مذكرة رقم:8

تحضير مذكرة تعليمية

السنة الدراسية		اعداد الاستاذ
2014/2013	Yousfi Math Yousfisifou804@yahoo.fr	يوسفي عبد الرحمن

المحورالسابع :الزوايا الموجهة

المستوى : الثانية رياضيات

الموضوع : الزوايا الموجهة angles Orietes

الكفاءة المستهدفة

- استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا.
- تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين.
- توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.
- حل معادلات و متراجحات مثلثية .

المكتسبات القبلية

- الدائرة المثلثية
- العلاقات المثلثية

مخطط الدرس	التوقيت
نشاط :	
1: الزوايا الموجهة	
2:خواص الزوايا الموجهة	
3: حساب المثلثات	
4: المعادلات المثلثية	
5: جيب تمام وجيب الزويا المرفقة	
6:الاحداثيات القطبية	
7: حل معادلات ومتراجحات مثلثية	

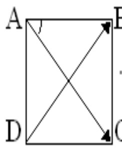
وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســــــــة:	المستـــــــــوى: الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة وحساب المثلثات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الزوايا الموجهة

المكتسبات القبلية استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا..

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط1:



ABCD مربع.

1/ ما هو قيس كل زاوية مما يلي: [AB,AC]،[AC,AB]، [AD,AB]؟

2/ نفس السؤال مع الزوايا الموجهة التالية: $(\overline{AC},\overline{AB})$، $(\overline{AB},\overline{AC})$، $(\overline{DC},\overline{DA})$؟

نشاط2:

$\vec{v}$، $\vec{u}$ شعاعان غير معدومين في المستوي:(أنظر الشكل).

حيث: $(\vec{v},\vec{u})=\alpha$.

مثل كل زاوية مما يلي ثم اذكر قيسا لها بدلالة α:

$(\vec{v},\vec{u})$، $(\vec{v}-\vec{u})$، $(-\vec{v},\vec{u})$، $(-\vec{v},-\vec{u})$، $(2\vec{v},3\vec{u})$، $(2\vec{v},-3\vec{u})$.

نشـــاط 01 02 ص 112 من الكتاب

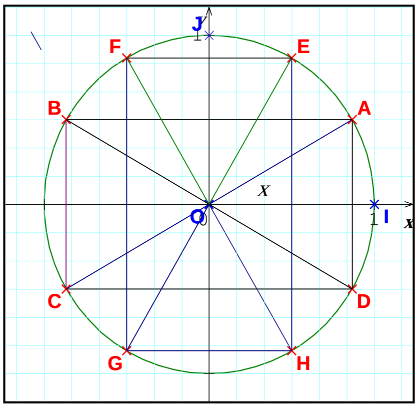
قيس زاوية بالدرجة متناسب مع قيسها بالراديان .

باستعمال جدول التناسبية . أنقل و أكمل الجدول الآتي:

القيس بالدرجة	15	22.5	36	105	120					
القيس بالراديان						$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{24}$

نشاط ثان

في الرسم المقابل (C) الدائرة الموجهة التي مركزها O و نصف قطرها 1 الاتجاه الموجب المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة . x هو قيس بالراديان للزاوية IOA.



بعبارة أخرى A هي صورة x على الدائرة المثلثية.

1) ماذا تمثل النقطة C بالنسبة للنقطة A ؟

2) ماذا تمثل النقطة B بالنسبة للنقطة A ؟

3) ماذا تمثل النقطة D بالنسبة للنقطة A ؟

4) ماذا تمثل النقطة E بالنسبة للنقطة A ؟

5) ماذا تمثل النقطة F بالنسبة للنقطة E ؟

6) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقطة E ؟

7) ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للنقطة E ؟

8) أنقل و أكمل الجدول الآتي:

قيس الزاوية	$\pi-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$-x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$x-\frac{\pi}{2}$
النقطة المرفقة							

9) ضع على الدائرة المثلثية النقطة M صورة $\frac{5}{2}x-\pi$.

