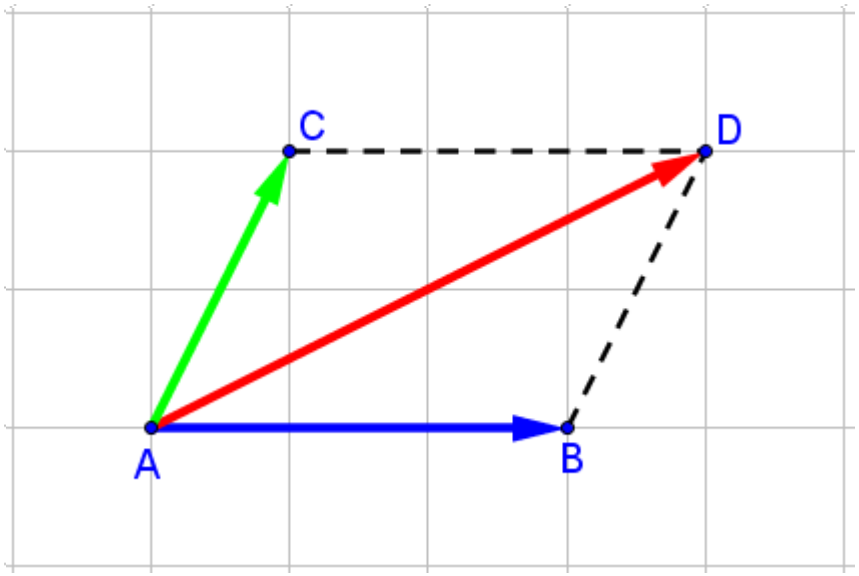
مجموع شعاعين

علاقة شال



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

قاعدة متوازي الاضلاع



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

حالة خاصة :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ نقول ان $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

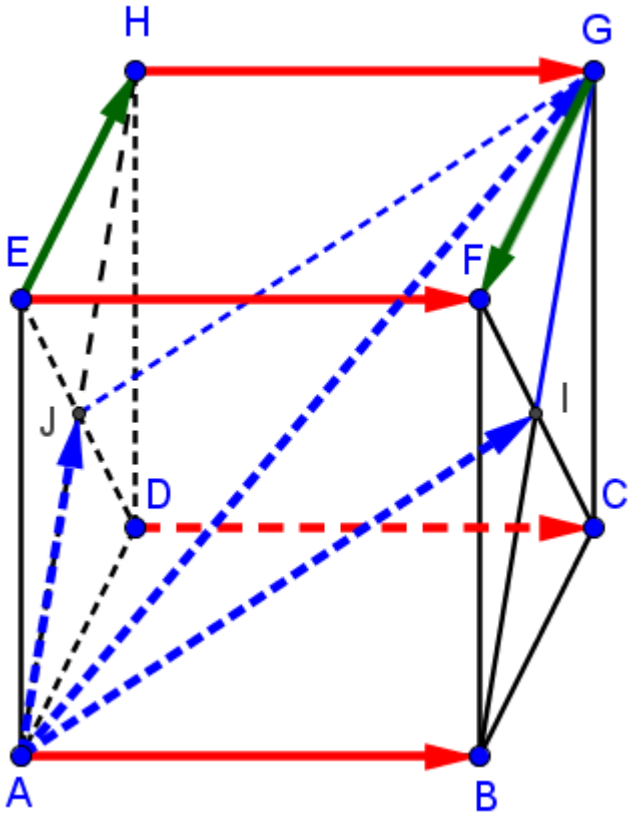
مثال : $ABCDEFGH$ مكعب

I مركز الوجه $BCGF$

و J مركز الوجه $ADHE$

لدينا :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$
- $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{EH}=-\overrightarrow{GF}$



إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

جداء شعاع بعدد حقيقي

من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ومن كل عددين حقيقيين k و k'

لدينا

- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\left(k'\vec{u}\right) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافي $(k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0})$

نتائج :

- يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا

وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k\vec{u}$

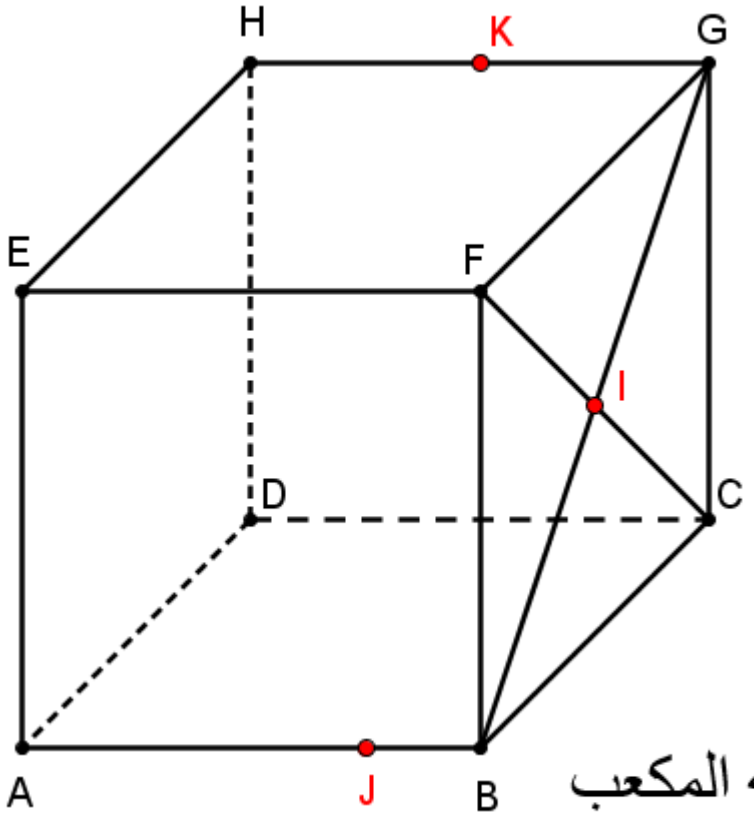
- يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.

- تكون النقط A ، B و C في استقامية إذا وفقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا

مثال :



$ABCDEFGH$ مكعب.

و I مركز الوجه $BCGF$ و K منتصف $[HG]$

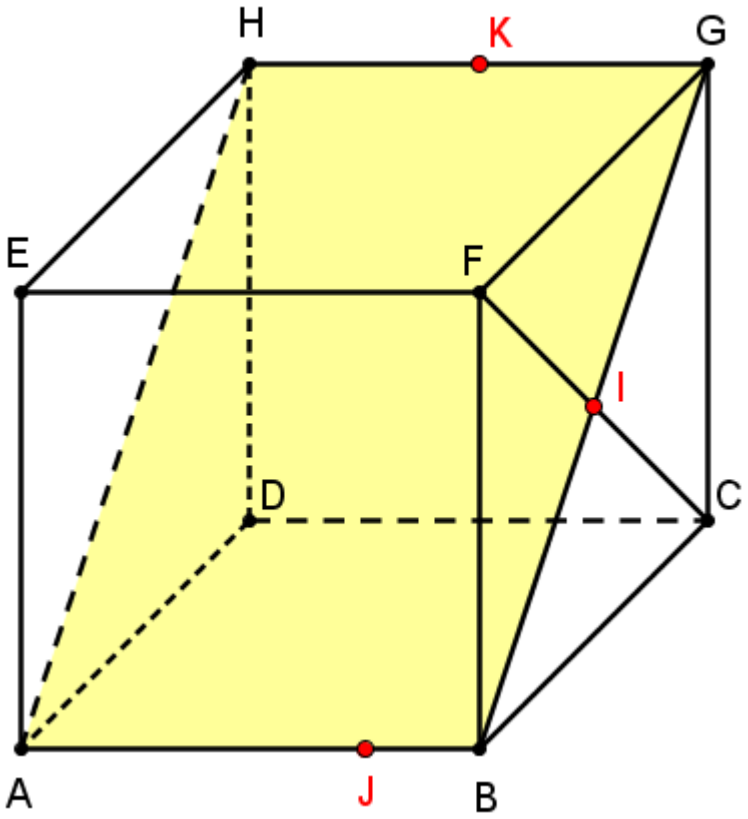
و النقطة J تحقق العلاقة $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

1- أنشئ تقاطع المستوي (IJK) مع مختلف أوجه المكعب

2- برهن أن المستقيمين (AK) و (JI) متوازيين .

الحل :

1- إنشاء تقاطع المستوي (IJK) مع مختلف أوجه المكعب :



