تحضير مذكرة تعليمية

السنة الدراسية		إعداد الاستاذ
2014/2013	Yousfi Math Yousfisifou804@yahoo.fr	يوسفي عبد الرحمن

المحور الرابع : الد وال العددية

المستوى : الثانية تسيير وأقتصاد

الموضوع : الدوال العددية

الكفاءة المستهدفة

- الدالة مكعب تعريفها وتمثيلها البياني
- تعريف مجموع وجداء .حاصل قسمة مركب دالتين
- استنتاج منحنيات دوال مرفقة انطلاقا من منحنيات
- مركز تناظر منحنى دالة و مستقيم محور تناظر
- مقاربة مفهوم العدد المشتق على مثال
- معرفة العدد المشتق على مثال
- العدد المشتق لدالة من اجلة قيمة
- ترجمة عدد مشتق بيانيا
- معادلة المماس

المكتسبات القبلية

- الدراسة والتمثيل البياني للدوال المرجعية
- التمثيلات البيانية للدوال المالوفة

مخطط الدرس	التوقيت
نشاط :	
1: الدالـــــــة مكعب	1 ســا
2: عموميات على الدول	1 ســا
3:عمليات على الدوال	1 ســا
4: مركب دالتين	
5: تفكيك دالتين	3 ســا
6: التمثيلات البيانية والتحويلات	3 ســا
7: عناصر تانظر منحنى	3 ســا

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســــــــة: ثانوية رقان الجديدة	**المستـــــوى:** الثانية تسيير و أقتصاد
السنة الدراسية:	**ميدان التعلم:** التحليل
التاريــــــــخ:	**الوحدة التعلمية:** 4 الدوال المرجعية
توقيت الحصة :	**موضوع الحصة :** الدالة مكعب

المكتسبات القبلية : الدراسة والتمثيل البياني للدوال المرجعية — **مؤشرات الكفاءات :** دراسة الدالة مكعب

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	انجاز سير الدرس	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط 01 ص 67

1. اثبت ان: من اجل كل عددين حقيقيين $a;b$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

2. تحقق ان : من اجل كل عددين حقيقيين $a;b$ ان

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^2+ab+b^2$

استنتج اشارة العبارة: a^2+ab+b^2 ثم

استنتج ان العددين $a-b$ و a^3-b^3 لهما نفس الاشارة

3. عددان x_1, x_2 حقيقيان حيث $x_1<x_2$

قارن بين x_1^3 و x_2^3

- اعط نص خاصية تسمح بمقارنة مكعبي عددين حقيقيين

نشاط:

المستوى ....،

أ/ ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة المعرفة علىR بـ: $f: x \mapsto x^3$.

1/ أكمل الجدول التالي.(صور وسوابق)

X	f(x)
-2	
-1	
-0.5	
	0
	1
	8

2/ أدرس تغيرات f. (مجموعة التعريف، اتجاه التغير، جدول التغيرات).

3/ أنشئ التمثيل البياني. $(\|\vec{i}\|=4\|\vec{j}\|)$.

ب/ استنتج في نفس المعلم السابق التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto x^3+2$.

انجاز سير الدرس

1/ الدالة مكعب

1.1 تعريف

تعريف:

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^3$: تسمى الدالة مكعب

مثال

f الدالة مكعب $f(-2)=-8$ ، $f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^3=-1/8$ و $f(3)=27$

2.1 خاصية

الدالة مكعب هي دالة فردية على $\mathbb{R}$

برهان: f هي الدالة مكعب و x عدد حقيقي.

لدينا $(-x)$ عدد حقيقي و $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

اي $f(-x)=-f(x)$.

اذن: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x)=-f(x)$

ينتج ان الدالة مكعب فردية على $\mathbb{R}$.

3.1 دراسة تغيرات الدالة مكعب

إتجاه تغيرات الدالة مكعب

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

مبرهنة : الدالة مكعب متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: f هي الدالة مكعب و x_1 و x_2 عددان حقيقيان.

اذا كان $x_1<x_2$ فان: $x_1^3<x_2^3$ (حسب النشاط 1)

اذن: من اجل كل عددان حقيقيان x_1 و x_2 اذاكان $x_1<x_2$ فان $f(x_1)<f(x_2)$ وبالتالي

الدالة مكعب متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات: مما سبق يكون جدول تغيرات الدالة مكعب كما يلي

4.1 التمثيل البياني

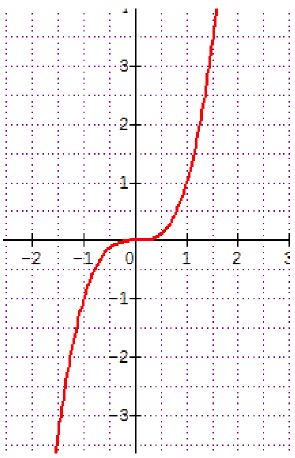
في المستوي المنسوب الى المعلم $(O;I,J)$ منحنى الدالة مكعب

المنحنى يقبل مركز تناظر وهو النقطة 0 مبدأ العمل .

جدول بعض القيم

x	2-	1-	0	1	2
$f(x)$	8-	1-	0	1	8

رسم المنحنى



التعليمات والتوجيهات

تكون دراسة الدالة "مكعب" مناسبة للتذكير بالمفاهيم الأساسية المتعلقة بالدوال (التعبير، التغيّرات، التمثيل البياني) المدروسة في السنة الأولى ثانوي.

5.1 الحل البياني لمعادلات من الشكل $x^3=k$

طريقة: ليكن عدد حقيقي k

لحل معادلة من الشكل $x^3=k$ بيانيا.

–نرسم المنحنى الممثل لكل من الدالتين $x\mapsto x^3$ و $x\mapsto k$ في نفس المعلم

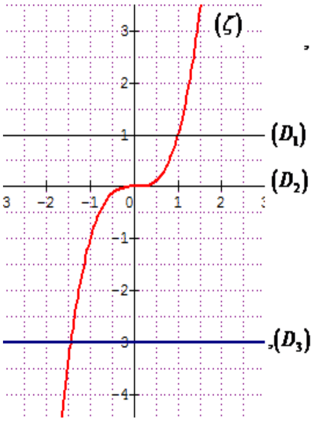
وحلول المعادلة $x^3=k$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنيين

تمرين : حل بيانيا كلا من المعادلات التالية : $x^3=2$ و $x^3=-3$ و $x^3=0$

الحل : نرسم في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{I},\vec{J})$

و $(\|\vec{i}\|=1,\|\vec{j}\|=1)$ المنحنى (ζ) الممثل للدالة $x\mapsto x^3$ و المستقيمان $(D_1),(D_2),(D_3)$

الممثلة على الترتيب للدوال $x\mapsto -3, x\mapsto 2, x\mapsto 0$



1.المستقيم (D_1) يقطع (ζ) في نقطة وحيدة فاصلتها 1.5-

اذن المعادلة $x^3=-3$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$ هو 1.5−

2.المستقيم (D_2) يقطع (ζ) في نقطة وحيدة فاصلتها 0-

اذن المعادلة $x^3=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$ هو 0

3.المستقيم (D_3) يقطع (ζ) في نقطة وحيدة فاصلتها 1

اذن المعادلة $x^3=2$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$ هو 1

تمرين منزلي 2 و5 ص 100

تمرين منزلي 8 و9 ص 101

6.1 الحل البياني لمتراجحات من الشكل $x^3\geq k$ أو $x^3\leq k$

طريقة: ليكن عدد حقيقي k: لحل المتراجحة من الشكل $x^3\geq k$ أو $x^3\leq k$ بيانيا.