- نبرهن نظرية الزاوية المحيطية.
- نتطرق في هذه الفقرة إلى الزاوية الموجهة لشعاعين غير معدومين وإلى خواصها دون أي توسع نظري. ثمّ نتطرق إلى أقياس زاوية موجهة، خاصة القيس الرئيسي الذي يكون محصورا ضمن المجال $]-\pi;\pi]$.
- الوحدة التي نستعملها لقياس الزوايا هي الراديان. ونلفت انتباه التلاميذ إلى قبول التعبير المجازي الذي نعبر به على الزاوية وقيسها في نفس الوقت كقولنا " الزاوية ... تساوي $\frac{\pi}{3}$ "
- توظف العلاقات المدروسة في السنة الأولى الخاصة بالعدد x والأعداد الحقيقية المرفقة له وهي : $-x$ ، $\pi+x$ ، $\pi-x$ ثمّ نمددها إلى الأعداد : $\frac{\pi}{2}-x$ و $\frac{\pi}{2}+x$.

● يجب التركيز على الفرق بين القيس الرئيسي والهندسي	**النشاط الأول :** – **الهدف : تحويل الدرجات الى راديان و العكس** **النتائج هي :** $\frac{\pi}{12}:\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{5}:\frac{7\pi}{12}:\frac{2\pi}{3}:67,5:75:52,5:10,5:142,5$ **النشاط الثاني :** – **تعيين صور أعداد حقيقية على الدائرة المثلثية** 1) C نظيرة A بالنسبة للنقطة O 2) B نظيرة A بالنسبة للمستقيم (OJ) 3) D نظيرة A بالنسبة للمستقيم (OI) 4) E نظيرة A بالنسبة للمنصف الاول 5) F نظيرة E بالنسبة للمستقيم (OJ) 6) G نظيرة E بالنسبة للنقطة O 7) H نظيرة E بالنسبة للمستقيم (OI) 8) النقط المرفقة هي على الترتيب : H ; E ; C ; G ; D ; F ; B 9) M هي نقطة تقاطع (C) مع منصف الزاوية $\widehat{FOJ}$ **1/ مفاهيم عامة:** * **الدائرة الموجهة:** هي دائرة قد اختير عليها اتجاه موجب للحركة (عادة عكس اتجاه عقارب الساعة) * **المستوي الموجه:** هو المستوي الذي وجهت كل دوائره. * **الدائرة المثلثية:** هي دائرة موجهة نصف قطرها 1، و الدائرة المثلثية المرفقة بمعلم هي دائرة مثلثية مركزها مبدأ المعلم المتعامد و المتجانس.	● نبرهن نظرية الزاوية المحيطية. ● نتطرق في هذه الفقرة إلى الزاوية الموجهة لشعاعين غير معدومين وإلى خواصها دون أي توسع نظري. ثمّ نتطرق إلى أقياس زاوية موجهة، خاصة القيس الرئيسي الذي يكون محصورا ضمن المجال $]-\pi;\pi]$. ● الوحدة التي نستعملها لقياس الزوايا هي الراديان. ونلفت انتباه التلاميذ إلى قبول التعبير المجازي الذي نعبر به على الزاوية وقيسها في نفس الوقت كقولنا " الزاوية ... تساوي $\frac{\pi}{3}$ " ● توظف العلاقات المدروسة في السنة الأولى الخاصة بالعدد x والأعداد الحقيقية المرفقة له وهي : $-x$ ، $\pi+x$ ، $\pi-x$ ثمّ نمددها إلى الأعداد : $\frac{\pi}{2}-x$ و $\frac{\pi}{2}+x$.

1/الزوايا الموجهة

1.1 تذكير

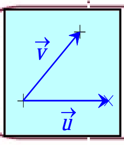
- الاتجاه المباشر مستو هو الاتجاه المختار و الاتجاه الغير مباشر هو عكس الاتجاه المختار.
- اصطلاحا نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
- في المستوي الموجه نسمي دائرة مثلثيه كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر و التي نصف قطرها 1

ملاحظة في كل مما يأتي نعتبر المستوي الموجه توجيه مباشر.

2.1 الزوايا الموجهة لشعاعين غير معدومين

تعريف2:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدمين . الثنائية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ تسمى زاوية موجهة لشعاعين.