بما ان الرباعي $ABGH$ مستطيلا

حيث $J \in [AB]$

$I \in [BG]$

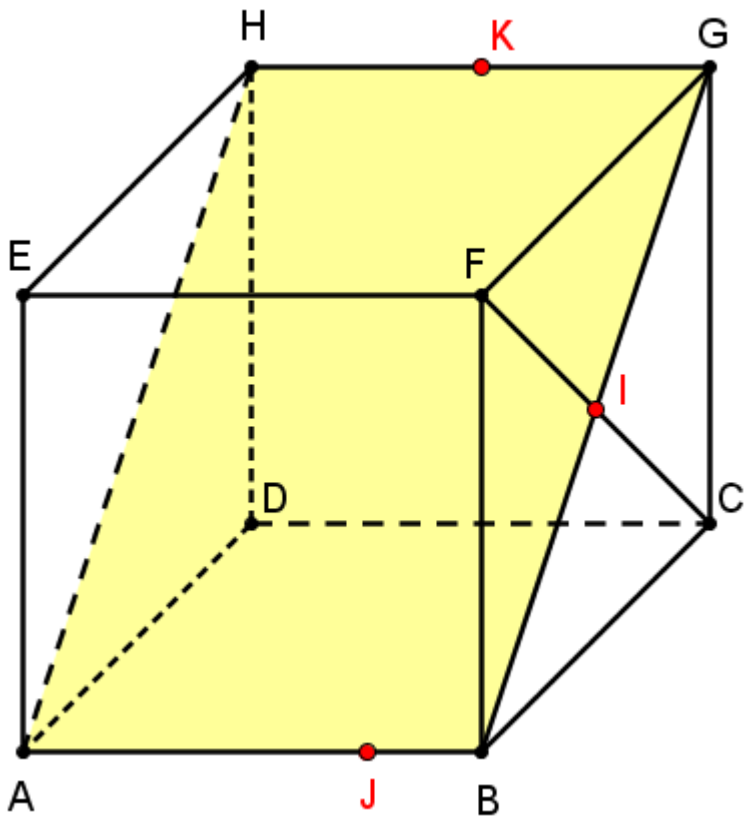
و $K \in [HG]$

ومنه $(ABGH) = (IJK)$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

إذا المستوي (IJK) يقطع المكعب $ABCDEFGH$

وفق المستطيل $ABGH$

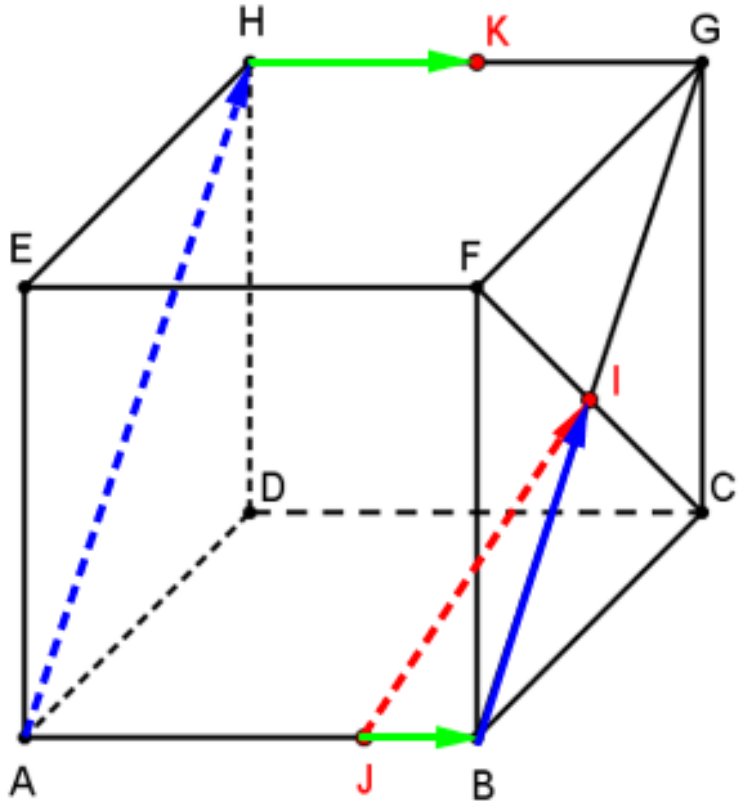


المستوي (IJK) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق المستطيل $ABGH$

القطعة		الوجه		المستوي
$[AB]$	//	$ABFE$	//	(IJK)
$[BG]$	//	$BCGF$	//	
$[HG]$	//	$EFGH$	//	
$[HG]$	//	$DCGH$	//	
$[AH]$	//	$ADHE$	//	
$[AB]$	//	$ABCD$	//	

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

2- برهن أن المستقيمين (AK) و (JI) متوازيين



باستعمال علاقة شال لدينا

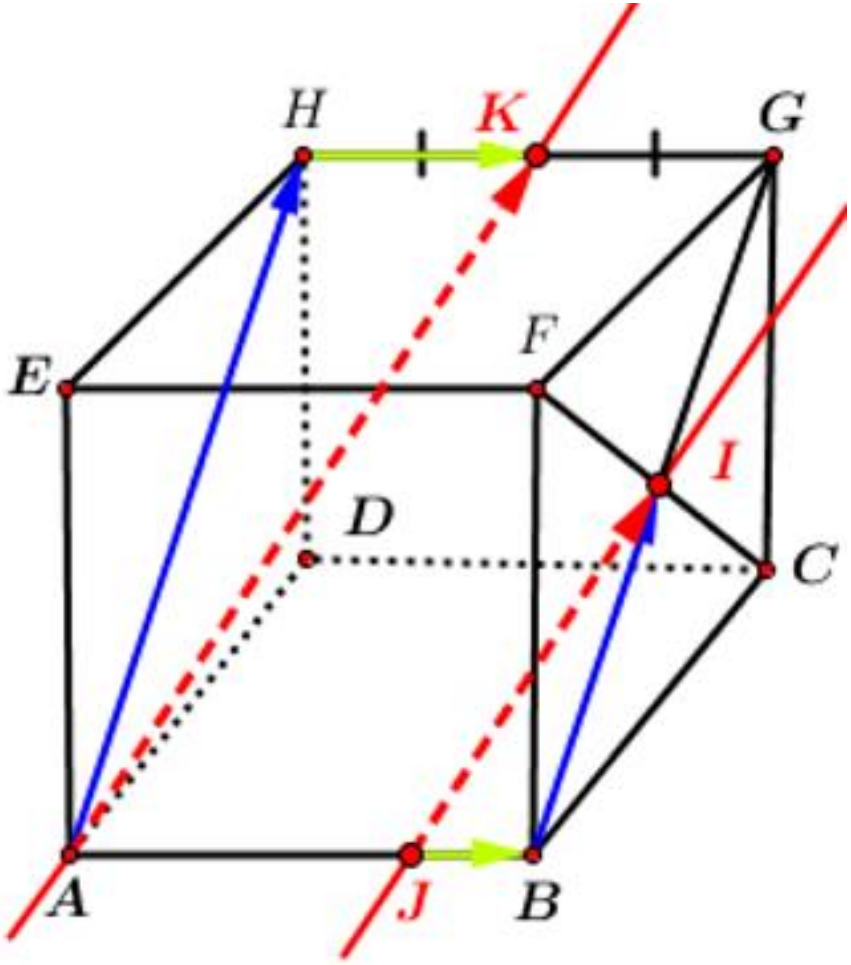
$$\boxed{\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI}} \leftarrow (1)$$

حيث

$$\boxed{\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HK}} \leftarrow (2) \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \overrightarrow{JB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{HK} \end{cases}$$

و

$$\boxed{\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}} \leftarrow (3) \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} \\ \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH} \end{cases}$$



بإستعمال العلاقتين (2) و(3) فان

العلاقة (1) تصبح

$$\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK}\right)$$

وبذلك نستنتج أن

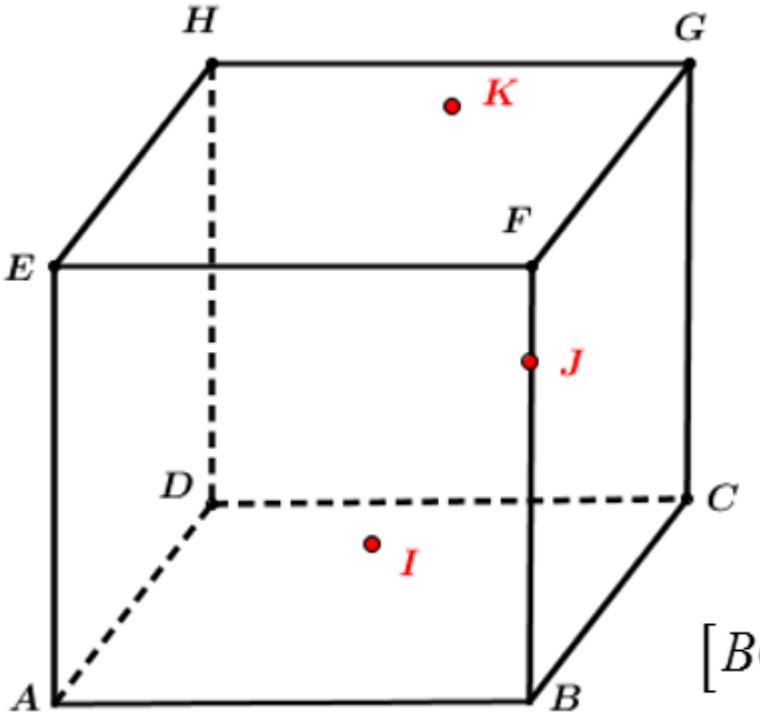
الشعاعين $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطين خطيا

إذا المستقيمين (AK) و (JI) متوازيين

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

الأشعة من نفس المستوي

نشاط 4: الكتاب المدرسي (ص244)



$ABCDEFGH$ مكعب. و I نقطة من الوجه $ABFE$

و J نقطة من الحرف $[BF]$ و K نقطة من الوجه $EFGH$.

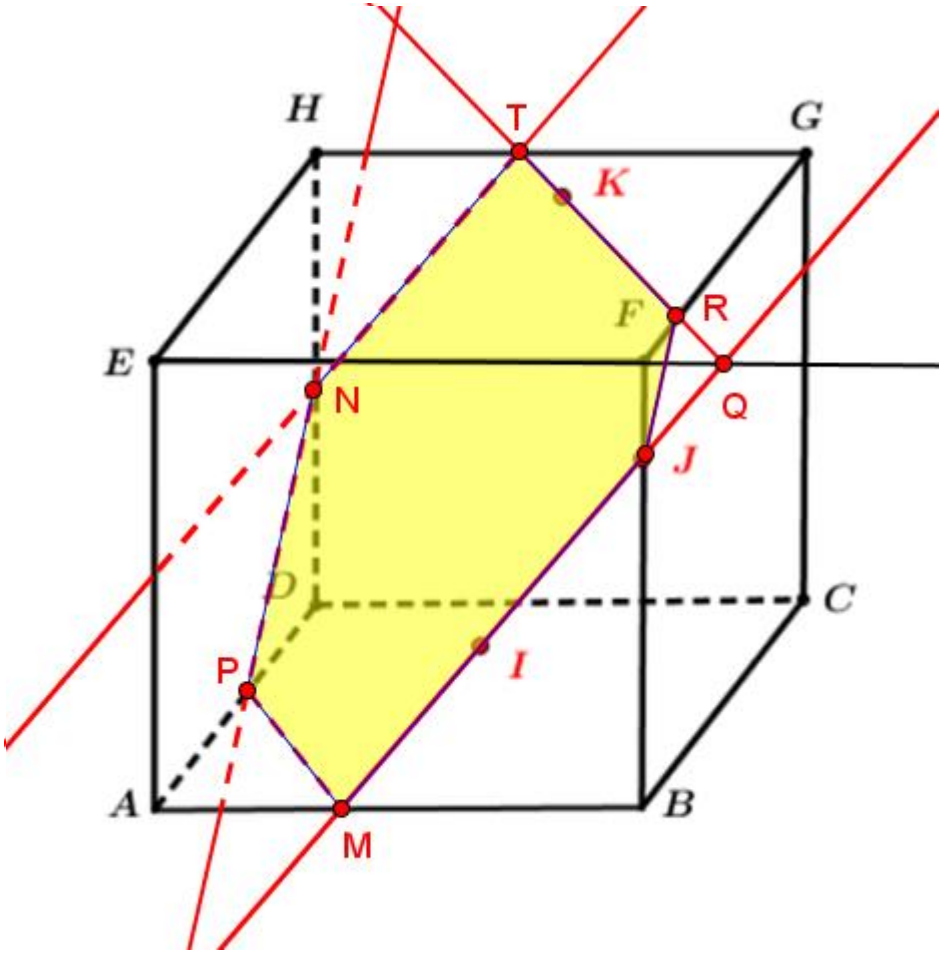
1- أنشئ تقاطع المستوي (IJK) مع مختلف أوجه المكعب .

