المدة: 02 (ساعتان)

## التمرين الأول:

ملاحظة: السؤال 3) مستقل عن السؤالين 1) و2).

الدالة $f$ معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) أحسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة بدلالة العددين $a$ و $b$.
2) عين قيمتي العددين $a$ و $b$ إذا علمت أنّ المنحنى $(C)$ يقبل مماسا معادلته $y=-2x+3$ عند النقطة $A(1;1)$ .
3) فيما يلي نضع $a=3$ و $b=-4$
أ) أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف، وفسّر النتائج بيانيا.
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها.
ج) عيّن إحداثيات النقط من $(C)$ التي يكون فيها المماس $(T)$ عموديا على المستقيم ذي المعادلة: $y=-\dfrac{1}{2}x+1$
د) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى $(C)$ مع محوري المعلم. ثمّ أرسم $(C)$.
هـ) اشرح باستعمال $(C)$ كيف يمكن إنشاء $(C_g)$ الممثل للدالة $g$ حيث: $g(x)=\dfrac{3x-4}{|x-2|}$

## التمرين الثاني:

$ABI$ مثلث في المستوي حيث $AB=10$ .

- النقطة $J$ صورة $I$ بالتحاكي $h_A$ الذي مركزه $A$ ونسبته 2.
- النقطة $K$ صورة $J$ بالتحاكي $h_B$ الذي مركزه $B$ ونسبته 3.

1) عبّر عن كل تحاك بعلاقة شعاعية، ثم أنشئ النقطتين $J$ و $K$.
2) بيّن أنّ $J$ مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;1);(I;-2)\}$ ، وأنّ $K$ مرجّح الجملة المثقلة $\{(J;3);(B;-2)\}$ .
3) بعلم أنّ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BJ}$ ، استنتج أنّ $I$ مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;3);(B;2);(K;1)\}$
4) استنتج وجود نقطة وحيدة $C$ من القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $\overrightarrow{CK}=6\overrightarrow{CI}$ ، وأكمل الفرغات في العبارة التالية: $C$ هو مركز تحاك يحوّل ...... إلى ....... ونسبته ...... .

## التمرين الثالث:

$x$ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi[$ .

1) بسط العبارة $E(x)=\sin(\pi+x)-\cos\left(\dfrac{13\pi}{2}+x\right)-\sin(5\pi-x)$
2) حل المعادلتين: $\sin x=0$ ، $\sqrt{2}\cos x=1$
3) استنتج حلول المتراجحة: $\cos x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

انتهى

بالتوفيق

المدة: 02 (ساعتان)

التمرين الأول: (09 نقاط)

ملاحظة: السؤال 3) مستقل عن السؤالين 1) و2).

الدالة $f$ معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) أحسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة بدلالة العددين $a$ و $b$.

الحل: $f'(x)=\dfrac{-2a-b}{(x-2)^2}$ ........................................ 0.5ن

2) عين قيمتي العددين $a$ و $b$ إذا علمت أنّ المنحنى $(C)$ يقبل مماسا معادلته $y=-2x+3$ عند النقطة $A(1;1)$ .

حل: ........................................ 1ن

من المعطيات نشكل الجملة التالية $\begin{cases} f'(1)=-2 \\ f(1)=1 \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} -2a-b=-2(1-2)^2 \\ a(1)+b=1(1-2) \end{cases}$

ويكافئ: $\begin{cases} -2a-b=-2 \\ a+b=-1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

3) فيما يلي نضع $a=3$ و $b=-4$

أ) أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف، وفسّر النتائج بيانيا.

حل: ........................................ 1.5ن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3-\frac{4}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3-\frac{4}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

التفسير: المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=3$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2}\frac{3x-4}{x-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{>}2}\frac{3x-4}{x-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

التفسير: المنحنى $(C)$ يقبل مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=2$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها. ........................................ 1+1ن

حل: اتجاه التغير: عبارة الدالة المشتقة: $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$

ومنه من أجل $x\neq 2$ فإنّ $f'(x)<0$ والدالة $f$ متناقصة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

جدول التغيرات: أنظر الجدول.

| $x$ | $-\infty$     $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $3 \searrow -\infty$ | $+\infty \searrow 3$ |

المدة: 02 (ساعتان)

ج) عيّن إحداثيات النقط من $(C)$ التي يكون فيها المماس $(T)$ عموديا على المستقيم ذي المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+1$

حل: ........................................................................................ 1ن

نحل المعادلة: $f'(x)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ يكافئ: $\frac{-2}{(x-2)^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

ويكافئ: $(x-2)^2=-1$ (مستحيلة)، إذن لا توجد أية نقطة من المنحنى $(C)$ يكون فيها المماس عموديا على المستقيم المعرّف أعلاه.