–نرسم المنحنى الممثل لكل من الدالتين $x\mapsto x^3$ و $x\mapsto k$ في نفس المعلم ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما .

–مجموعة حلول المتراجحة $x^3\geq k$ هي مجموعة فواصل نقط المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^3$ الواقعة فوق المستقيم الممثل للدالة $x\mapsto k$ او عليه .

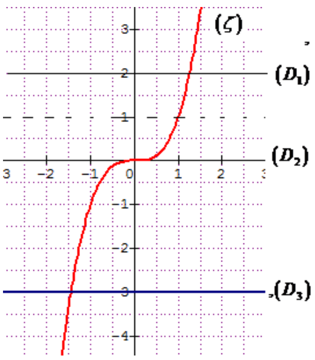
–مجموعة حلول المتراجحة $x^3\leq k$ هي مجموعة فواصل نقط المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^3$ الواقعة فوق المستقيم الممثل للدالة $x\mapsto k$ او عليه .

تمرين : حل بيانيا كلا من المعادلات التالية : $x^3\geq 2$ و $x^3\leq -3$ و $x^3>0$

الحل : نرسم في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{I},\vec{J})$

و $(\|\vec{i}\|=1,\|\vec{j}\|=1)$ المنحنى (ζ) الممثل للدالة $x\mapsto x^3$ و المستقيمان $(D_3),(D_2),(D_1)$

الممثلة على الترتيب للدوال $x\mapsto 0, x\mapsto -3, x\mapsto 2$



1.المستقيم (D_1) يقطع (ζ) في نقطة وحيدة فاصلتها 1

مجموع نقط المنحنى (ζ) التي تراتيبها اكبر او تساوي 2 هي

مجموعة نقط.المنحنى (ζ) التي تقع على المستقيم (D_1) او فوقه

فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $x^3\geq 2$ أي $x\in[3,+\infty[$

2.المستقيم (D_2) يقطع (ζ) في نقطة وحيدة فاصلتها 0

مجموع نقط المنحنى (ζ) التي تراتيبها اكبر او تساوي 0 هي

مجموعة نقط.المنحنى (ζ) التي تقع على المستقيم (D_2) او فوقه

فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $x^3>0$ أي $x\in]0,+\infty[$

3. المستقيم (D_3) يقطع (ζ) في نقطة وحيدة فاصلتها -3 مجموع نقط المنحنى (ζ) التي تراتيبها اصغراو تساوي -3 هي مجموعة نقط.المنحنى (ζ) التي تقع على المستقيم (D_2) او تحته فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $x^3 \le -3$ أي $x \in]-\infty,-3]$

9

f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3$ ؛ $g(x)=x^3+1$.

$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنيان الممثلان للدالتين f و g على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الوحدة : $\|\vec{i}\|=2$ ؛ $\|\vec{j}\|=1$

1) باستعمال إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ؛ حدد إتجاه تغير الدالة g .

— انجز جدول تغيرات الدالة g .

2) أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم السابق.

3) لتكن $M(x;x^3)$ نقطة كيفية من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و $M'(x;x^3+1)$ نقطة كيفية من المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ ذات نفس الفاصلة x .

— أثبت أن $\overrightarrow{MM'}=\vec{j}$.

— بأي تحويل نقطي يُحوَّل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ إلى المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ ؟

— أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في المعلم السابق.

العمليات على الدوال

المؤسســــــــة: ثانوية رقان الجديدة
السنة الدراسية:
التاريــــــــخ:
توقيت الحصة :

المستــــــوى:الثانية تسيير و أقتصاد
ميدان التعلم:التحليل
الوحدة التعلمية:4 الدوال المرجعية
موضوع الحصة : مجموع وجداء ومركب دالتين

المكتسبات القبلية : الدراسة والتمثيل البياني للدوال المرجعية
مؤشرات الكفاءات: تعريف مجموع جداء دالتين

الأنشطة المقترحة وتطبيقاتها	الانجاز سير الدرس	التعليماتوالتوجيهات

الأنشطة المقترحة وتطبيقاتها

نشاط 02 ص 67

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي

.1 $f(x)=2(x-1)^2$ و $g(x)=4x+3$

احسب كل عبارة من العبارات التالية:

$f(x)+g(x)$

$-g(x)$

$f(x)-g(x)$

$1/2\,g(x)$

$1/g(x)$

$f(x)+/g(x)$

.2 عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية:

$h_1: x \mapsto f(x)+g(x)$

$h_2: x \mapsto -g(x)$

$h_3: x \mapsto f(x)-g(x)$

$h_4: x \mapsto 1/2\,g(x)$

$h_5: x \mapsto 1/g(x)$

$h_6: x \mapsto f(x)+/g(x)$

تمرين منزلي 12 ص 102

الانجاز سير الدرس

2/العمليات على الدوال

f و g دالتان معرفتان على نفس المجال I

1.1.2 مجموع دالتين

تعريف:

نسمي مجموع الدالتين f و g الدالة $f+g$ المعرفة على I كما يلي: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

مثال f و g دالتان معرفتان على نفس المجال $]0.\infty+[$ كما يلي: $f(x)=x^3$ و $g(3)=\sqrt{x}$.

مجموع الدالتين f و g الدالة $f+g$ المعرفة على $]0.\infty+[$ كما يلي: $(f+g)(x)=x^3+\sqrt{x}$:

ملاحظة : مجموع f و g هو الدالة $f+g$ المعرفة ب $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ على $D_f \cap D_g$

تطبيق: $f(x)=x+2$ و $f(3)=x^2+2x$. عرف الدالة $f+g$

إتجاه التغير

مبرهنة:

اذا كان كل من الدالتين f و g متزايدتين على مجال I فان الدالة $f+g$ متزايدة تماما على I

اذا كان كل من الدالتين f و g متناقصة على مجال I فان الدالة $f+g$ متناقصة تماما على

البرهان: f و g دالتان معرفتان على نفس المجال I .