3.1:قيس زاوية موجهة

تعريف2:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين ولتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن M و N النقطتين من المستوي حيث $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ المستقيم (OM) يقطع (C) في A والمستقيم (ON) يقطع (C) في B . قيس بالرادين للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو كذالك قيس بالرادين للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)$

ملاحظة ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين . إذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ فإن كل الأعداد من الشكل $\alpha+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.مع $k\in\mathbb{Z}$

3.1:قيس زاوية موجهة

خاصية: من بين أقياس الزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

مثال: القيس الرئيسي للقيس $9\pi/4$ هو $\pi/4$ لأن: $\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{\pi+8\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$

نتائج:

1) القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $\left(\vec{u},\vec{u}\right)$ هو 0.

2) القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $\left(\vec{u},-\vec{u}\right)$ هو π .

3) القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$.

4) القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو $-\frac{\pi}{2}$.

5) إذا كان x القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ فإن $|x|$ هو قيس للزاوية الهندسية المكونة من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

اعلم انه: إذا كان عدد حقيقي α قيس لزاوية موجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ فإنه يوجد عدد صحيح وحيد k حيث : $-\pi<\alpha+2k\pi\leq\pi$ يكفي إيجاد k إنطلاقا من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

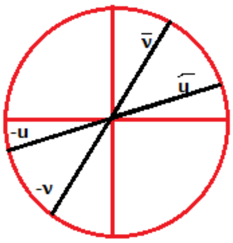
ت1) رقم 4 ص 125.

- نبرهن نظرية الزاوية المحيطية.
- نتطرق في هذه الفقرة إلى الزاوية الموجهة لشعاعين غير معدومين وإلى خواصها دون أي توسع نظري. ثمّ نتطرق إلى أقياس زاوية موجهة، خاصة القيس الرئيسي الذي يكون محصورا ضمن المجال $]-\pi;\pi]$.
- الوحدة التي نستعملها لقياس الزوايا هي الراديان. ونلفت انتباه التلاميذ إلى قبول التعبير المجازي الذي نعبر به على الزاوية وقيسها في نفس الوقت كقولنا " الزاوية ... تساوي $\frac{\pi}{3}$ "
- توظف العلاقات المدروسة في السنة الأولى الخاصة بالعدد x والأعداد الحقيقية المرفقة له وهي : $-x$ ، $\pi+x$ ، $\pi-x$ ثمّ نمددها إلى الأعداد : $\frac{\pi}{2}-x$ و $\frac{\pi}{2}+x$.

4.1 علاقة شال

مبرهنة :(تقبل بدون برهان) من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ لدينا .

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)$$



نتائج علاقة شال: من أجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا :

$$\bullet\left(\vec{v},\vec{u}\right)=-\left(\vec{u},\vec{v}\right) \quad ، \quad \bullet\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$$

$$\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi \quad ، \quad \bullet\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

تطبيق: لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. لتكن.
النقطتين A و B من الدائرة (C) حيث $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{6}$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{3\pi}{4}$.
عين قيسا للزوايا الموجهة : (1 $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)$. (2 $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)$. (3 $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

الحل:

(1 $$\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)=-\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right)=-\left[\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)\right]=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$$

(2 $$\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

(3 $$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$$

تطبيق: أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ التي قيسها α في كل حالة من الحالات الآتية :

(1 $\alpha=2007rad$. (2 $\alpha=-\frac{189\pi}{4}$. (3 $\alpha=\frac{65\pi}{8}$.

الحل: (1 $-\pi<2007+2k\pi\leq\pi$ ومنه $-2007-\pi<2k\pi\leq\pi-2007$ و بالتالي
$\frac{-2007-\pi}{2\pi}<k\leq\frac{\pi-2007}{2\pi}$ إذن $-319,923<k\leq-318,923$ و منه $k=-319$
إذن القيس الرئيسي للزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو $2007+(-319\times2\times\pi)=2,663rad$

