تحضير مذكرة تعليمية

السنة الدراسية	Yousfi Math Yousfisifou804@yahoo.fr	إعداد الاستاذ
2014/2013		يوسفي عبد الرحمن

المحورالسابع : النهايات

المستوى : الثانية رياضيات

الموضوع : النهايات limites

الكفاءة المستهدفة

♥ دراسة الدالة كثير حدود والتناظرية (مخطط دراسة دالة)

المكتسبات القبلية

♥ دراسة الدوال المرجعية .الاشتقاقية.النهايات

مخطط الدرس	التوقيت
نشاط :.. 1: نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي 2: نهاية غير منتهية لدالة عندعدد حقيقي 3:نهاية غير منتهية لدالة عند ما لانهاية 4:نهاية منتهية عند ما لا نهاية 5: المستقيم المقارب المائل 6:نهاية دالة مرجعية 7: المستقيمات المقاربة 8: عمليات على النهايات	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسسة:	المستوى: الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: التحليل
التاريخ:	الوحدة التعلمية: النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة دالة

المكتسبات القبلية : حساب نهاية دالة . الدالة المشتقة .التمثيل البياني ....الخ

الأنشطة المقترحة	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط

لتكن f دالة للمتغير الحقيقي x بحيث $f(x)=-x^3+3x$ و (c_f) تمثيلها البياني.

1_ بين أن f دالة فردية .

2_ أدرس تغيرات الدالة f .

3_ أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (c_f) عند النقطة O .

4_ أدرس وضعية المنحنى (c_f) بالنسبة إلى (Δ)

5_ أرسم (Δ) و (c_f) في نفس المعلم .

حل نشاط

1_ مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، x- من $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$

$f(-x)=-(-x)^3+3(-x)=x^3-3x=-(-x^3+3x)=-f(x)$ ومنه f دالة فردية

2 _ دراسة التغيرات

* مجموعة تعريف f : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

*حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right)=+\infty$

*إتجاه تغير الدالة f : f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالة الشتقة $f'(x)=-3x^2+3$ و

إشارة $f'(x)$ حسب الجدول :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

وعليه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$; $[1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;1]$

3- كتابة معادلة المماس (Δ) لدينا

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(\Delta): y=3x$

4- دراسة وضعية (c_f) بالنسبة لـ (Δ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-y=-x^3+3x-3x$ ومنه

إشارة $f(x)-y$ حسب الجدول التالي ومنه نجد المنحنى (c_f) والمستقيم (Δ) يتقاطعان في النقطة $O(0;0)$

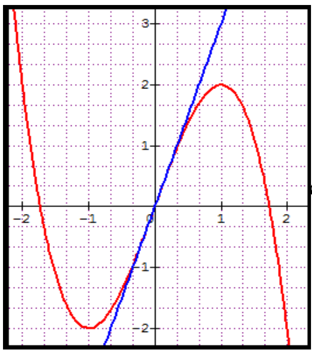
X	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		+	0	-	

*في المجال $]-\infty;0[$: (c_f) فوق (Δ) *في المجال $]0;+\infty[$: (c_f) تحت

ملاحظة المماس (Δ) للمنحنى (c_f) عند النقطة $O(0;0)$ يخترق المنحنى

(c_f) نسمي هذه النقطة بنقطة إنعطاف .

التمثيل البياني



1./دراسة دالة

1.1 مخطط دراسة دالة

تمهيد: بعد ما تطرقنا إلى حساب المشتقات و تطبيقاتها في استنتاج اتجاه تغير دالة و من تم القيم الحدية و بعد التطرق إلى حساب النهايات و دراسة السلوك التقاربي لمنحنى دالة أضحى من الممكن جدا دراسة دالة و تمثيلها بيانيا. نقترح فيما يلي مخططا لدراسة دالة علما أنه يمكن إجراء **تغيير جزئي عل الترتيب المقترح** كما يمكن إلغاء بعض المراحل و ذلك حسب طبيعة الدالة المدروسة.

1. مجموعة التعريف
   - تحديد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
   - دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة) قصد تقليص مجموعة الدراسة و تحديد مراكز أو محاور تناظر المنحني الممثل للدالة.
2. حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة الأطراف المفتوحة.
3. دراسة اتجاه تغير الدالة
   - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
   - دراسة إشارة المشتقة و استنتاج اتجاه تغير الدالة.
   - تحديد القيم الحدية في حالة وجودها.
4. تشكيل جدول تغيرات الدالة
5. تحديد المستقيمات المقاربة
6. التمثيل البياني للدالة
   - رسم المستقيمات المقاربة.
   - تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب إحداثياتها و نذكر بصفة خاصة النقط الحدية و نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات.
   - رسم المماسات عند القيم الحدية و أخرى مطلوبة في النص.استغلال عناصر تناظر المنحني إن وجدت.