نفرض ان كلا من f و g متزايدتين تماما على مجال I

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من I حيث. $x_1<x_2$ اذن: $f(x_1)<f(x_2)$ و $g(x_1)<g(x_2)$

لان الدالتين f و g متزايدتين تماما على مجال I ينتج ان: $f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$

ومنه $(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$

اذن: من اجل كل عددان حقيقيان x_1 و x_2 اذاكان $x_1<x_2$ فان $(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$

وبالتالي الدالة $f+g$ متزايدة تماماعلى I. بنفس الطريقة نبرهن على التناقص

التمثيل البياني للدالة $f+g$

ملاحظة : لانوجد قاعدة تخص دالتين مختلفتين في اتجاه التغير

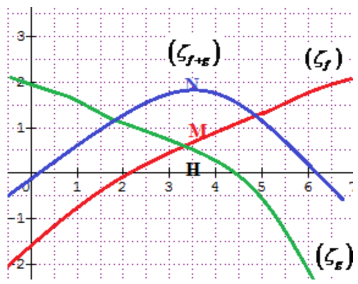
: نرسم في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{I},\vec{J})$

المنحنيات (ζ_f) و (ζ_g) و (ζ_{f+g}) الممثل للدوال f و g و $f+g$ عل الترتيب

x عدد حقيقي نعتبر النقط $H.M.N$ ذات الفاصلة x التي تنتمي الى محور الفواصل

والمنحنيات (ζ_f) و (ζ_g) على الترتيب ننشئ النقطة S المعرفة ب: $\overrightarrow{HS}=\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HN}$

فاصلة النقطة S هي x وترتيبها هو $y_s=y_M+y_N$ نعلم ان $y_M=f(x)$ لان M تنتمي



لمنحنا(ζ_f) $y_N=g(x)$ لان N تنتمي الى (ζ_g)

اذن $y_s=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ ينتج ان S

هي نقطة من (ζ_{f+g}) فاصلتها x

يتكرار هده العملية من اجل قيم اخرى x ننشئ المنحنى

(ζ_{f+g}) نقطة فنقطة

التعليماتوالتوجيهات

تعريف مجموع،جداء، حاصل قسمة ومركب دالتين عدديتين.

بالنسبة إلى مركب دالتين، نكتفي بتناول أمثلة بسيطة.

2.1.2 فرق دالتين

تعريف:

نسمي فرق الدالتين f و g الدالة $f-g$ المعرفة على I كما يلي: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$:

مثال f و g دالتان معرفتان على نفس المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=x^3+2x$ و $f(3)=-x^3+4$.

فرق الدالتين f و g الدالة $f-g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $(f-g)(x)=2x+4$:

إتجاه التغير

ملاحظة: الدالة $x\mapsto -g(x)$: تسمى معاكس الدالة g على I

ملاحظة: الدالتان $-g$ و g :لهما اتجاهان تغير متعاكسان

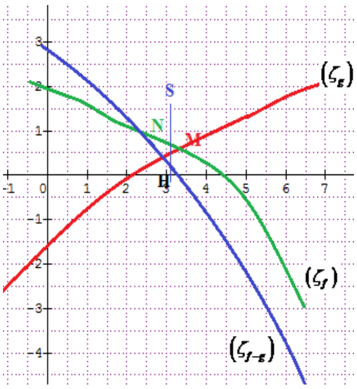
أي اذا كانت g متزايدة على I فان $-g$ متناقصة على I

اذا كانت g متناقصة على I فان $-g$ متزايدة على I

التمثيل البياني للدالة $f-g$

نرسم في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{I},\vec{J})$

المنحنيات (ζ_f) و (ζ_g) و (ζ_{f-g}) الممثل للدوال f و g و $f-g$ عل الترتيب



x عدد حقيقي نعتبر النقط H .M .N ذات الفاصلة x التي تنتمي الى محور الفواصل

والمنحنيات (ζ_f) و (ζ_g) على الترتيب ننشئ النقطة S

المعرفة ب: $\overrightarrow{HS}=\overrightarrow{HM}-\overrightarrow{HN}$

فاصلة النقطة S هي x وترتيبها هو $y_s=y_M-y_N$

نعلم ان $y_M=f(x)$ لان M تنتمي (ζ_f) لمنحناها

$y_N=g(x)$ لان N تنتمي الى (ζ_g)

اذن $y_s=f(x)-g(x)=(f-g)(x)$ ينتج ان S هي نقطة من (ζ_{f-g}) فاصلتها x

بتكرار هده العملية من اجل قيم اخرى x ننشئ المنحنى (ζ_{f-g}) نقطة فنقطة

ملاحظة: المنحنيان (ζ_g) و (ζ_{-g}) :متناظران بالنسبة لمحور الفواصل

ملاحظة: نعلم ان $f-g=f+(-g)$ اذن لتمثيل الانشاء (ζ_{f-g}) يمكن انشاء (ζ_f) و (ζ_{-g}) بتطبيق الطريقة السابقة المتعلقة بالدالة مجموع

تطبيق 1: $f(x)=x+2$ ، $g(x)=x^4+2x$.

* عرف كل دالة مما يلي: $f+g$ ؛ $f+2g$ ، $-f$ ؛ $f\times g$

تطبيق 2: تذكر التمثيل البياني للدالة $x\mapsto x^2$ (مربع) ثم استنتج التمثيل البياني لكل

من: $f:x\mapsto x^2+3$ ، $g:x\mapsto -\frac{1}{2}x^2$.

3.1.2 جداء دالتين

تعريف:
نسمي جداء الدالتين f و g الدالة $f\times g$ المعرفة على I كما يلي:
$(f.g)(x)=f(x).g(x)$:

مثال f و g دالتان معرفتان على نفس المجال $]0.+\infty[$ كما يلي:
$f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt{x}$.
جداء الدالتين f و g الدالة $f+g$ المعرفة على $]0.+\infty[$ كما يلي: $(f.g)(x)=x^3.\sqrt{x}$:

إتجاه التغير

ملاحظة: لا توجد قاعدة تخص اتجاه تغير الدالة $f\times g$.
في المثال التالي كل من الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0.+\infty[$ كما يلي :
$f(x)=x^2$ و $g(x)=-1/x$ متزايدة تماما على $]0.+\infty[$ بينما $f.g$ النعرفة على $]0.+\infty[$
كما يلي: $(f.g)(x)=-x$ متناقصة تماما على $]0.+\infty[$.
وفي المثال التالي: كل من الدالتين u و v المعرفتين على المجال $]0.+\infty[$ كما يلي :
$u(x)=x^2$ و $v(x)=x$ متزايدة تماما على $]0.+\infty[$ بينما $u.v$ النعرفة على $]0.+\infty[$ كما يلي: $(f.g)(x)=-x$ متزايدة تماما على $]0.+\infty[$.

4.1.2 جداء دالة بعدد حقيقي

تعريف:
نسمي جداء الدالتين f بالعدد الحقيقي k الدالة $k.f$ المعرفة على I كما يلي: $(kf)(x)=k.f(x)$:

مثال f دالة معرفة على نفس المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=3x^2-x$ و الدالة g معرفة على نفس المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-3(3x^2-x)$
هي جداء الدالة f بالعدد -3

إتجاه التغير

اذا كان $k>0$ فان للدالتين f و $k.f$ نفس اتجاه التغير
اذا كان $k<0$ فان للدالتين f و $k.f$ اتجاهي تغير متعاكسين

البرهان: نفرض ان الدالة f متزايدة تماما على مجال I و $k>0$
x_1 و x_2 عددان حقيقيان من I حيث. $x_1<x_2$ اذن: $f(x_1)<f(x_2)$
لان الدالة f متزايدة تماما على مجال I ينتج ان: $k.f(x_1)<k.f(x_2)$ ومن $(k.f)(x_1)<(k.f)(x_2)$
اذن: من اجل كل عددان حقيقيان x_1 و x_2 اذاكان $x_1<x_2$ فان $(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$
وبالتالي الدالة $k.f$ متزايدة تماما على I. بنفس الطريقة نبرهن على انه اذا كانت f متناقصة و $k>0$ تصبح $k.f$ متزايدة ونفس الطريقة لما $k<0$