(2 $-\pi<-\frac{189\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ باختزال π نحصل على $-1<\frac{-189}{4}+2k\leq1$ و بالتالي
إذن $\frac{185}{8}<k\leq\frac{193}{8}$ إذن $23,125<k\leq24,125$ و منه $k=24$
إذن القيس الرئيسي للزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو $-\frac{189\pi}{4}+(24\times2\times\pi)=-\frac{189\pi}{4}+\frac{192\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

(3 $-\pi<-\frac{65\pi}{8}+2k\pi\leq\pi$ بالاختزال في π نحصل على $-1<\frac{65}{8}+2k\leq1$
و بالتالي $-\frac{73}{16}<k\leq-\frac{57}{16}$ إذن $-4,5625<k\leq-3,5625$ و منه $k=-4$
إذن القيس الرئيسي للزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو $\frac{65\pi}{8}+(-4\times2\times\pi)=\frac{65\pi}{8}-\frac{64\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$.

- نبرهن نظرية الزاوية المحيطية.
- نتطرق في هذه الفقرة إلى الزاوية الموجهة لشعاعين غير معدومين وإلى خواصها دون أي توسع نظري. ثمّ نتطرق إلى أقياس زاوية موجهة، خاصة القيس الرئيسي الذي يكون محصورا ضمن المجال $]-\pi;\pi]$.
- الوحدة التي نستعملها لقياس الزوايا هي الراديان. ونلفت انتباه التلاميذ إلى قبول التعبير المجازي الذي نعبر به على الزاوية وقيسها في نفس الوقت كقولنا " الزاوية ... تساوي $\frac{\pi}{3}$ "
- توظف العلاقات المدروسة في السنة الأولى الخاصة بالعدد x والأعداد الحقيقية المرفقة له وهي : $-x$ ، $\pi+x$ ، $\pi-x$ ثمّ نمددها إلى الأعداد : $\frac{\pi}{2}-x$ و $\frac{\pi}{2}+x$.

5.1 خواص الزوايا الموجهة

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ أشعة غير معدومة من المستوي.ليكن θ قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ و θ' قيسا للزاوية $(\vec{u}',\vec{v}')$

1.5.1 الزوايا الموجهة المقايسة.

1. تكون الزاويتان $(\vec{u},\vec{v})$ و $(\vec{u}',\vec{v}')$ متقايستين إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $\theta'=\theta+2k\pi$

2. اذا كان α و α' قيسين لنفس الزاوية الموجهة فانه :يوجد عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$
وهذا معناه $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π.

2.5.1 الزوايا الموجهة و الإرتباط الخطي

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي. يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كان: $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ أو $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

ملاحظة

- إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نفس الاتجاه .
- إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اتجاهين متعاكسين
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي . ليكن k و k' عددين حقيقيين غير معدومين .
  - إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$.
  - إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

تطبيق:هل العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ؟

الحل:حتى يكون عددان حقيقيان α و β قيسين لزاوية موجهة لشعاعين يكفي أن يكون $\alpha-\beta$ من الشكل $2k\pi$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

$\frac{41\pi}{8}-\frac{9\pi}{8}=\frac{32\pi}{8}=4\pi=2\times2\pi$ و هو من الشكل $2k\pi$.

إذن العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ، أو لزاويتين متقايستين .

(يمكن القول كذالك أن العددين $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاويتين متقايستين)

6.1 الزوايا المحيطية

(C) دائرة مثلثية مركزها O. A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من الدائرة (C).

الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ تسمى زاوية محيطية.

نظرية:إذا كانت A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O وإذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$

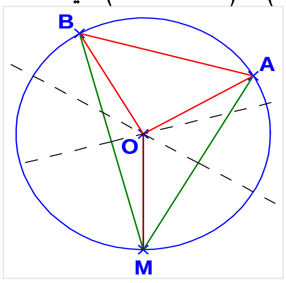
برهان:المثلث (OAB) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})$ و $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})$ متناظرتان بالنسبة إلى محور القطعة $[AM]$ و منه $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})=-(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})$ و منه $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})....(1)$.

المثلث (OBM) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ و $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})$ متناظرتان بالنسبة

إلى محور القطعة $[BM]$ ومنه $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)=-\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}\right)$ و

منه $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)=\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)....(2)$.