ملاحظة:
يظهر بصورةكبيرة من مخطط دراسة الدوال ان الهدف هو رسم المنحنى والأهم أكثر في الواقع هو الحصول على منحنى دقيق .وعليه نلجأ في البحث عن بعض العناصر التى تساعدا للحصول عل هذه

2.1 نقط تقاطع المنحنى مع محوري المعلم

1.1 التقاطع مع محور التراتيب:

المنحنى C_f يقطع محور التراتيب في نقطة A ذات الإحداثيات $(0;f(0))$ اذا وفقط اذا كان العدد0 ينتمي الى مجموعة تعريف الدالة

مثال منحنى الدالة $1/x$ لا يقطع محور التراتيب لأن $0 \notin D_f$

منحنى الدالة $1/(x-1)$ يقطع محور التراتيب عند النقطة $A(0;-1)$

1.1 التقاطع مع محور الفواصل:

المنحنى C_f يقطع محور الفواصل في نقطة A ذات الإحداثيات $(a;0)$ اذا وفقط اذا كان العدد a حلا للمعادلة $f(x)=0$ في مجموعة تعريف الدالة اذ يمكن للمنحنى ان قطع محور الفواصل في عدة نقاط

مثال $f(x)=x^2-2x/x$ أي $f(x)=0$ يعني $x^2-2x/x=0$ ومنه $x=0$ او $x=2$

بما ان ال**0** مرفوض فان المنحنى يقطع المحور في $(2;0)$

3.1 نقطة الانعطاف

الدالة f المعرفة على مجال مفتوح يشمل العدد x_0 وقابلة للاشتقاق عند هاته النقطة

المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $A(x_0;f(x_0))$

المنحنى (C_f) يخترق مماسه عند النقطة A. تسمى هذه النقطة، نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

وللحصول عليها ندرس الوضعية

مثال $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3$ اذن $f(0)=1$ و $f'(0)=-3$ ومنه معادلة المماس عند النقطة **0** هي:

$y=-3x+1$

ندرس الوضعية المماس بالنسبة للمنحنى:

$f(x)-y=x^3-3x+1-(-3x+1)=x^3$

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y=x^3$	$-$	$+$

من خلال الجدول المماس يخرق المنحنى في $A(0;1)$. A تسمى هذه النقطة. نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

تطبيق: لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=1+1/x$ على $[-1;0[\cup]0;1]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين مجموعة تعريف f. أدرس النهايات عند الأطراف المفتوحة. ماذا تستنتج بالسبة للمنحى.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f. أرسم المنحنى (C_f).

الحل:

1. الدالة معرفة على يسار ال **0** إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} 1+1/x=-\infty$

الدالة معرفة على يمين ال **0** إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1+1/x=+\infty$

النتيجة: الدالة f لها مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=0$

2. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$. لتكن f' دالتها المشتقة على $[-1;0[\cup]0;1]$.

$f'(x)=-1/x^2$ اذن الدالة دوما سالبة.

x	-1	0 $\qquad$ $+1$
$f'(x)$	$-$	$-$

جدول التغيرات يعطى كما يلي

x	-1	0 $\qquad$ $+1$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)=1+1/x$	$f(-1)=0$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $f(+1)=2$

رسم المنحنى :

نبدأ برسم المستقيمات المقاربة ذو المعادلة $x=0$

ثم نعين النقط $(-1;0)$ و $(1;2)$

تطبيق:

لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين مجموعة تعريف f. أدرس شفعيتها و دوريتها. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$ محور تناظر لِـ(C_f). استنتج أنه يكفي دراسة الدالة f على المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. أرسم المنحنى (C_f).

الحل:

1. $\sin x=0$ يكافئ $x=k\pi$ وبالتالي $D_f=\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$
2. دراسة شفعية الدالة:

دالة ال $\sin$ هي دالة فردية وبالتالي $f(-x)=\dfrac{1}{\sin(-x)}=-\dfrac{1}{\sin(x)}=-f(x)$

3. أن الدالة: $x\mapsto\sin x$ دالة دورية 2π دور لها و منه الدالة f دورية و 2π دور لها أي

$$f(x+2\pi)=\frac{1}{\sin(x+2\pi)}=\frac{1}{\sin(x)}=f(x)$$

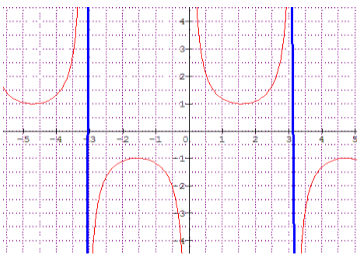
4. المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$ محور تناظر لِـ(C_f) يعني :