مثال f و g دالتان معرفتان على نفس المجال $]0.+\infty[$ كما يلي:
$f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt{x}$.
جداء الدالتين f و g بالعدد الحقيقي -3 هو الدالتين المعرفتين على $]0.+\infty[$ كما يلي:
$(-3.f)(x)=-3x^3$: $(-3.g)(x)=-3\sqrt{x}$ حدد اتجاه تغيرهما على $]0.+\infty[$

5.1.2 حاصل قسمة دالتين –(نسبة دالتين)

تعريف:

نسمي نسبة الدالتين f و g الدالة f/g المعرفة على I باستثناء الاعداد الحقيقية x من I حيث $g(x)\neq 0$ كما يلي: $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$:

حالة خاصة مقلوب الدالة g المعرفة على I هي الدالة $1/g$ المعرفة على I باستثناء الاعداد الحقيقية x من I حيث $g(x)=0$. كما يلي : $(1/g)(x)=1/g(x)$

ملا حظة : يمكن اعتبار f/g كجداء الدالتين $1/g$ و f

مثال f و g دالتان معرفتان على نفس المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x)=x+1$ و $f(x)=x^2-1$. حاصل قسمة الدالتين f و g هي الدالة f/g المعرفة على $]-\infty.-1[\cup]-1.+\infty[$ كما يلي $\left(f/g\right)(x)=\left(x^2-1\right)/(x+1)$

مثال2: g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=3x-6$ الدالة $1/g$ هي الدالة المعرفة على $]-\infty.2[\cup]2.+\infty[$ ب $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{3x-6}$

تمرين منزلي 15 ص 102

6.1.2 مركب دالتين

نشاط تمهيدي

مثال تمهيدي: f هي الدالة التي ترفق بكل طول (بالأمتار)، المساحة (بالأمتار المربعة) لقطعة أرضية مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها. من أجل $x>0$ ، $f(x)=2x^2$.

g هي الدالة التي ترفق بكل مساحة معطاة (بالأمتار المربعة) ثمن القطعة (بالدنانير) حيث ثمن المتر المربع هو 10 000 دينار من أجل $\mathcal{A}>0$ ، $g(\mathcal{A})=10\,000\,\mathcal{A}$.

يمكن التعبير مباشرة عن ثمن القطعة الأرضية ، بدلالة عرضها كما يلي:

$$x\xmapsto{f}2x^2=\mathcal{A}\xmapsto{g}10\,000\,\mathcal{A}=20\,000\,x^2 .$$

الدالة $x\longmapsto 20\,000\,x^2$ ، المحصل عليها بتطبيق الدالة f ثم الدالة g تسمى الدالة المركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب.

تعريف:

نسمي الدالة المركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب الدالة $g\circ f$ المعرفة على I كما يلي: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$:

ملاحظات خاصة

1. الرمز $g\circ f$ يقرا g دائرة f
2. الكتابة $(g\circ f)(x)$ تقرا g دائرة f ل x
3. الكتابة $g(f(x))$ تقرا g ل f ل x

ملا حظة : عموما $g\circ f\neq f\circ g$

مثال عين $f\circ g$ و $g\circ f$ في كل حالة من الحالات التالية:

1 $f(x)=2x$ و $g(x)=-3x$. **2** $f(x)=x-3$ و $g(x)=3x+2$ **3** $f(x)=x^2$ و $g(x)=2-3x$

4 $f(x)=-1/(x+1)$ و $g(x)=2x$

2.2 تعيين الدالة المركبة من دالتين

طريقة

f و g دالتان معرفتان على نفس المجموعة I حيث I جزء من $\mathbb{R}$

– لتعيين الدالة المركبة $g\circ f$ من f و g بهذا الترتيب نحسب $g\left(f\left(x\right)\right)$

– لحساب $g\left(f\left(x\right)\right)$ نضع $f\left(x\right)=y$ ونحسب $g\left(y\right)$ ثم نعوض y بالعدد $f\left(x\right)$

تكون الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب هي الدالة المعرفة على I ب

$g\circ f : x \mapsto g\left(f\left(x\right)\right)$

تمرين: عين $f\circ g$ و $g\circ f$ في كل حالة من الحالات التالية:

1 $f(x)=2x$ وَ $g(x)=-3x^2+3x$.

الحل 1: تعيين $f\circ g$ أي الدالة المركبة من g و f بهذا الترتيب

ومنه $f(x)=2x$ ونضع $y=-3x^2+3x$

حساب $f\left(y\right)=2y$ ومنه $f\left(y\right)=2\left(-3x^2+3x\right)$ اذن $\begin{cases}(f\circ g)(x)=2\left(-3x^2+3x\right)\\ \quad =f\left[g\left(x\right)\right]\end{cases}$

2: تعيين $g\circ f$ أي الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب

ومنه $y=2x$ ونضع $g(x)=-3x^2+3x$

حساب $g\left(y\right)=-3y^2+3y$ ومنه $g\left(y\right)=-3\left(2x\right)^2+3\left(2x\right)$ اذن

$$\begin{cases}(g\circ f)(x)=-12x^2+6x\\ \quad =g\left[f\left(x\right)\right]\end{cases}$$

تمرين منزلي : 13 ص 102

3.2 تفكيك دالــــــــــــــة

طريقة

لتفكيك دالة نحدد الدوال المرجعية التي تتركب منها هذه الدالة (الدوال التآلفية , الدالة : مربع .مقلوب . جذر تربيعي .) ثم نركب هذه الدوال باستعمال العمليات المناسبة

ملاحظة: نعتبر هذا التفكيك بالتمثيل التالي:

$$\underbrace{x \overset{u}{\longmapsto} u\left(x\right) \overset{g}{\longmapsto}}_{f} f \quad g\left[u\left(x\right)\right]$$

يجب التحقق من اذا كان x عنصرا من مجموعة تعريف u فان $u\left(x\right)$ عنصرا من مجموعة تعريف g

مثال:

f و g دالتين معرفتين كما يلي: $f(x)=x^2+1$ و $g\left(x\right)=1/_{x}-2$

1) أكتب كلا من f و g على شكل دالتين مرجعيتين يطلب تحديدهما

2) عين مجموعة تعريف $g\circ f$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)$

3) عين مجموعة تعريف $f\circ g$ ثم أحسب $(f\circ g)(x)$

الحل: **1)** لدينا:

$$\underbrace{x \xrightarrow{u_1} x^2 \xrightarrow{v_1} x^2+1}_{f}$$

$$\underbrace{x \xrightarrow{u_2} x-2 \xrightarrow{v_2} \frac{1}{x-2}}_{g}$$

اذن: $u_1(x)=x^2$ و $v_1(x)=x+1$

منه: $f=v_1\circ u_1$

اذن: $u_2(x)=x-2$ و $v_2(x)=\frac{1}{x}$

منه: $g=v_2\circ u_2$

و لدينا: **2)** $g\circ f$ معرفة أي إذا كان: $x\in D_f$ فان: $f(x)\in D_g$

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

$f(x)\in D_g$ أي : $f(x)\neq 2$ منه: $x^2+1\neq 2$

منه: $x^2\neq 1$ إذن: $x\neq 1$ و $x\neq -1$ إذن: $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