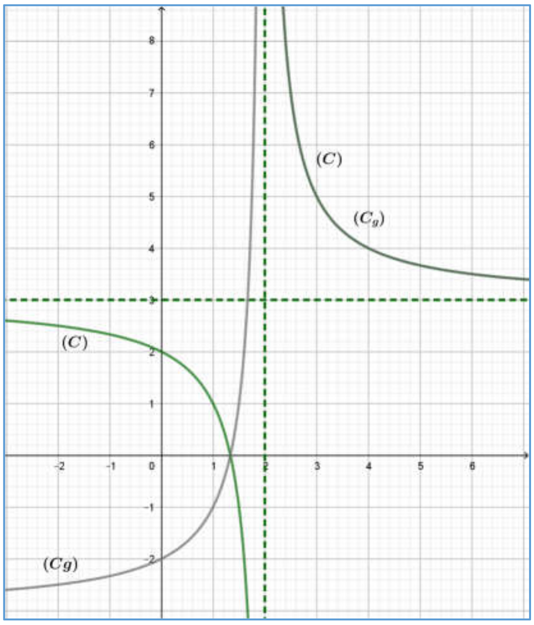
د) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى $(C)$ مع محوري المعلم. ثمّ أرسم $(C)$.

حل: .................................................. 1+1ن

$$(C)\cap(xOx')=\left\{\left(\frac{4}{3};0\right)\right\}$$ و

$$(C)\cap(y'Oy)=\{(0;-2)\}$$

رسم المنحنى: انظر الشكل.




هـ) اشرح باستعمال $(C)$ كيف يمكن إنشاء $(C_g)$ الممثل للدالة $g$ حيث: $g(x)=\frac{3x-4}{|x-2|}$

حل: .................................................. 1ن

نكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة على مجالين مختلفين:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & : ]2;+\infty[ \\ -f(x) & : ]-\infty;2[ \end{cases}$$

ومنه: $(C_g)$ ينطبق على $(C)$ على المجال $]2;+\infty[$، و $(C_g)$ يناظر $(C)$ بالنسبة لمحور الفواصل على $]-\infty;2[$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

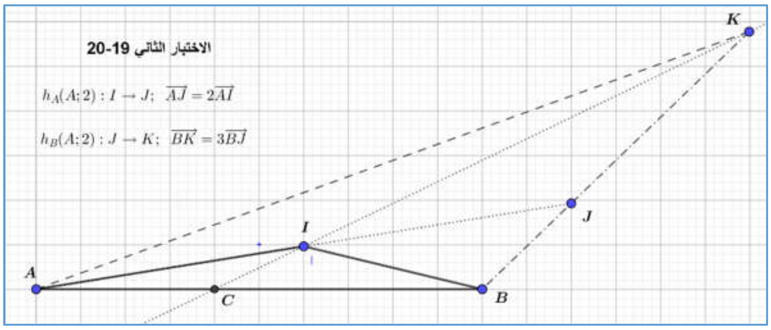
$ABI$ مثلث في المستوي حيث $AB=10$ . النقطة $J$ صورة $I$ بالتحاكي $h_A$ الذي مركزه $A$ ونسبته 2. النقطة $K$ صورة $J$ بالتحاكي $h_B$ الذي مركزه $B$ ونسبته 3.

1) عبّر عن كل تحاك بعلاقة شعاعية، ثم أنشئ النقطتين $J$ و $K$.

حل: ................................ 1.5ن

$\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AI}$ ، و $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BJ}$

الإنشاء: أنظر الشكل.




2) بيّن أنّ $J$ مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;1);(I;-2)\}$، وأنّ $K$ مرجّح الجملة المثقلة $\{(J;3);(B;-2)\}$.