2- نفرض أن $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{FB}$ ولكن النقطة L منتصف القطعة $[BC]$

عبر عن الشعاع $\overrightarrow{LJ}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{EH}$.

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

1- أنشاء تقاطع المستوي (IJK) مع مختلف أوجه المكعب:



$$(IJ)\cap(AB)=\{M\}$$

و $(IJ)\cap(EF)=\{Q\}$

و $(QK)\cap(FG)=\{R\}$

و $(QK)\cap(GH)=\{T\}$

و
$$\left.\begin{array}{l}(TN)\parallel(JI)\\(TN)\cap(HD)=\{N\}\end{array}\right\}$$

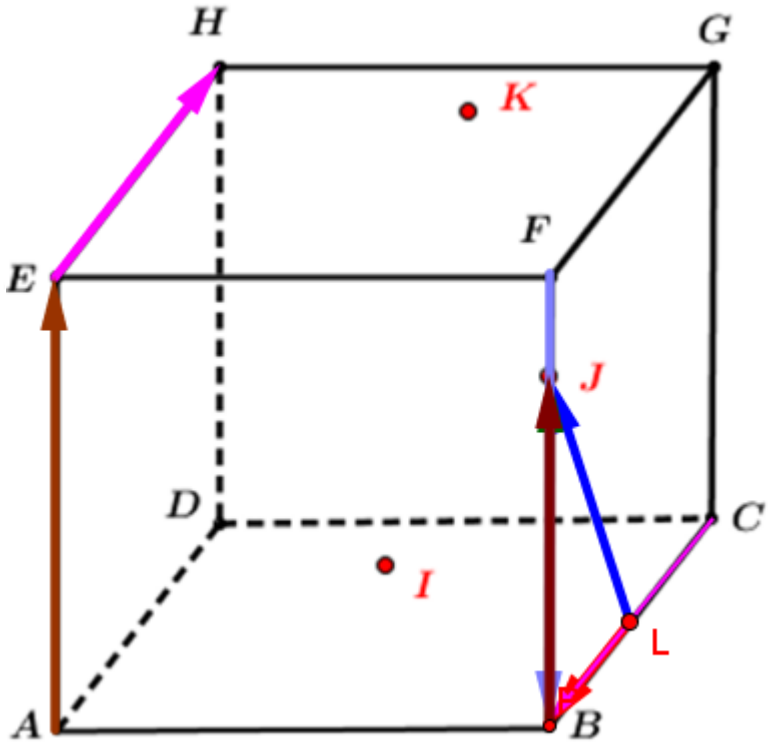
و
$$\left.\begin{array}{l}(NP)\parallel(RJ)\\(NP)\cap(AD)=\{P\}\end{array}\right\}$$

المستوي (IJK) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق سداسي الاضلاع $MJRTNP$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

2- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{LJ}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{EH}$

- باستعمال علاقة شال لدينا



$$\boxed{\overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BJ}} \rightarrow (1)$$

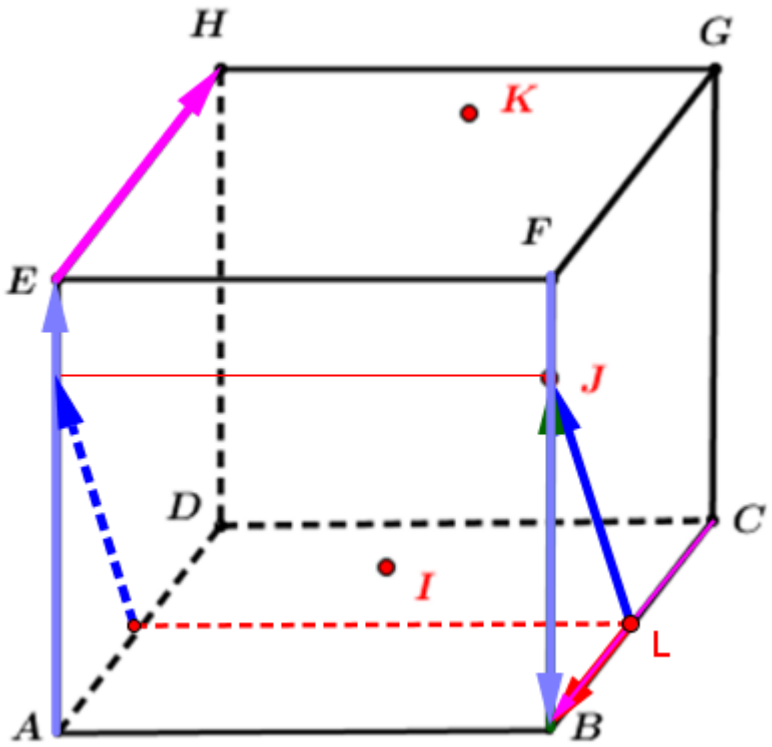
لدينا $\begin{cases} \overrightarrow{LB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{EH} \end{cases}$ ومنه $\boxed{\overrightarrow{LB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}} \rightarrow (2)$

ولدينا $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{FB}$ ومنه $7\overrightarrow{FJ} = 2\overrightarrow{FB}$

ومنه $7\overrightarrow{FB} + 7\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{FB}$ إذا $7\overrightarrow{BJ} = -5\overrightarrow{FB}$

ومنه $\begin{cases} \overrightarrow{BJ} = \frac{-5}{7}\overrightarrow{FB} \\ \overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{AE} \end{cases}$ وبذلك $\boxed{\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AE}} \rightarrow (3)$

باستعمل كل من العلاقتين (2) و(3)



فان (1) تصبح $\boxed{\overrightarrow{LJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AE}}$

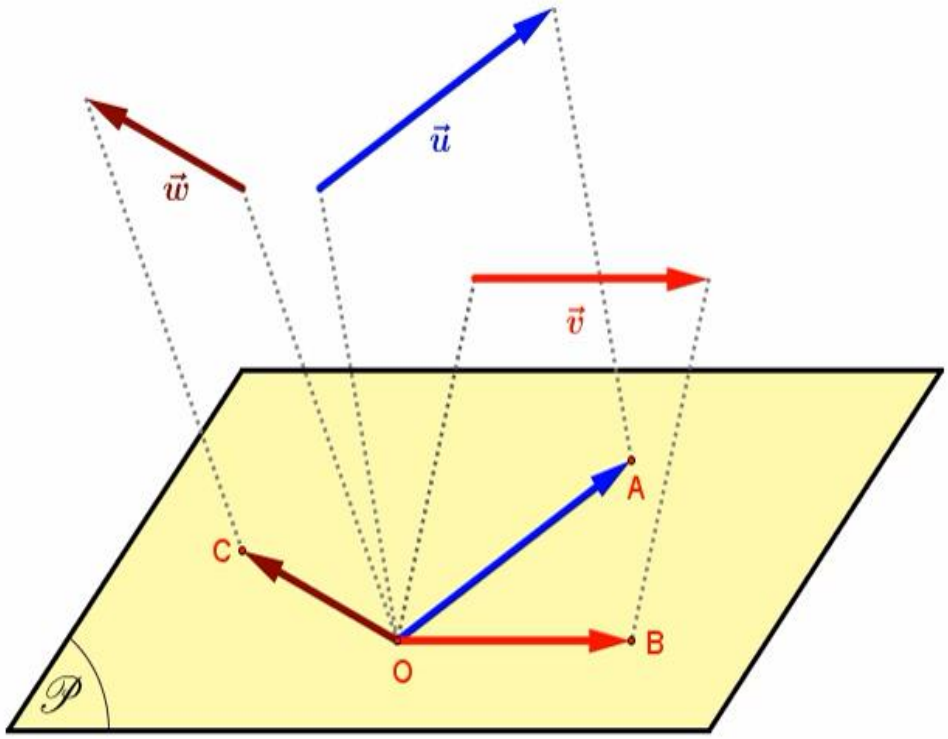
نستنتج أن الاشعة

$\overrightarrow{LJ}$ ، $\overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{AH}$ من نفس المستوي

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تعريف

لتكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة أشعة من الفضاء و لتكن O نقطة كيفية من الفضاء



نعتبر النقط A ، B و C من الفضاء

حيث

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ $\quad$ $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ $\quad$ و $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$

القول أن الاشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي

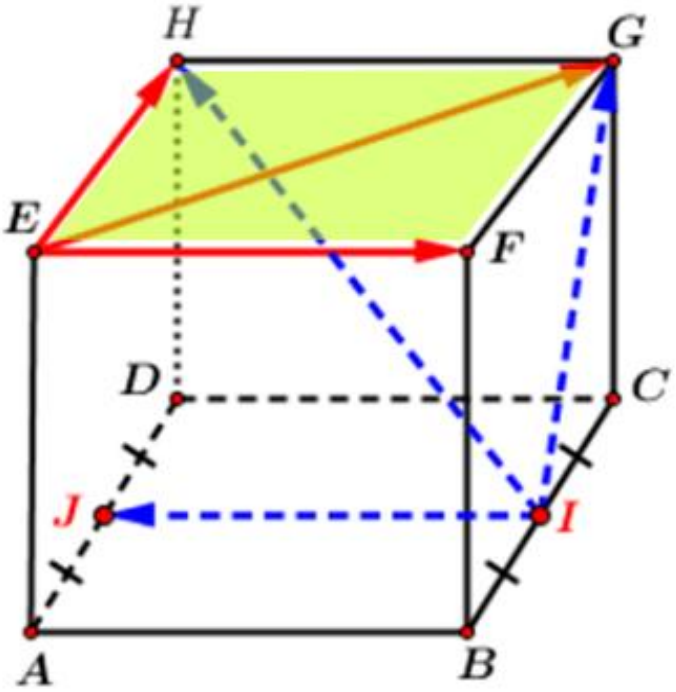
يعني أن

النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس المستوي

مثال:

$ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف الحرف $[BC]$

و J منتصف الحرف $[AD]$



- نلاحظ أن النقط E ، F ، G و H إلى نفس المستوي

ومنه

فالأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$

الممثلة على الترتيب بـ: $\overrightarrow{EF}$ ، $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EH}$

من نفس المستوي

- بما أن $JIGH$ متوازي الاضلاع

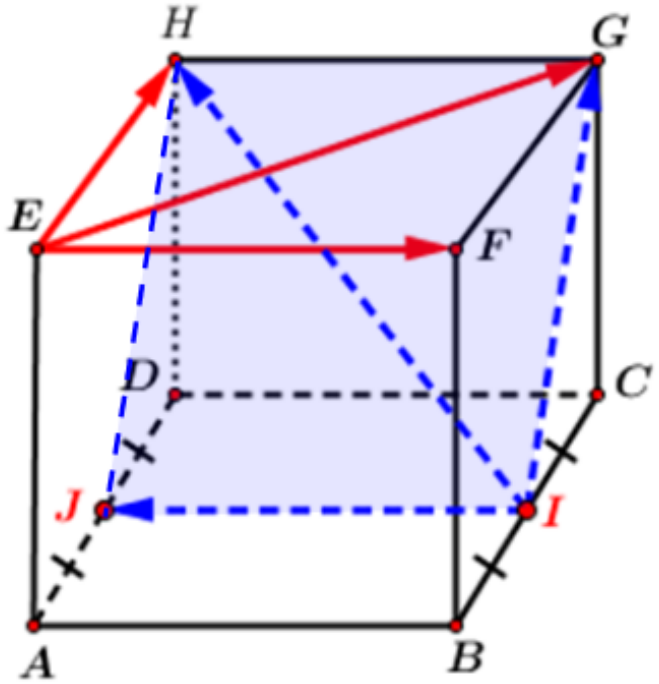
فإن النقط J ، I ، G و H

من نفس المستوي

وبذلك

الاشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IH}$ و $\overrightarrow{IG}$

من نفس المستوي



ملاحظة :

- يعمم التعريف السابق إلى عدد كيفي من أشعة الفضاء
- إذا كان شعاعان من بين الاشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطين خطيا تكون الاشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي .

مبرهنة :

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء ،

حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا .

تكون الاشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي

إذا و فقط وجد عددان حقيقيان x و y

حيث

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

البرهان:

لتكن O نقطة كيفية من الفضاء ولتكن A ، B و C من الفضاء

حيث $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$

القول أن

الاشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي

يعني أن

النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس المستوي

من التعريف السابق

النقط O، A، B ليست في إستقامية

لان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

فهي إذن تعرف مستويا (OAB) حيث $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ معلم له .

النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي

يعني أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (OAB)

وبذلك يوجد إذن عددان حقيقيان x و y

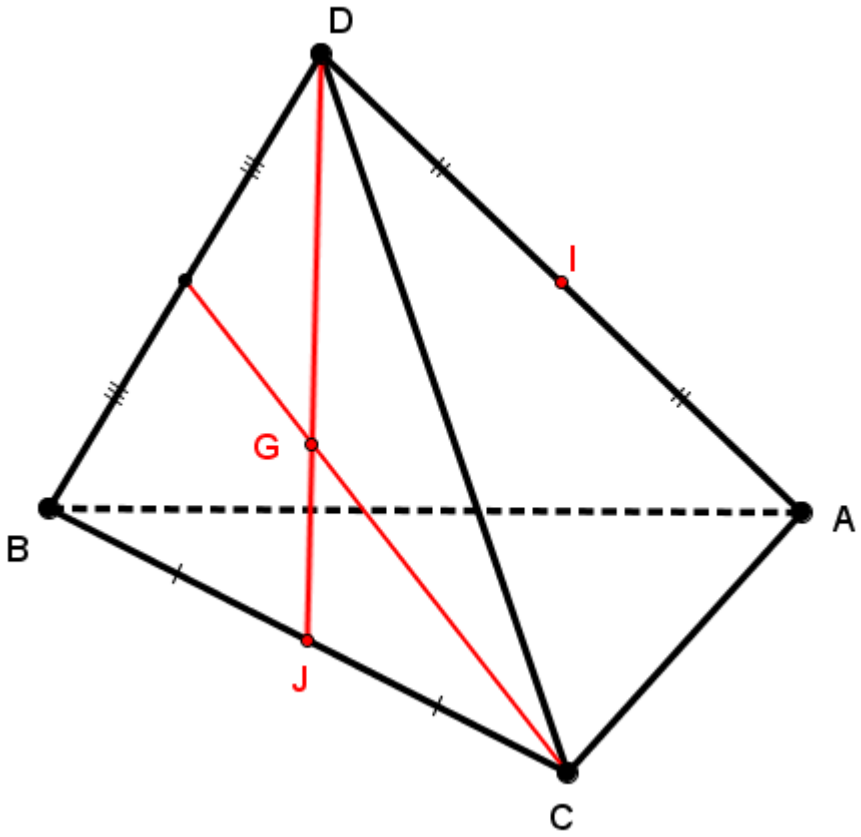
حيث : $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$

وتمثل الثنائية $(x;y)$ إحداثيات النقطة C بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

و هكذا $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تطبيق 1:



$ABCD$ رباعي وجوه .لتكن I منتصف الحرف $[AD]$

و J منتصف الحرف $[BC]$

و G مركز ثقل المثلث DBC .

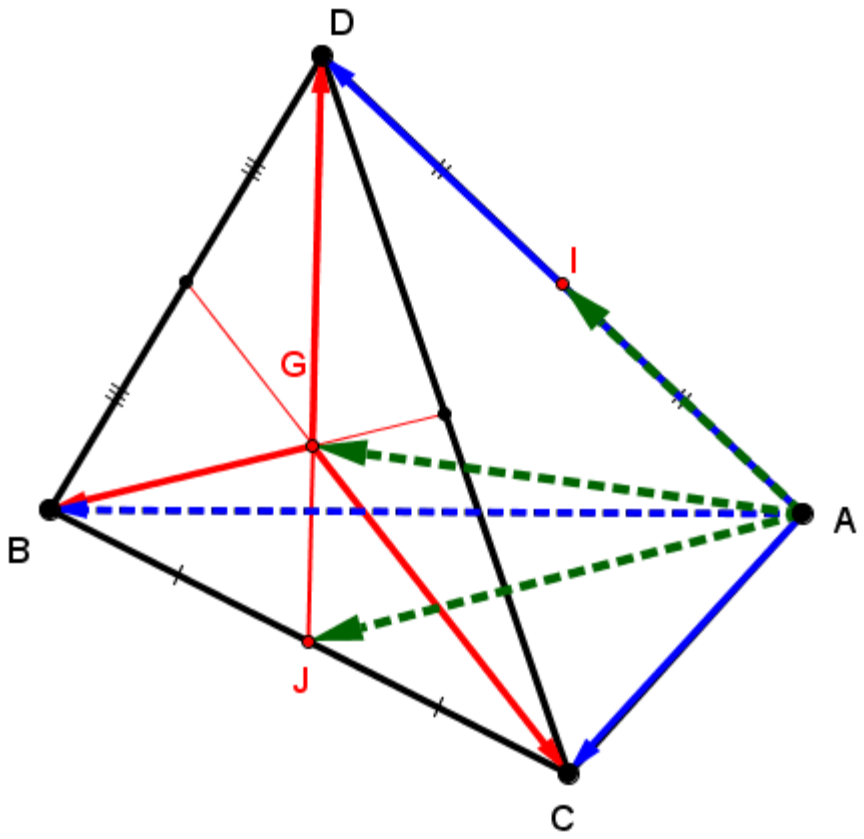
1- عبر عن الشعاع $\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ مرة بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$

ومرة أخرى بدلالة الشعاع $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\right)$.

2- بين أن النقط I ، J ، G و A تنتمي إلى نفس المستوي .

الحل :

1- التعبير عن الشعاع $\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ مرة بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$:



- لدينا G مركز ثقل المثلث DBC

فان

$$\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

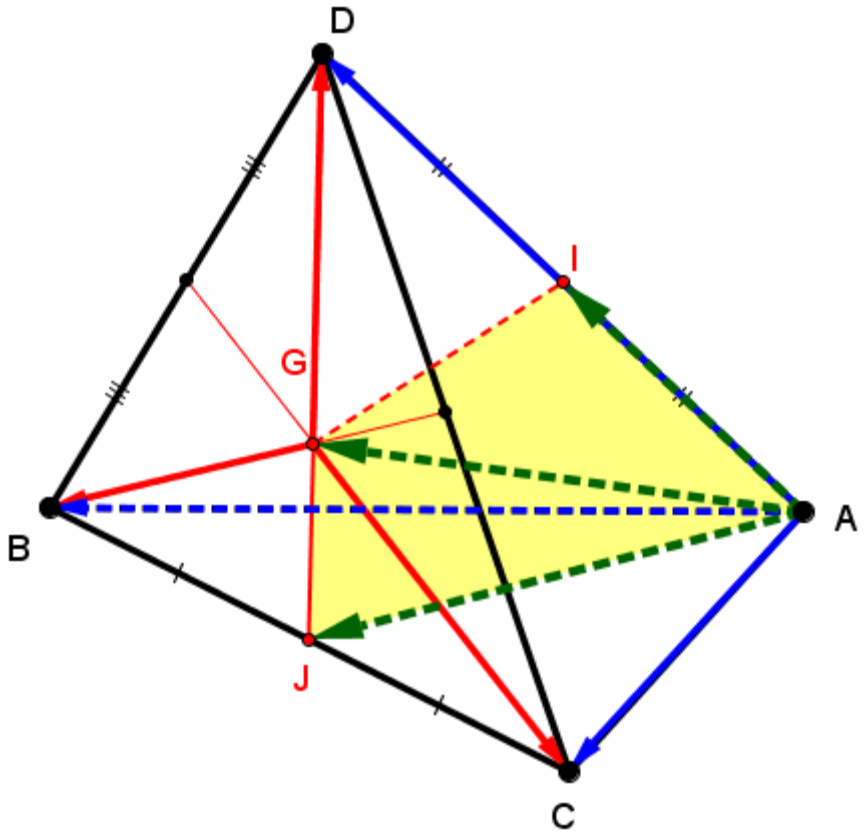
ومنه

$$\boxed{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}} \rightarrow (1)$$