نعتبر معلما جديدا $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ و منه دساتير تغيير المعلم هي: $x=X+\dfrac{\pi}{2}$ و $y=Y$

اذا قمنا بمراعات الدالة f في المعلم الجديد نجد انها دالة $\dfrac{1}{\cos x}$ وبما أن هذه الدالة زوجية فهي متناظرة لمحور تراتيبها الذي معادلته $x=\pi/2$ اذن $x=\pi/2$ محور تناظر لِـ(C_f).

الدالة $\dfrac{1}{\cos x}$ عادة ما تدرس على المجال $]0;\pi[$ وبما أنها زوجية يكفي دراستها على نصف المجال أي $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

5. حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ :: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{\sin x}=1/0^{+}=+\infty$
6. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$



حساب المشتقة $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x)\le 0$. إذن f متناقصة تماما على $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\pi/2$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

7. المنحني (C_f).

المؤسســــــة:	المستـــــوى: الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: التحليل
التاريـــــخ:	الوحدة التعلمية: النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة: دراسة دالة

المكتسبات القبلية : حساب نهاية دالة . الدالة المشتقة .التمثيل البياني ....الخ

الأنشطة المقترحة	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

2/دراسة دالة كثير حدود من الدرجة 3

1.2 دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ $f(x)=x^3-x+1$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f
2. بين ان $I(0;1)$ مركز تناظر (C_f) ثم ارسم (C_f)

الحل:

دراسة الدالة:

الدالة كثير حدود فهي معرفة على $]-\infty;+\infty[$

النهايات: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

المشتقة: الدالة كثير حدود معرفة وقابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها ودالتها المشتقة

$f'(x)=3x^2-1$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	

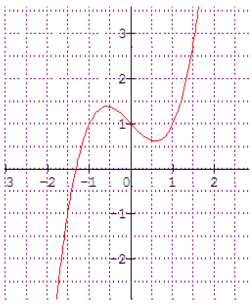
جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2/3\sqrt{3}+1$	$\searrow$	$1-2/3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

مركز تناظر ل (C_f)

ملاحظة :

لاثبات ان $A(x_0;y_0)$ يكفي اثبات ان $f(2x_0-x)+f(x)=2y_0$



ان اي $f(2x_0-x)+f(x)=2y_0$

$f(2(0)-x)=2-f(x)$

$f(-x)-2+f(x)=0$

ومنه $f(-x)-2+f(x)=-x^3+x+1-2+x^3-x+1=0$

الشرط محقق وبالتالي $I(0;1)$ مركز تناظر ل (C_f)

المنحنى (C_f):

2.2 دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3-3x+1$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

☒ بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

☒ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=3(x^2-1)$. استنتج، حسب قيم x، اتجاه تغير f.

☒ شكل جدول تغيرات الدالة f.

☒ أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة دات الفاصلة **0**. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $[-1;+1]$.

☒ بعد حساب $f(-2)$ و $f(2)$ ارسم (Δ) و (C_f) محددا المماسين عند النقطتين $(-1;3)$ و $(1;-1)$.

☒ نسمي Ω النقطة التي إحداثياها $(0;1)$. بين أن معادلة (C_f) نسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ هي: $Y=X^3-3X$ ثم تحقق أن الدالة $g:X\mapsto X^3-3X$ دالة فردية. مادا تستنتج؟

☒ نلاحظ أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط نرمز إلى فواصلها بـ: α، β و γ.

لدينا $f(0)=1$ و $f(1)=-1$ و منه $f(0)\times f(1)<0$. نستنتج أن أحد الحلول و ليكن α يحقق: $0<\alpha<1$. باتباع نفس المنهجية بين أن $0,3<\alpha<0,4$.

مادا تمثل كل من $0,3$ و $0,4$ بالنسبة إلى α؟

نفرض أن β موجب تماما. عين قيمة مقربة إلى **0.1** بالنقصان للعدد β.

<u>تطبيق</u>:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3-3x+1$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

☒
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

☒ $f(x)=x^3-3x+1$ معرفة وقابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها ومنه $f'(x)=3x^2-3$

باستخراج العامل المشترك 3 نجد $f'(x)=3(x^2-1)$

☒ جدول تغيرات الدالة f.