حل: ........................................................................................ 1+1ن

✓ $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AI}$ ، تكافئ: $J$ مرجح $\{(A;\alpha);(I;\beta)\}$ حيث: $\beta=2$ و $\alpha+\beta=1$

ومنه: $\alpha=-1$ إذن: $J$ مرجح $\{(A;-1);(I;2)\}$ أي: $J$ مرجح $\{(A;1);(I;-2)\}$

✓ $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BJ}$ ، تكافئ: $K$ مرجح $\{(B;\alpha);(J;\beta)\}$ حيث: $\beta=3$ و $\alpha+\beta=1$

ومنه $\alpha=-2$ إذن: $K$ مرجّح $\{(B;-2);(J;3)\}$.

3) بعلم أنّ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BJ}$ ، استنتج أنّ $I$ مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;3);(B;2);(K;1)\}$

حل: ........................................................................................ 1ن

طريقة1:

نفرض أن النقطة $G$ هي مرجح $\{(A;3);(B;2);(K;1)\}$ ، ونثبت أنها منطبقة على $I$.

لدينا $J$ مرجح $\{(B;2);(K;1)\}$

وينتج: $G$ هي مرجّح $\{(A;3);(J;3)\}$ ، ومنه $G$ منتصف $[AB]$ ومنه: $G$ منطبقة على النقطة $I$.

طريقة 2:

$\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BJ}$ يكافئ $\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IK}\right)-3\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}$ ويكافئ: $-2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IK}-3\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$

ولدينا: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IJ}$ فينتج: $-2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IK}-3\overrightarrow{AI}=\vec{0}$ ويكافئ: $3\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ وهو المطلوب.

4) استنتج وجود نقطة وحيدة $C$ من القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $\overrightarrow{CK}=6\overrightarrow{CI}$ ، وأكمل الفرغات في العبارة التالية: $C$ هو مركز تحاك يحوّل ...... إلى ....... ونسبته ...... .

حل: ........................................................................................ 2.5ن

$\overrightarrow{CK}=6\overrightarrow{CI}$ تكافئ: $\overrightarrow{CK}-6\overrightarrow{CI}=0$ و $1-6=5\neq 0$ ومنه $C$ موجودة ووحيدة.

الانتماء إلى $[AB]$:

وبفرض $E$ مرجّح $\{(A;3);(B;2)\}$ ، (أي $E$ تنتمي إلى القطعة $[AB]$ لانّ المعاملين 2 و 3 موجبين)

ولدينا $I$ مرجّح $\{(A;3);(B;2);(K;1)\}$

فينتج: $I$ هي مرجّح $\{(E;5);(K;1)\}$ ، ومنه $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{EK}$ أي: $\overrightarrow{EK}=6\overrightarrow{EI}$ إذن $E$ منطبقة على $C$.

- النقطة $C$ هي مركز تحاك يحوّل I إلى K ونسبته 6.

---

التمرين الثالث: (04 نقاط)

$x$ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi[$.

1) بسط العبارة $E(x)=\sin(\pi+x)-\cos\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)-\sin(5\pi-x)$

المدة: 02 (ساعتان)

حل: ........................................................................................ 1.5ن

$$E(x)=\sin(\pi+x)-\cos\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)-\sin(5\pi-x)$$

$$E(x)=-\sin(x)-\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin(4\pi+\pi-x)$$

$$E(x)=-\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin(\pi-x)$$

$$E(x)=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)$$

$$\boxed{E(x)=-\sin(x)}$$

2) حل المعادلتين: $\sin x=0$ ، $\sqrt{2}\cos x=1$

حل: ........................................................................................ 1+1ن

أ) $\sin x=0$ تكافئ: $\sin x=\sin 0$ تكافئ: $x=0+2k\pi$ أو $x=\pi+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

ومن أجل $]-\pi;\pi]$ نجد: $x\in\{0;\pi\}$

ب) $\sqrt{2}\cos x=1$ تكافئ: $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وتكافئ: $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتكافئ: $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$

وتكافئ: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

ومن أجل $]-\pi;\pi]$ نجد: $x\in\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

3) استنتج حلول المتراجحة: $\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: ........................................................................................ 0.5ن

$$x\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$$

انتهى — بالتوفيق

نص الاختبار فيما يلي