- لدينا $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}\end{cases}$

ومنه

$$\boxed{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AI}\right)} \rightarrow (2)$$



- من (1) و (2) نستنتج

$$3\overrightarrow{AG} = 2\left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI}\right)$$

ومنه

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}$$

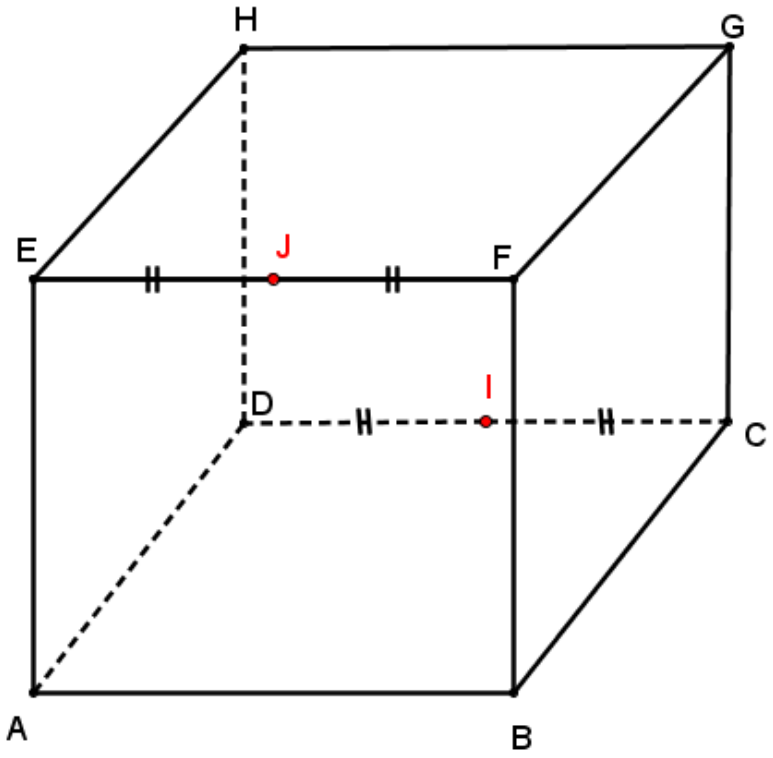
ومنه الاشعة $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AJ}$

من نفس المستوي

وبذلك النقط I ، J ، G و A تنتمي إلى مستو واحد

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

تطبيق 2:



$ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف الحرف $[BC]$

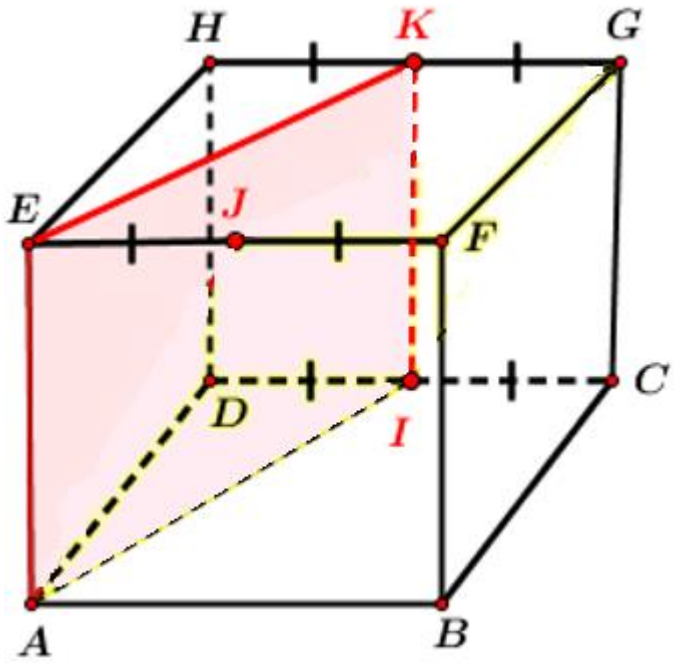
و J منتصف الحرف $[EH]$

1- برهن أن كل من الرباعيين $CFJI$ و $AIGJ$ متوازيا أضلاع

2- برهن ان الاشعة $\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{CF}$ و $\overrightarrow{AG}$ من نفس المستوي

الحل :

1- إثبات أن الرباعي $CFJI$ متوازي أضلاع :



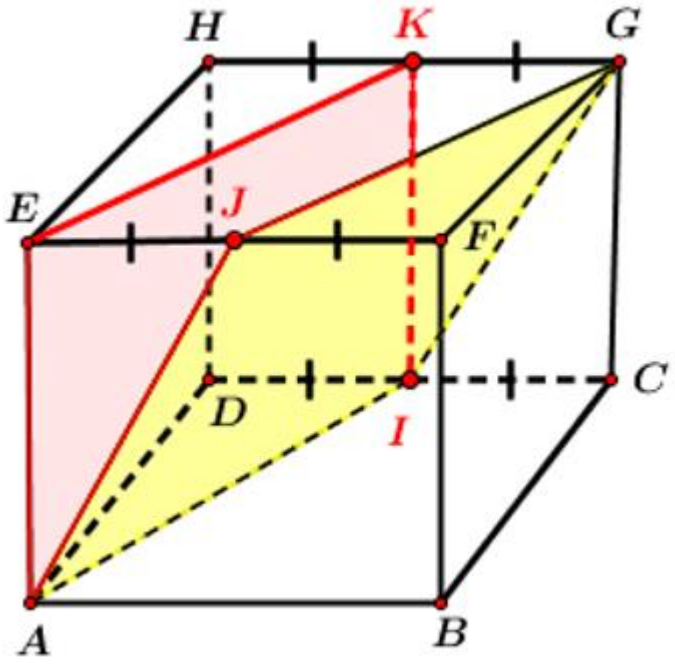
بما ان $\begin{cases} \overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \end{cases}$ و $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$ ومنه $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{IC}$

وبذلك نستنتج أن الرباعي $CFJI$ متوازي أضلاع.

- إثبات أن الرباعي $AIGJ$ متوازي أضلاع :

بفرض منتصف K الحرف $[HG]$

لدينا $\begin{cases} \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HD} \\ \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EA} \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{EA}$ و بذلك $AIKE$ متوازي أضلاع



ومنه نستنتج $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AI} \rightarrow (1)$

ولدينا $\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{EJ}$

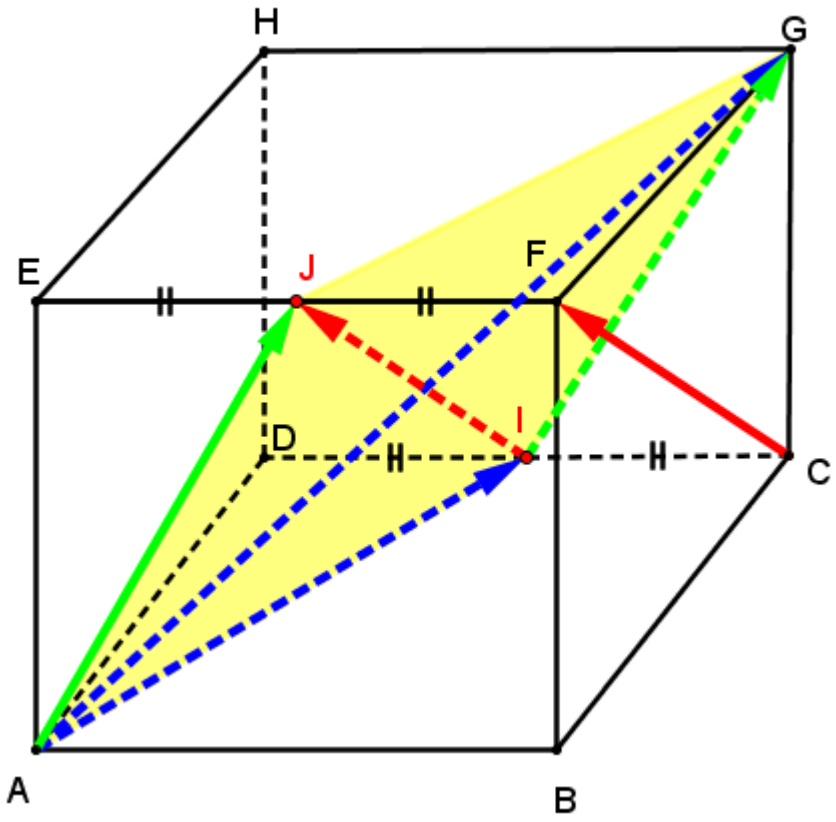
ومنه $EJGK$ متوازي أضلاع

ومنه نستنتج $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{JG} \rightarrow (2)$

من (1) و(2) نستنتج أن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JG}$

و بذلك $AIGJ$ متوازي أضلاع

2- إثبات ان الاشعة $\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{CF}$ و $\overrightarrow{AG}$ من نفس المستوي:



لدينا $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG}$ $\leftarrow (3)$ (علاق شال)

لدينا $\begin{cases} \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CF} \end{cases}$

ومنه $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CF}$ $\leftarrow (4)$

من (3) و(4) نجد

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CF}$$

ومنه $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CF}$ وبذلك نستنتج أن الاشعة $\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{CF}$ و $\overrightarrow{AG}$ من نفس المستوي

التعليم في الفضاء

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

1. المعلم الديكارتي:

تعريف:

نسمي معلما للفضاء مبدؤه النقطة O

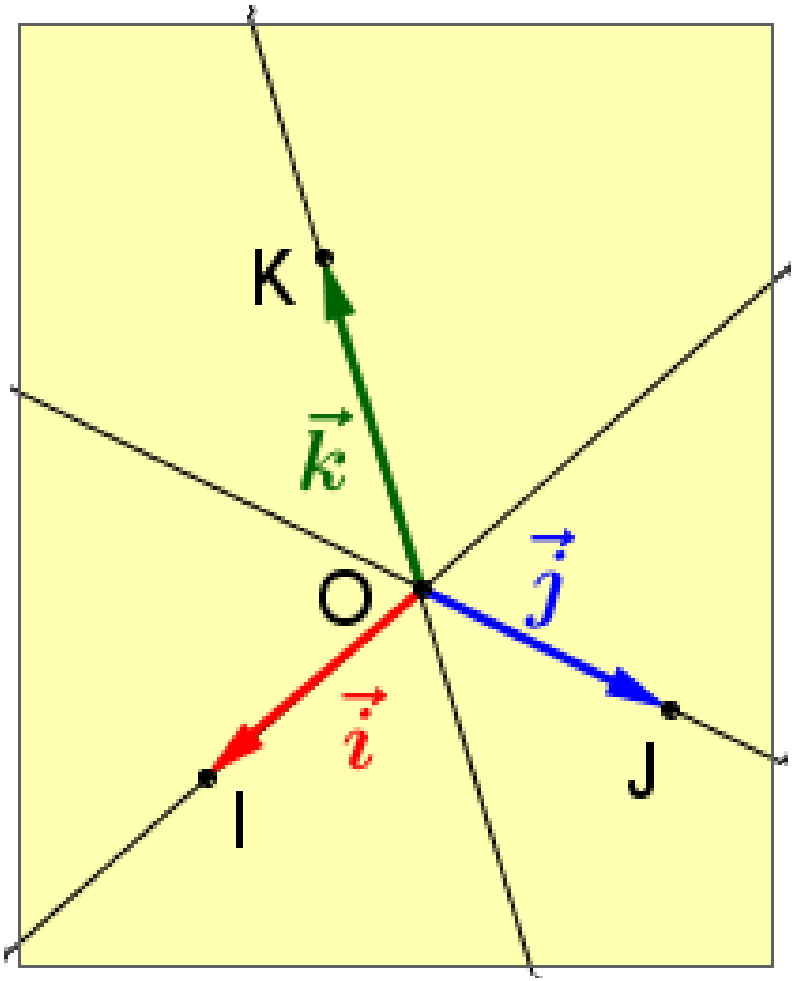
كل رباعية نقط $(O;I,J,K)$

ليست من نفس المستوي.

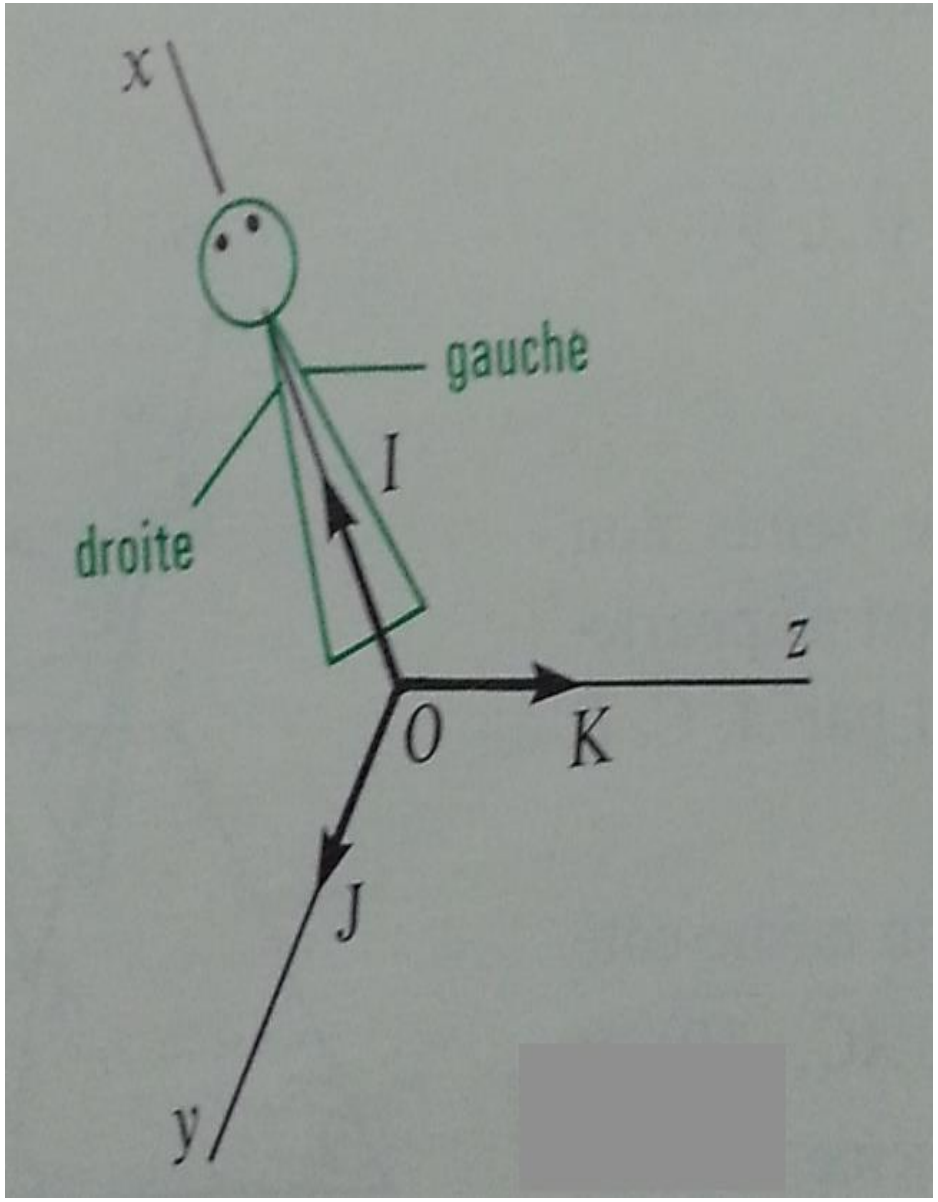
إذا وضعنا:

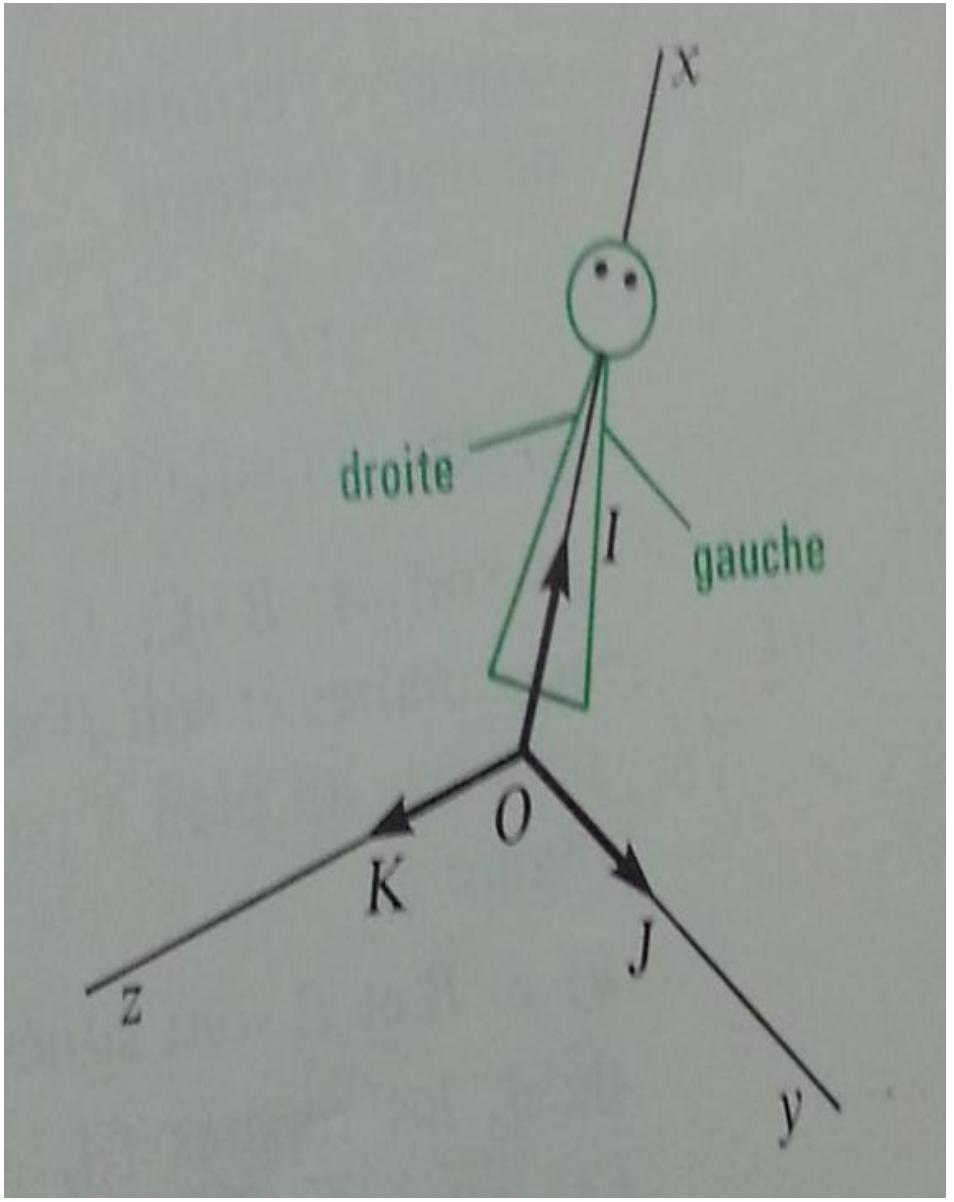
$\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