$f'(x)=3(x^2-1)=0$ يعني ان $x=1...or....x=-1$

ومنه جدول التغيرات يعطى

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

☒ معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة دات الفاصلة **0**. لدينا

$f(0)=0^3-30+1=1$ و $f'(0)=3(0^2-1)=-3$

ومنه $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-3x+1$ اذن معادلة (Δ) هي $y=-3x+1$

المستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة دات الفاصلة $A(0;f(0))$

المنحني (C_f) يخترق مماسه عند النقطة A. تسمى هذه النقطة، نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

وللحصول عليها ندرس الوضعية المماس بالنسبة للمنحنى:

☒ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $[-1;+1]$.

$$f(x)-y=x^3-3x+1-(-3x+1)=x^3$$

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f(x)-y=x^3$	$-$	$+$

من خلال الجدول المماس يخرق المنحنى في $A(0;1)$. A تسمى هذه النقطة، نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

☒ $f(-2)=(-2)^3-3(-2)+1=-8+6+1=-1$ و $f(2)=(2)^3-3(2)+1=8-6+1=3$

المماس عند $(-1;3)$ هو $y=3$

$f'(-1)=3(1-1)=0$ ومنه $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=3$

المماس عند $(1;-1)$ هو $y=-1$

$f'(1)=3(1-1)=0$ ومنه $y=f'(-1)(x+1)+f(1)=-1$

☒ $\Omega(0;1)$. المعادلة (C_f) نسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ هي: $Y=X^3-3X$

يعني ان $\begin{cases} x=X \\ y=Y+1 \end{cases}$ أي ان $Y+1=X^3-3X+1$ اذن $Y=X^3-3X$

الدالة $g:X\mapsto X^3-3X$ دالة فردية. يعني ان من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يوجد $-x$ من $\mathbb{R}$

ومنه $g(-X)=(-X)^3-3(-X)=-(X^3-3x)$ اذن $g(-X)=-g(X)$

تستنتج ان $\Omega(0;1)$ مركز تناظر منحنى الدالة g

☒ نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط نرمز إلى فواصلها بـ: α ، β و γ.

لدينا $f(0)=1$ و $f(1)=-1$ و منه $f(0)\times f(1)<0$. نستنتج أن أحد الحلول و ليكن α يحقق: $0<\alpha<1$.

باتباع نفس المنهجية بين أن $0,3<\alpha<0,4$.

مادا تمثل كل من $0,3$ و $0,4$ بالنسبة إلى α؟

☒ نفرض أن β موجب تماما. عين قيمة مقربة إلى 0.1 بالنقصان للعدد β.

2.3 دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+3x-4$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=(x-1)(x+2)^2$.
2) ادرس تغيرات الدالة f.
3) عين نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المحورين
4) احسب $f''(x)$ ثم أدرس اشارتها .
5) عين معادلة المماس عند النقطة A ذات الفاصلة -1
6) أنشئ (C_f) والمماس في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الحل

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=(x-1)(x+2)^2$$
$$\ldots\ldots=(x-1)(x^2+4x+4)$$
$$\ldots\ldots=x^3+3x-4$$

2) ادرس تغيرات الدالة f

النهايات: لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=+\infty=-\infty$$

المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3x^2+6x$.

$f'(x)=0$ يعني ان $3x^2+6x=0$ أي

$\Delta=36$ ومنه $x_1=0$ و $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

3) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المحورين

محور الفواصل :

معالته تعطى بـ: $y=0$ اذن $f(x)=x^3+3x-4$ ومنه $f(x)=(x-1)(x+2)^2=0$

اذن $x-1=0$ ومنه $x=1$

و $(x+2)^2=0$ ومنه $x+2=0$ أي $x=-2$

ومنه النقط هي $(1;0)$ و $(-2;0)$

محور التراتيب :

معالته تعطى بـ: $x=0$ اذن $f(0)=-4$ ومنه النقطة هي $(0,-4)$

4) احسب $f''(x)$ ثم أدرس اشارتها .

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)=6x+6$.

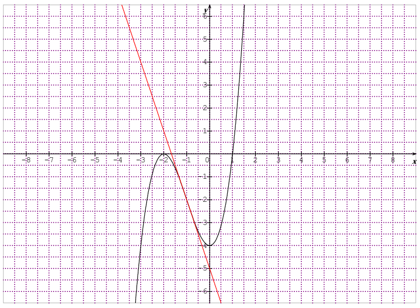
$f''(x)=0$ ومنه $6x+6=0$ اذن $x=-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

5) **معادلة المماس :** لدينا $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه $f'(-1)=-3$ و $f(-1)=-2$ وبالتالي $y=-3(x+1)-2=-3x-5$

6) أنشئ (C_f) والمماس في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.