وبالتالي:

$$D_{(g\circ f)}=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{-1;1\})$$

$$D_{(g\circ f)}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{f(x)-2}=\frac{1}{x^2+1-2}=\frac{1}{x^2-1}$$

3) $f\circ g$ أي اذا كان $x\in D_g$ فان: $g(x)\in D_f$

لان من اجل كل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ فان: $\frac{1}{x-2}\in\mathbb{R}$

وبالتالي: $D_{(f\circ g)}=\mathbb{R}-\{2\}$ من أجل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ فان:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left[(g(x))^2\right]+1=\frac{1}{(x-2)^2}+1$$

$$=\frac{1+(x-2)^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^2}$$

تمرين منزلي **17 و 18 ص 103**

4.2 دراسة اشارة دالة

طريقة

f دالة معرفة على المجموعة I حيث I جزء من $\mathbb{R}$

– لدراسة اشارة الدالة f على المجموعة I ندرس اشارة $f(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من I

تمرين: ادرس اشارة كلا من الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=2x-4$ و $g(x)=-3x^2+3x$.

الحل : دراسة اشارة دالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ يعني تعيين اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

اولا : لدينا $f(x)=0$ يعني ان $2x-4=0$ ومنه $x=2$ وبالتالي

$f(x)>0$ يعني ان $x\in]2,+\infty[$

$f(x)<0$ يعني ان $x\in]-\infty,2[$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

ونلخص ذلك في جدول يسمى جدول الاشارة ونقول ان الدالة f موجبة تماما على $]2,+\infty[$ وسالبة تماما على $]-\infty,2[$

2: دراسة اشارة دالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ يعني تعيين اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

اولا : لدينا $g(x)=0$ يعني ان $-3x^2+3x=0$ ومنه $x=0,x=1$ وبالتالي

$g(x)>0$ يعني ان $x\in]0,1[$

$g(x)<0$ يعني ان $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

x	$-\infty$	**0**	**1**	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+ 0	-

ونلخص ذلك في جدول يسمى جدول الاشارة ونقول ان الدالة g موجبة تماما على $]0,1[$ وسالبة تماما على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

تمرين منزلي 11 ص 102

المؤسســــــة: السنة الدراسية: التاريـــــــخ: توقيت الحصة :	المستـــــوى:الثانية تسيير و أقتصاد ميدان التعلم:التحليل الوحدة التعلمية:4 الدوال المرجعية والتحويلات النقطية البسيطة موضوع الحصة : التمثيل البياني لدوال مالوفة

المكتسبات القبلية : الدراسة والتمثيل البياني للدوال المرجعية **مؤشرات الكفاءات :** استنتاج منحنيات بعض الدوال انطلاقا من منحنيات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	انجاز سير الدرس	التعليماتوالتوجيهات

نشاط:

في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/ أنشئ (γ) التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto x^3$.

2/ اعتمادا على (γ) مثل بيانيا كلا من:

$g:x\mapsto x^3+2$

$h:x\mapsto -x^3$

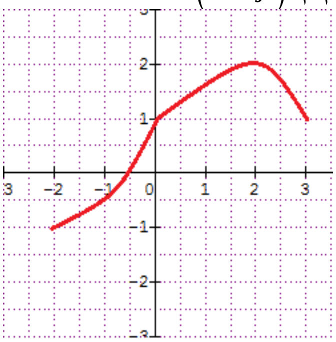
$k:x\mapsto |x^3|$

$l:x\mapsto (-x)^3$

$t:x\mapsto (x-1)^3$

نشاط

f دالة معرفة على المجال $[-2,3]$ و ζ_1 المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,



1: اكمل الجدول التالي معتمدا على القراءة البيانية على الشكل

x	2−	1−	0.5−	0	0.5	1	2
$f(x)$							

2: اعد رسم الشكل السابق

3: ا. اكمل الجدول التالي

x	2−	1−	0.5−	0	0.5	1	2
$f(x)+3$							

ب. علم النقط ذات الاحداثيات $(x,f(x)+3)$ في المعلم السابق ثم ارسم المنحنى ζ_2 الممثل للدالة $x\mapsto f(x)+3$ في نفس المعلم

ج: باي تحويل نقطي يمكن الانتقال من ζ_1 الى ζ_2 ؟

3/المنحنيات والتحويلات النقطية البسيطة

f دالة معرفة على المجال I و ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$ ، k عدد حقيقي

1.3 انشاء المنحنى الممثل للدالة $g;x\mapsto f(x+k)$

خاصية:

المنحنى ζ_{f+k} الممثل للدالة $g;x\mapsto f(x+k)$ هو صورة المنحنى ζ_f الممثل للدالة f بالانسحاب الذي شعاعه $-k\vec{i}$

البرهان:

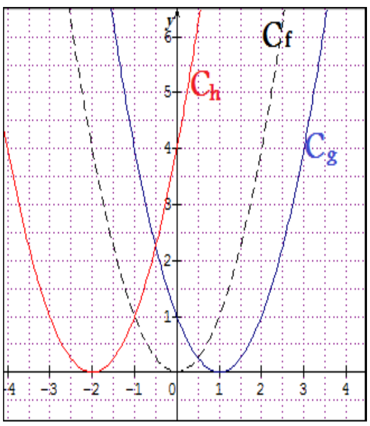
x عنصر من I حيث $g(x)=f(x+k)$ اذن $g(x-k)=f(x)$ النقطة $M(x,y)$ تنتمي الى (C_f) يعني $y=f(x)$ أي $y=g(x-k)$

$y=g(x-k)$ يعني النقطة $M'(x-k,y)$ تنتمي الى (C_f)

يكون احداثيات الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ مركبتاه

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x-k+x\\ y-y\end{pmatrix}$ إذا $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-k\\ 0\end{pmatrix}$ و منه

$\overrightarrow{MM'}=-k\vec{i}$ وبالتالي كل نقطة M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $-k\vec{i}$. و منه المنحنى (C_{f+k}) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-k\vec{i}$.



مثال

نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=(x-1)^2$ و $h(x)=(x+2)^2$

تكون دراسة الدالة "مكعب " مناسبة للتذكير بالمفاهيم الأساسية المتعلقة بالدوال (التعبير) التغيّرات، (التمثيل البياني) المدروسة في السنة الأولى ثانوي.

لدينا $g(x)=f(x-1)$ ومنه (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}$.

لدينا $h(x)=f(x+2)$ ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$ تمثيلاتها البيانية هي

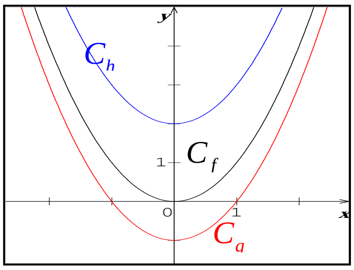
2.3 انشاء المنحنى الممثل للدالة $g;x\mapsto f(x)+k$

خاصية:

المنحنى ζ_{f+k} الممثل للدالة $g;x\mapsto f(x+k)$ هو صورة المنحنى ζ_f الممثل للدالة f بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$

برهان: نعتبر النقطتين $M(x,f(x))$ من (C_f) و $M'(x,(f+k)(x))$ من (C_{f+k}).