نرمز إلى المعلم السابق بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين





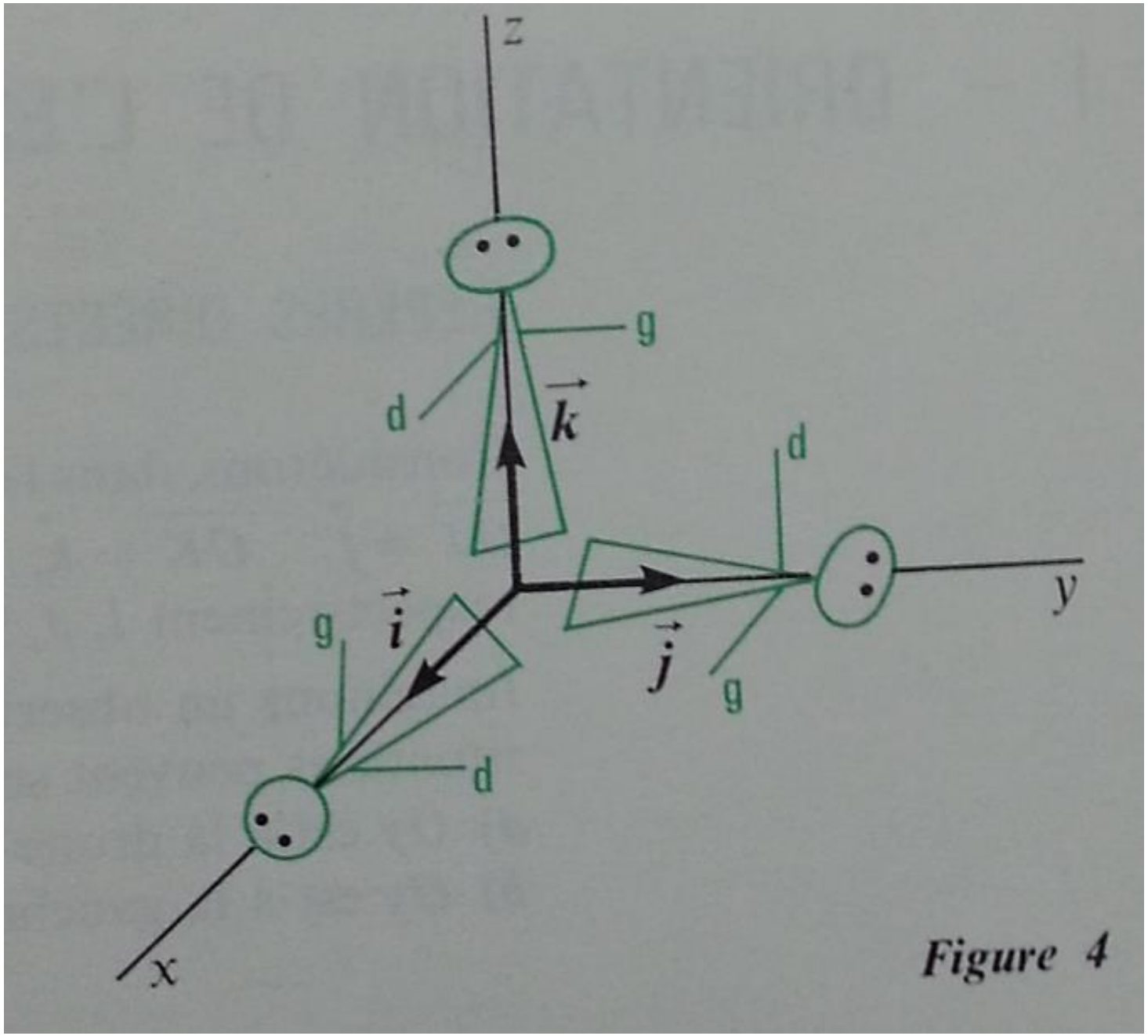
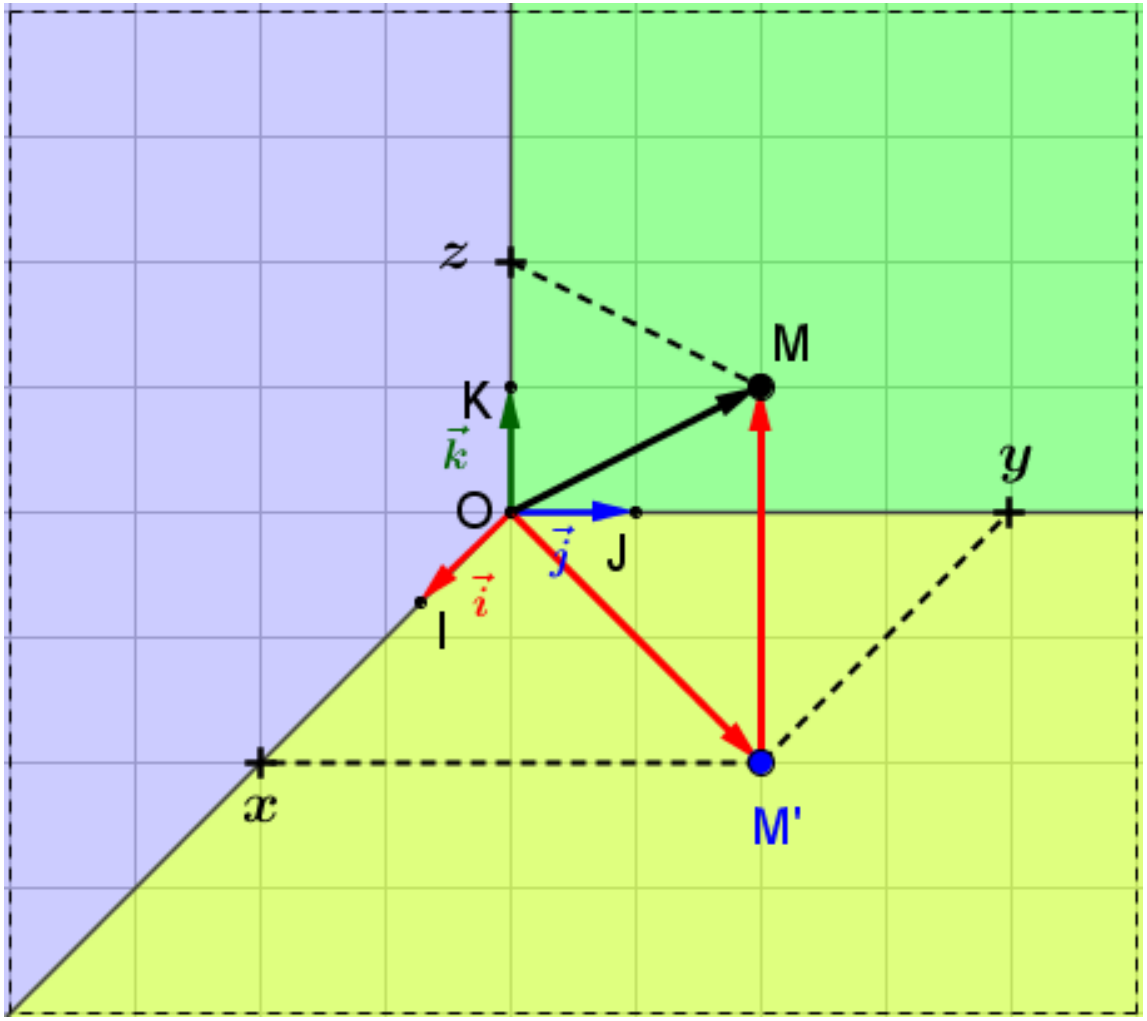


Figure 4

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

2. إحداثيات نقطة :



مبرهنة:

إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء

و كانت M نقطة من الفضاء

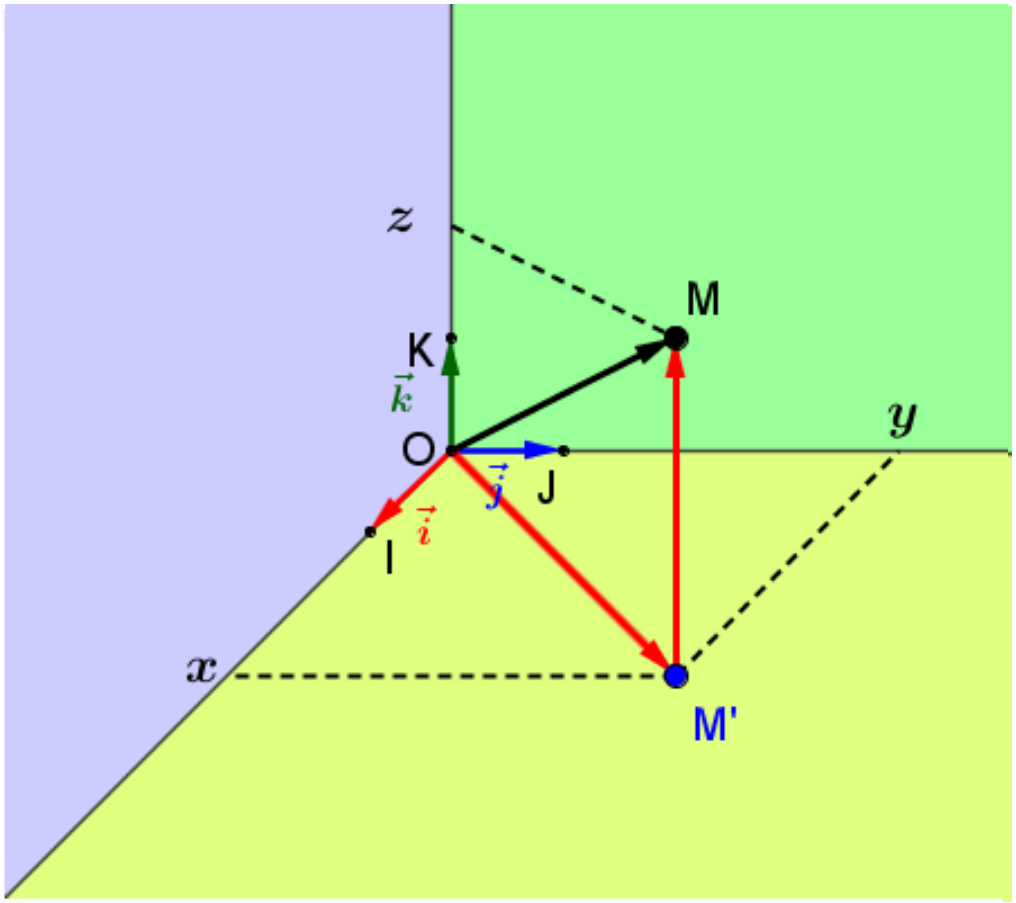
فإنه توجد ثلاثية وحيدة $(x;y;z)$

من الأعداد الحقيقية حيث :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

برهان:

نضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ النقط O، I، J و K ليست من نفس المستوي



و منه المستوي (OIJ) لا يوازي المستقيم

الذي يمر من M و أحد أشعة توجيه له $\vec{k}$

فهما إذن متقاطعان ولتكن M' نقطة تقاطعهما.