نتائج وملاحظات:

من خلال المنحنى

1- نلاحظ أن المنحنى (C_f) يخترق مماسه عند النقطة $(-1;-2)$

2- انعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها

تعريف نقطة الأنعطاف

f دالة عددية معرفة على D_f وقابلة للأشتقاق مرتين على الأقل على D_f.

المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 اذا وفقط اذا كان.

إذا انعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها عند قيمة x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف $A(x_0;f(x_0))$.

3- النقطة $(-1;-2)$ هي مركز تنظر للمنحنى (C_f).

مركز التناظر:

النقطة $A(x_0;f(x_0))$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة المعرفة ب: $f:x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ حيث $a\neq 0$

طريقة للبرهان على مركز التناظر:

$A(x_0;f(x_0))$ مركز تناظر للمنحنى

نضع $y=f(x)$ ونغير المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ الى المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$ حيث نضع : $\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$

ونكتب معادلة منحنى الدالة f في المعلم الجديد, ثم نبين أن:

$Y=f(X)$ هي دالة فردية, وعليه فان النقطة $A(x_0;f(x_0))$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

المؤسســـــــة:	المستـــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :دراسة دالة تناظرية

المكتسبات القبلية : استعمال النظريات الأولية(المجموع؛ الجُداء؛ المقلوب؛ حاصل القسمة) لحساب نهايات.. حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

3/دراسة دالة تناظرية

1.3 دراسة مثال

ملاحظة :

نسمي دالة تناظرية كل دالة f من الشكل: $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث a، b، c و d أعداد حقيقية مع $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

دراسة الدوال من الشكل $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

ا). مجموعة التعريف دائما هي $\mathbb{R}-\{-d/c\}$

ب). النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a/c$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a/c$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a/c} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a/c} f(x)=\pm\infty$.

ج). المستقيمان المقاربان

مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=\dfrac{a}{c}$.

مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-\dfrac{d}{c}$

د). لحساب النهاية $\lim\limits_{x \to a/c} f(x)$ ندرس اشارة المقام ونعوض x ب $-d/c$

ه). الأشتقاق:مشتقة الدالة f هي $f'(x)=\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$.

يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=(2x+1)\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$. لندرس إشارة $x+2$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $x+2$	$-$	0	$+$

لدينا $\lim\limits_{x\to-2}(2x+1)=-3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$ و منه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-2}(2x+1)=-3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x)=-\infty$.

المستقيمات المقاربة: يقبل المنحني (C_f) مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=2$ و مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $x=-2$.

المشتقة: من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-1(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}.$$

إشارة المشتقة: من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ $f'(x)>0$.

نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $\infty[$

2.3 دراسة مثال

لتكن f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب $f(x)=\frac{3}{x-1}$ و (c_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (c_f) مع محوري الإحداثيات.

4) عين معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (c_f)

5) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (c_f)

<u>الحـل</u>

1) حساب النهايات:

مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}-\{1\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-1}=0;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-1}=0$$

لدينا $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{x-1}=+\infty;\ \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ وعليه

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} 3\times\frac{1}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} 3\times\frac{1}{x-1}=+\infty$$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

f قابلة للإشتقا ق على كل من المجالين $]1;+\infty[$; $]-\infty;1[$ ولدينا

$f'(x)=3\times\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$ ومنه لدينا من أجل كل x من D_f: $f'(x)<0$

وعليه الدالة f متناقصة على كل من المجالين $]1.\infty+[$; $]1.-\infty[$ وجدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0

3) تعين نقط تقاطع (c_f) مع محوري الإحداثيات

*مع المحور (yy'): x=0 و $y=f(x)$ معناه x=0 و $y=f(0)=-3$

ومنه $\left(c_f\right)\cap\left(yy'\right)=\{A\}$ حيث $A(0,-3)$

* مع المحور $\left(xx'\right): y=0$ و $y=f(x)$ معناه $y=0$ و $f(x)=0$

$f(x)=0$ يكافيء $\frac{3}{x-1}=0$ أي 3=0 و $x-1\neq 0$ 3=0 مستحيلة ومنه $\left(c_f\right)\cap\left(xx'\right)=\varnothing$

4)تعين معادلتي المستقيمين المقاربين

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ،ومنه المستقيم الذي معادلته y = 0 مستقيم مقارب

لـ $\left(c_f\right)$ عند $-\infty$ و $+\infty$ يوازي محورالفواصل

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty;\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته x=1 مستقيم مقارب

لـ $\left(c_f\right)$ يوازي محور التراتيب

5)رسم ا المستقيمين المقاربين والمنحني $\left(c_f\right)$

لرسم المنحني $\left(c_f\right)$ ننشيء بعض النقاط المساعدة