بما أن: $(f+k)(x)=f(x)+k$ فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ مركبتاه $(0,k)$ و $\overrightarrow{MM'}=k\vec{j}$. إذن M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$. و منه المنحنى (C_{f+k}) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$



مثال: نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$h(x)=x^2+2$ و $g(x)=x^2-1$ ، $f(x)=x^2$

لدينا $g=f-1$ ومنه (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$.

لدينا $h=f+2$ ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$

ملاحظة عموما الدالة f هي دالة مرجعية :

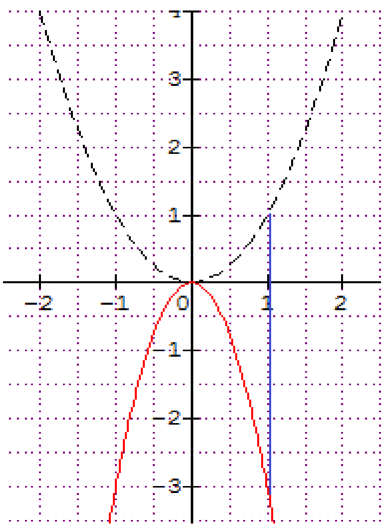
3.3 انشاء المنحنى الممثل للدالة $g;x\mapsto k.f(x)$

خاصية:

المنحنى ζ_{kf} الممثل للدالة $g;x\mapsto k.f(x)$ نتحصل عليه بضرب ترتيب كل نقطة في العدد k من منحنى ζ_f

برهان: إذا كانت $M(x,f(x))$ نقطة من (C_f) فإن $M'(x,k.f(x))$ نقطة من $(C_{\lambda f})$ لأن $(k.f)(x)=k.f(x)$. أي ان $y`=k.y$ وبالتالي نتحصل على M' بضرب ترتيب M في العدد k و هكذا يتم الحصول على المنحنى ζ_{kf} الممثل للدالة $k.f$

ملاحظة: اذا كان $k=-1$ فان المننى ζ_{kf} هو نظير ζ_f بالنسبة الى محور الفواصل



مثال f دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=x^2$ و ζ_f, المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

و الدالة g معرفة على نفس المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x)=-3(x^2)$, و ζ_g لمنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

لتكن $M(x,0)$ نقطة من محور الفواصل و $M_1(x,x^2)$ نقطة من ζ_f و $M_2(x,-3x^2)$ نقطة من ζ_g لدينا $\overrightarrow{MM_2}=-3\overrightarrow{MM_1}$ اذن M_2 منتصف $[MM_1]$

4.3 انشاء المنحنى الممثل للدالة $g;x \mapsto -f(x)$

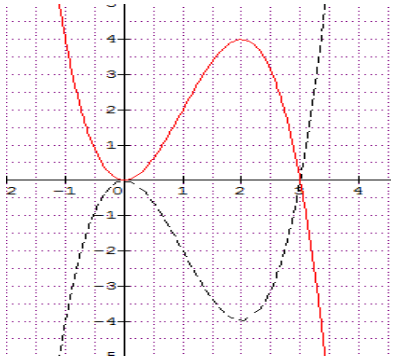
f دالة معرفة على المجال I و ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$ ، نعتبر الدالة g المعرفة على المجال I كما يلي $g(x)=-f(x)$ و ζ_g المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$

خاصية:

المنحنى ζ_g هو نظير المنحنى ζ_f بالنسبة الى محور الفواصل

البرهان:

x عنصر من I حيث $g(x)=-f(x)$ اذن النقطة $M(x,y)$ تنتمي الى (C_f) و النقطة $M'(x,-y)$ تنتمي الى (C_f) متناظرتان بالنسبة الى محور الفواصل اذن نظيرة كل نقطة $M'(x,g(x))$ من ζ_g بالنسبة الى محور الفواصل تنتمي الى ζ_f فالمنحنيان متناظران لمحور x



مثال

نعتبر الدالتين f ، g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$g(x)=-(x^3-3x^2)$ و $f(x)=x^3-3x^2$

لاحظ من خلال راسم المنحنيات ان (C_g) هو نظير (C_f) لمحور الفواصل

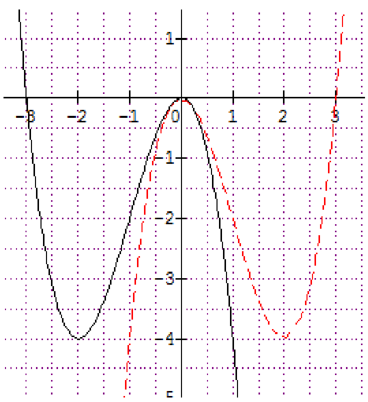
5.3 انشاء المنحنى الممثل للدالة $g;x \mapsto f(-x)$

f دالة معرفة على المجال I و ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$ ، نعتبر الدالة g المعرفة على المجال I كما يلي $g(x)=f(-x)$ و ζ_g المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$

خاصية:

المنحنى ζ_g هو نظير المنحنى ζ_f بالنسبة الى محور التراتيب

البرهان:



x عنصر من I حيث $g(x)=f(-x)$ اذن النقطة $M(x,y)$ تنتمي الى (C_f) و النقطة $M'(-x,y)$ تنتمي الى (C_f) متناظرتان بالنسبة الى محور التراتيب

نعلم ان $g(x)=f(-x)$ اذن $g(-x)=f(x)$

النقطة $M'(-x,g(-x))$ تنتمي الى (C_g).

أي النقطة $M'(-x,f(x))$ تنتمي الى ζ_g.

اذن نظيرة كل نقطة $M(x,f(x))$ من (C_g) بالنسبة الى محور التراتيب هي النقطة $M'(-x,f(x))$ من (C_g) ونظيرة كل نقطة $M'(x,f(-x))$ من (C_g) بالنسبة الى محور التراتيب هي النقطة $M(x,f(x))$ من (C_f)

نستنتج ان المنحنى (C_g) الممثل للدالة $x \mapsto f(-x)$ هو نظير المنحنى (C_f) المثل للدالة f

مثال

نعتبر الدالتين f ، g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^3-3x^2$ و $g(-x)=-x^3-3x^2$

لاحظ من خلال راسم المنحنيات ان (C_g) هو نظير (C_f) لمحور التراتيب

تمارين منزلية من رقم 19 الى 37 ص 108

6.3 انشاء المنحنى الممثل للدالة $g;x\mapsto|f(x)|$

طريقة

f دالة معرفة على المجموعة I حيث I جزء من $\mathbb{R}$

ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

g دالة معرفة على المجموعة I حيث I جزء من $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=|f(x)|$

ζ_g المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$ السابق ,

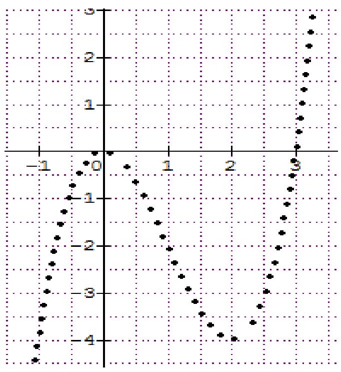
-لرسم المنحنى الممثل للدالة g نعبر عن $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة , ويكون ζ_f و ζ_g منطبقين في المجالات التي يكون فيها $f(x)\geq 0$