النقطة M' تنتمي إلى $(O;\vec{i},\vec{j})$

و منه يوجد عددان حقيقيان x و y وحيدين

حيث: $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

الشعاعان $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{k}$ مرتبطان خطيا

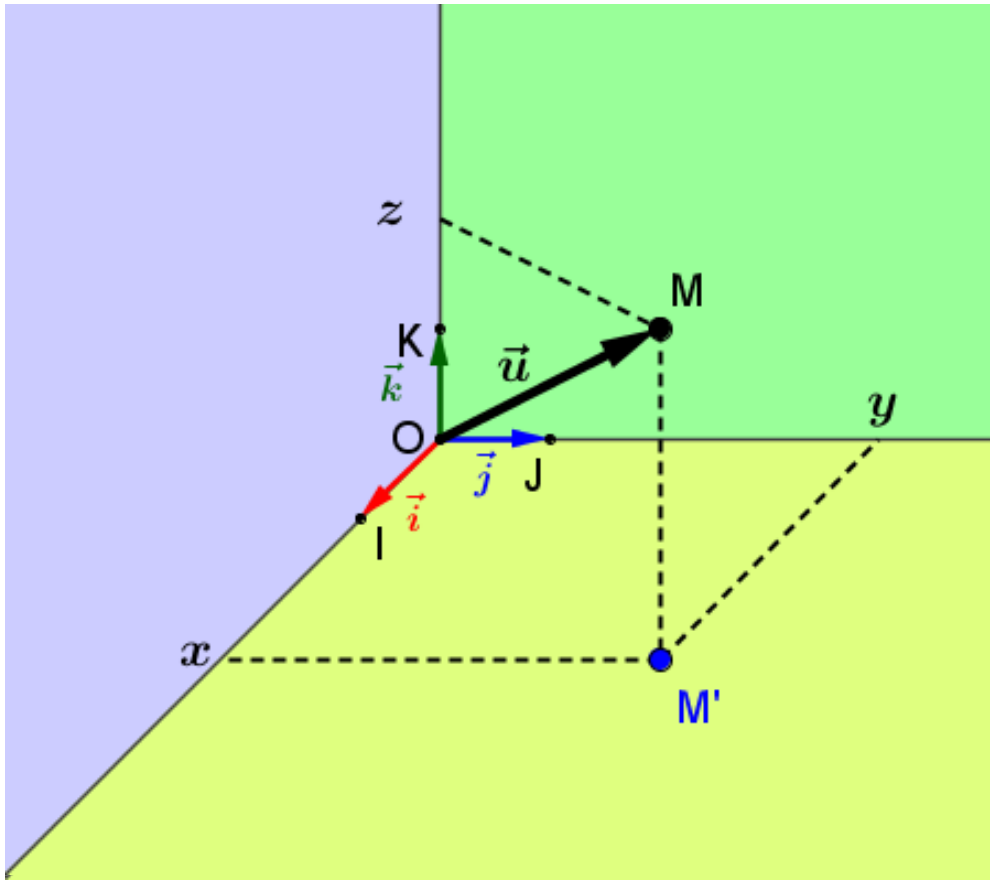
و منه يوجد عدد حقيقي وحيد z

حيث: $\overrightarrow{MM'}=z\vec{k}$

لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{MM'}$ ومنه : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

3. إحداثيات شعاع:



تعريف:

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

و لتكن M النقطة الوحيدة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$

إحداثيات الشعاع $\vec{u}$ هي $(x;y;z)$ إحداثيات النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ويمكن أن نكتب $\overrightarrow{OM}\ (x;y;z)$

و هكذا كل شعاع $\vec{u}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

الحساب على الإحداثيات

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

1. خواص الإحداثيات:

يتم تمديد كل النتائج الخاصة بالإحداثيات في المستوي إلى الفضاء.

نتائج:

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

إذا كان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ شعاعين من الفضاء و كان α عددا حقيقيا

فإن:

1. $\vec{u}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=0$
2. $\vec{u}=\vec{v}$ يعني $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$
3. إحداثيات $(\vec{u}+\vec{v})$ هي $(x+x';y+y';z+z')$

و إحداثيات $\alpha\vec{u}$ هي $(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$

إذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء

فإن:

1. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

2. إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

2. الأشعة من نفس المستوى:

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

$\vec{u}(a;b;c)$ ، $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ ثلاثة أشعة من الفضاء.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي

إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y

حيث $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

و هذا يعني أن الجملة $\begin{cases} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b'' \\ cx + c'y = c'' \end{cases}$ تقبل حلا (x,y) في $\mathbb{R}^2$

3. معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له :

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له.

$M(x;y;z)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

أي $x-x_A=\alpha a$ و $y-y_A=\alpha b$ و $z-z_A=\alpha c$

و هذا يعني إذا كان $abc\neq 0$

أن $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$ أي أن مثلا : $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ c(x-x_A)-a(z-z_A)=0 \end{cases}$

أما إذا كان أحد الأعداد a ، b أو c معدوما

فإن مثلا في حالة $c=0$:

$$\begin{cases} b\left(x-x_A\right)-a\left(y-y_A\right)=0 \\ z=z_A \end{cases}$$

أما إذا انعدم عددان من الأعداد a ، b و c

فإن مثلا في حالة $a=b=0$:

$\begin{cases} x=x_A \\ y=y_A \end{cases}$ و يبقى z كيفي.

حالات خاصة:

نرمز إلى محور الفواصل بـِ (Ox) إلى محور التراتيب بـِ (Oy) و إلى محور الرواقم بـِ (Oz)

الجدول التالي يحدد الشروط الكافية و اللازمة التي يجب أن تحققها $(x;y;z)$ إحداثيات نقطة M

لكي تنتمي إلى المحور المعني أو مستقيم يوازي أحد محاور الاحداثيات :

المحور	(Ox)	(Oy)	(Oz)
مميزاته	$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$
يمر بالنقطة	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$

يوازي المحور	(Ox)	(Oy)	(Oz)
مميزاته	$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$
يمر بالنقطة	$(0; y_0; z_0)$	$(x_0; 0; z_0)$	$(x_0; y_0; 0)$

المسافة
بين
نقطتين

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

1. طويلة شعاع:

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

نعتبر الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ و لتكن M النقطة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. نعلم أن $\|\vec{u}\|=OM$.

نعتبر M_1، M_2، M_3 و M' النقط المعرفة كما يلي:

$$\overrightarrow{OM_1}=x\,\vec{i} \quad ، \quad \overrightarrow{OM_2}=y\,\vec{j} \quad ، \quad \overrightarrow{OM_3}=z\,\vec{k}$$

و $$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$$

إعداد الاستاذ إبراهيم وعلي حسين

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OMM'

نحصل على: $OM'^2 = OM_1^2 + M_1M'^2$

و بما أن: $M_1M'^2 = OM_2^2$

فإن: $OM^2 = OM'^2 + OM_3^2$

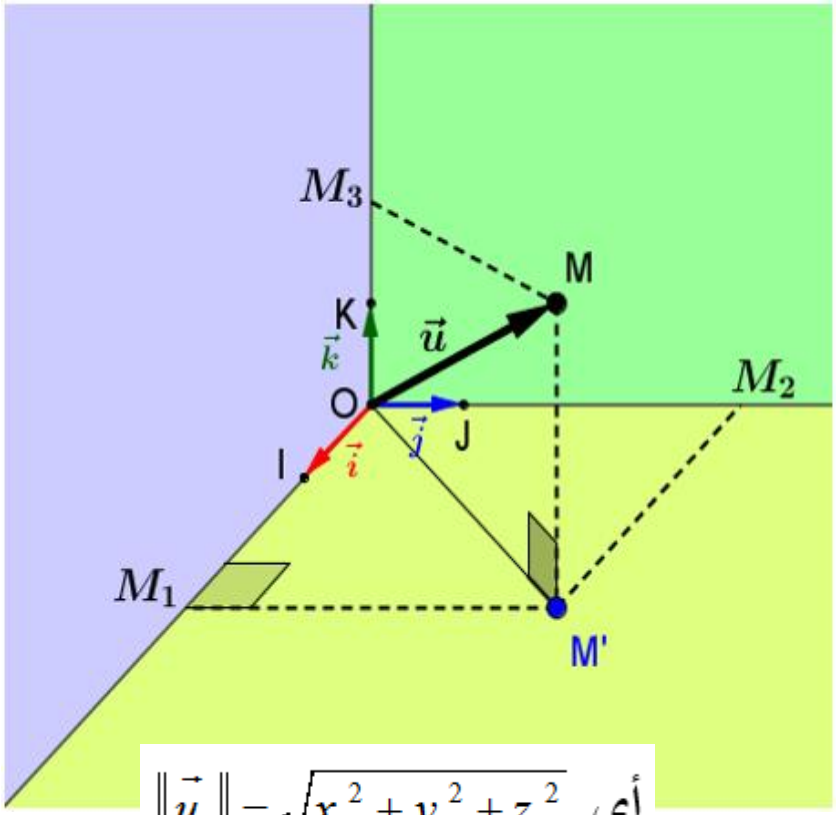
باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OM_1M'

نحصل على: $OM'^2 = OM_1^2 + M_1M'^2$

و بما أن: $M_1M'^2 = OM_2^2$

فإن: $OM'^2 = OM_1^2 + OM_2^2$

نجد هكذا أن: $OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2$ و منه: $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$



أي $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس تحسب طويلة الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ بـ: $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مثال:

طويلة الشعاع $\vec{u}(-1;2;-2)$

هي

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}$$

و منه

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{9} = 3$$

2. المسافة بين نقطتين:

علما أن $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$ و بتطبيق المبرهنة السابقة على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس تحسب المسافة بين النقطتين $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ و $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

مثال: المسافة بين النقطتين $A(0;-2;3)$ و $B(1;-1;2)$ هي $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-1+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$

ملاحظة:

عند إجراء الحسابات غالبا ما يفضل مربع المسافة على المسافة

3. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم :

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

α عدد حقيقي موجب تماما. (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من الفضاء.

$M \in (S)$ يعني $OM = \alpha$ أي $OM^2 = \alpha^2$

و هذا يعني $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

إذن $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

هي معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها O و نصف قطرها α.

أللهم اجعل عملي
هذا صدقة جارية
على المرحوم
أبني
مأمون إدريس