-ويكون ζ_g هو نظير ζ_f بالنسبة لمحور الفواصل في المجالات التي يكون فيها $f(x)\leq 0$

ملاحظة : $|f(x)|=f(x)$ اذا كان $f(x)\geq 0$

و $|f(x)|=-f(x)$ اذا كان $f(x)\leq 0$

تمرين: المنحنى التالي هو منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ اعد رسم المنحنى للدالة $|f(x)|=g(x)$

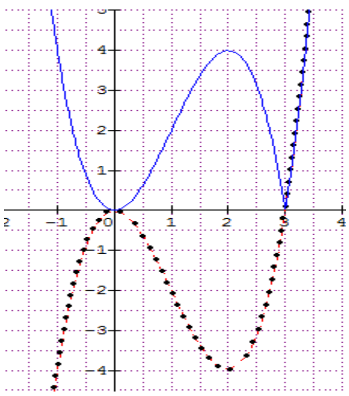


الحل:

$f(x)\geq 0$ على المجال $]3,+\infty[$ اذن المنحنيين ζ_f و ζ_g منطبقين

$f(x)\leq 0$ على المجال $]-\infty,3[$ نجد ζ_g هو نظير ζ_f بالنسبة لمحور الفواصل

المنحنى الممثل بنقاط هو ζ_f و باللون الازرق هو ل ζ_g



المؤسســــــة:	المستـــــوى:الثانية تسيير و أقتصاد
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية:4 الدوال المرجعية والتحويلات النقطية البسيطة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : عناصر تناظر منحنيات مركز ومحور تناظر

المكتسبات القبلية : الدراسة والتمثيل البياني للدوال المرجعية **مؤشرات الكفاءات** :البرهان على مركز تناظر او محور تناظر

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	انجاز سير الدرس	التعليماتوالتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

بالاعتماد على بعض القيم للمتغير أنشئ التمثيلين البيانيين للدالتين:

$g : x \mapsto x^3 + 2$

$f : x \mapsto (x-2)^2$

1/ أنشئ المستقيم: $(L) : x = 2$، والنقطة: $A(0,2)$. ما ذا تستنتج؟

2/ نضع: $a = 2$، قارن بيانيا ثم حسابيا، بين $f(a+h)$ ، $f(a-h)$.

3/ نضع الآن: $a = 0$، $b = 2$. قارن بيانيا ثم حسابيا، بين $\frac{g(a-h)+g(a+h)}{2}$ ، b .

انجاز سير الدرس

4/عناصر تناظر منحنيات

f دالة معرفة على المجال I و I جزء من $\mathbb{R}$

1.4 شفعية دالة 'الدالة الزوجية'

تعريف:

الدالة f زوجية على I اذا وفقط اذا كان :

من اجل كل عدد حقيقي x من I، $-x$ ينتمي الى I و $f(-x) = f(x)$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي: $f(x) = x^2 - 5$ ، هي دالة زوجية

لان: من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $-x$ ينتمي الى $\mathbb{R}$

و $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$

2.4 شفعية دالة 'الدالة الفردية'

تعريف:

الدالة f فردية على I اذا وفقط اذا كان :

من اجل كل عدد حقيقي x من I، $-x$ ينتمي الى I و $f(-x) = -f(x)$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي: $f(x) = 1/x$ ، هي دالة فردية

لان: من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $-x$ ينتمي الى $\mathbb{R}$

و $f(-x) = 1/-x = -1/x = -f(x)$

ملاحظة : توجد الدوال التي ليست فردية ولا زوجية مثل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x) = 5x - 3$

1.1.4 محور تناظر دالة زوجية

f دالة معرفة على المجال I و I جزء من $\mathbb{R}$

ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

خاصية :

اذا كانت الدالة f زوجية على I : فان ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$, يقبل محور التراتيب كمحور تناظر له

البرهان :

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ زوجية : $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f) فإن $M'(-x, f(-x))$ نقطة من (C_f) بما ان الدالة زوجية فان $f(-x) = f(x)$ وبالتالي النقطتين $M, M`$ لهما نفس الترتيب ومتعاكستان في الفاصلة اذن $M, M`$ متناظرتان لمحور التراتيب

ينتج ان من اجل كل عذد حقيقي x من I، النقطتان $M(x, f(x))$ و $M'(-x, f(-x))$ من

التعليماتوالتوجيهات

نرتكز على التمثيلات البيانية للدوال في معلم متعامد ومتجانس لتبرير النتيجتين:

$f(a-h) = f(a+h)$

و

$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$

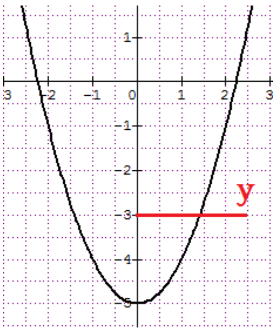
....

برهان على أنّ نقطة هي مركز تناظر المنحنى الممثل لدالة.

البرهان على أنّ مستقيم هو محور تناظر المنحنى الممثل لدالة.

ζ_f متناظرتان بالنسبة الى محور التراتيب.

وبالتالي محور تراتيب المعلم هو محور تناظر المنحنى ζ_f الممثل للدالة f .



مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي: $f(x)=x^2-5$ ، هي دالة زوجية

لان: من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $-x$ ينتمي الى $\mathbb{R}$

و $f(-x)=(-x)^2-5=x^2-5=f(x)$

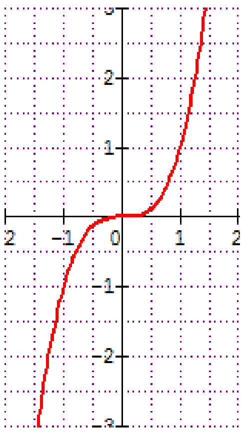
لا حظ تمثيلها البياني متناظر لمحور التراتيب

2.1.4 مركز تناظر دالة فردية

خاصية :

اذا كانت الدالة f فردية على I : فان المنحنى الممثل لها ζ_f في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$, يقبل مبدا المعلم كمركز تناظر له

برهان

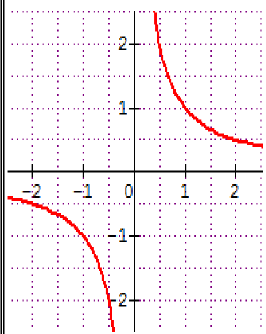


الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ فردية : $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f) فإن $M'(-x, f(-x))$ نقطة من (C_f) بما ان الدالة فردية فان $f(-x)=-f(x)$

وبالتلي النقطتين M, M` لهما نفس الفاصلة ومتعاكستان في الترتيب اذن $M, M$` متناظرتان بالنسبة الى مبدا المعلم.

ينتج ان من اجل كل عدد حقيقي x من I، النقطتان $M(x, f(x))$ و $M'(-x, f(-x))$ من ζ_f متناظرتان بالنسبة الى مبدا المعلم .

وبالتالي مبدا المعلم هو مركز تناظر المنحنى ζ_f الممثل للدالة f .



مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي: $f(x)=1/x$ ، هي دالة فردية

لان: من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $-x$ ينتمي الى $\mathbb{R}$

و $f(-x)=1/-x=-1/x=-f(x)$

لاحظ منحناها البياني

3.4 محور تناظر منحنى

f دالة معرفة على المجال I و I جزء من $\mathbb{R}$

ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

(D) مستقيم معادلته $x=a$ حيث a عدد حقيقي

مبرهنة :

المستقيم (D) ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر للمنحنى (ζ_f) يعني ان من اجل :

من اجل كل عدد حقيقي x من I, حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $f(a+h)=f(a-h)$.

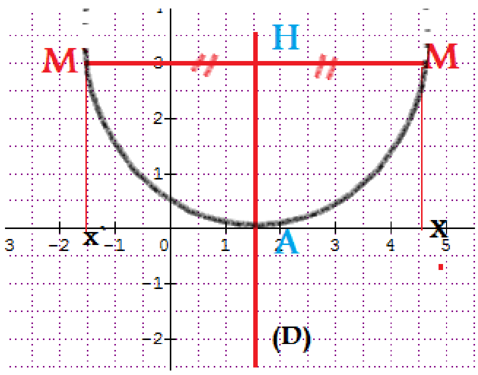
ملاحظة: بعد حساب العدد $f(a+h)$ نحسب العدد $f(a-h)$ بتعويض العدد h بالعدد $-h$ في $f(a+h)$

البرهان : نفرض ان المستقيم (D) ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر للمنحنى لـ: (ζ_f)

-نبرهن ان من اجل كل عدد حقيقي x من I,

حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $f(a+h)=f(a-h)$



من اجل كل نقطة : $M(x,f(x))$ من (C_f)

فإن $M'(x`,y`)$ نظيرتها تنتمي الى (C_f)

وتحقق : $\overrightarrow{MM`}=2\overrightarrow{MH}$ حيث H هي

المسقط العمودي ل M على (D)

احداثيات النقط $M(x,f(x))$,

$M'(x`,f(x`))$, $H(a,f(x))$ تحقق العلاقتين التاليتين

$\frac{x+x`}{2}=a$ و $f(x)=f(x`)$ اي $x`=2a-x$ و $f(x)=f(x`)$

بوضع $x=a+h$ ينتج ان $x`=a-h$ و $f(a+h)=f(a-h)$

اذن من اجل كل عدد حقيقي x من I, حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $f(a+h)=f(a-h)$.

العكس

نفرض ان من اجل كل عدد حقيقي x من I, حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $f(a+h)=f(a-h)$.

بوضع $x=a+h$ و $x`=a-h$ تتحصل على $f(x)=f(a+h)$ و $f(x`)=f(a-h)$

ينتج ان $\frac{x+x`}{2}=a$ و $f(x)=f(x`)$

اذن النقطتان $M(x,f(x))$ و $M'(x`,f(x`))$ من المنحنى (C_f) متناظرتان بالنسبة الى

المستقيم (D) معادله $x=a$ وبالتالي المستقيم (D) هومحور تناظر للمنحنى (C_f)

4.4 مركز تناظر منحنى

f دالة معرفة على المجال I و I جزء من $\mathbb{R}$

ζ_f المنحنى الممثل لها في م م م $\left(o.\vec{i}.\vec{j}\right)$ ،

$A\left(a,b\right)$ نقطة من المستوى.

مبرهنة :

النقطة $A\left(a,b\right)$ مركز تناظر للمنحنى $\left(\zeta_f\right)$ يعني ان من اجل :

من اجل كل عدد حقيقي x من I، حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $\left(f\left(a+h\right)+f\left(a-h\right)\right)/2=b$.

البرهان: لتكن $M\left(x,f(x)\right)$ من $\left(C_f\right)$

فإن $M'\left(x`,y`\right)$ نظيرتها تنتمي الى $\left(C_f\right)$ وتحقق : $\overrightarrow{MM`}=2\overrightarrow{MH}$

وبالتالي $\begin{cases}x`-x=2\left(a-x\right)\\ y`-y=2\left(b-y\right)\end{cases}$ اي $\begin{cases}x`+x=2a\\ y`+y=2b\end{cases}$

اذا كان $x=a+h$ فان $x`=a-h$ و $y`+y=2b$

بما ان $y=f\left(x\right)$ و $y`=f\left(x`\right)$ فان $f\left(x\right)+f\left(x`\right)=2b$

اي ان $b=\left(f\left(a+h\right)+f\left(a-h\right)\right)/2$

ينتج انه اذا كانت $A\left(a,b\right)$ مركز تناظر للمنحنى $\left(\zeta_f\right)$

فن من اجل كل عدد حقيقي x من I، حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $\left(f\left(a+h\right)+f\left(a-h\right)\right)/2=b$.

العكس

نفرض ان من اجل كل عدد حقيقي x من I، حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $\left(f\left(a+h\right)+f\left(a-h\right)\right)/2=b$.

بوضع $x=a+h$ و $x`=a-h$ تتحصل على $f\left(x\right)=f\left(a+h\right)$ و $f\left(x`\right)=f\left(a-h\right)$

يكون : $x+x`=2a$ و $f\left(x\right)+f\left(x`\right)=2b$

اذن النقطتان $M\left(x,f(x)\right)$ و $M'\left(x`,f\left(x`\right)\right)$ من المنحنى $\left(C_f\right)$ متناظرتان بالنسبة الى

النقطة $A\left(a,b\right)$ وبالتالي النقطة $A\left(a,b\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$

5.4 اثبات ان مستقيم هو مركز تناظر منحنى

طريقة

f دالة معرفة على المجموعة I حيث I جزء من $\mathbb{R}$

(ζ_f) المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

(D) مستقيم معادلته $x=a$ حيث a عدد حقيقي

لأثبات ان المستقيم (D) ذو المعادلة $x=a$ هو محور تناظر للمنحنى (ζ_f) الممثل للدالة f

يكفي اثبات ان :

من اجل كل عدد حقيقي x من I, حيث $x=a+h$ العدد $a-h$ ينتمي الى I

و $f(a+h)=f(a-h)$.

تمرين : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=2x^2+5x-1$

و (ζ_f) المنحنى الممثل لها في م م م $(o.\vec{i}.\vec{j})$,

اثبت ان المستقيم ذو المعادلة $x=-5/4$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x=-5/4+h$ العدد $-5/4-h$ ينتمي الى $\mathbb{R}$

-نقارن بين $f(-5/4+h)$ و $f(-5/4-h)$

لدينا $f(-5/4+h)=2(-5/4+h)^2+5(-5/4+h)-1=2h^2-33/8$

و $f(-5/4-h)=2(-5/4-h)^2+5(-5/4-h)-1=2h^2-33/8$

ومنه $f(-5/4+h)=f(-5/4-h)$

اذن من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x=-5/4+h$ العدد $-5/4-h$ ينتمي الى $\mathbb{R}$

$f(-5/4+h)=f(-5/4-h)$ نستنتج ان المستقيم ذو المعادلة $x=-5/4$ محور تناظر ل (ζ_f)