من (1) و (2) نستنتج $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)+\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$ أي



$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$ و

منه $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$

$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB}\right)$

$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ و منه $\dfrac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$.

تطبيقا

التمرين ألأول : الدائرة المثلثية (c) المرفقة بالمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ عين على الدائرة (c) النقط : F,E,C,B,A المعلمة بالاعداد :

$\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{-2\pi}{3}$, $\dfrac{13\pi}{4}$ على الترتيب

2/ تحقق في كل حالة من الحالات التالية إن كان العددين الحقيقيين α و β قيسان لنفس القوس :

$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ و $\beta=\dfrac{13\pi}{3}$ ، $\alpha=\dfrac{-5\pi}{4}$ و $\beta=\dfrac{17\pi}{4}$ ، $\alpha=\dfrac{14\pi}{3}$ و $\beta=\dfrac{-35\pi}{2}$

، $\alpha=\dfrac{-\pi}{4}$ ، $\beta=\dfrac{69\pi}{12}$

التمرين الثاني : الدائرة المثلثية (c) المرفقة بالمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ إذا علمت أن قيس الزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو $\dfrac{2\pi}{3}$ عين قيس كل من الزوايا الموجهة التالية :

$\left(2\vec{u},3\vec{v}\right)$ ، $\left(\vec{u},-3\vec{v}\right)$ ، $\left(\vec{v},\vec{u}\right)$ ، $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)$

2/ في كل حالة من الحالات التالية أوجد القيس الرئيسى للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ التي قيسها $\alpha\ rad$

$\alpha=\dfrac{9\pi}{2}$ ، $\alpha=\dfrac{-5\pi}{3}$ ، $\alpha=\dfrac{20\pi}{3}$ ، $\alpha=47\pi$

التمرين الثالث : $ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D قاعدته $[AB]$ و $[CD]$ حيث $AD=DC$

و $AB=AC$ عين القيس الرئيسى لكل من الزوايا الموجهة التالية :

$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right)$

ت2) (C) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ علم النقط: A ،B ،C ،D ،E ،F من (C) حيث: $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ ، $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{337}{4}\pi$ ،

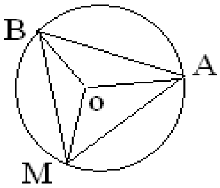
$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{-\pi}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD}\right)=\dfrac{23}{3}\pi$ ، $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$ ، $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OF}\right)=\dfrac{4\pi}{3}$.

2/ M نقطة من (C) حيث: $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{2007}{4}\pi$. أوجد القيس الرئيس لـ: $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$. ثم

أنشئ M.

ت3) (مبرهنة)

الزاوية المحيطية والزاوية المركزية. (أنظر الشكل).



1/ بين أن: $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$.

2/ بين أن: $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$. (استعن بالمثلثين MAB ، OAB)

المؤسسة:		المستوى:	الثانية رياضيات
السنة الدراسية:		ميدان التعلم:	هندسة
التاريخ:		الوحدة التعلمية:	الزوايا الموجهة وحساب المثلثات
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	حساب المثلثات

المكتسبات القبلية توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط

مثل على الدائرة المثلثية النقطة M صورة العدد x في كل حالة من الحالات الآتية

$x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{\pi}{2}$

و $x=\frac{\pi}{4}+19\pi$

و $x=\frac{3\pi}{4}$

و $x=-\frac{\pi}{4}-62\pi$

و $x=\frac{\pi}{3}$

و $x=\pi-\frac{\pi}{6}$

2/ حساب المثلثات

1.2 توجيه المعلم

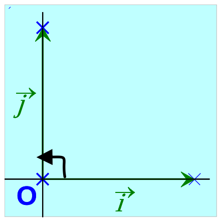
تعريف:

إذا كان $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ من المستوى مباشر.

إذا كان $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=-\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ من المستوى غير مباشر

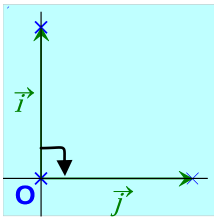
معلم متعامد ومتجانس مباشر

$\frac{\pi}{2}$



معلم متعامد ومتجانس غير مباشر

$-\frac{\pi}{2}$



2.2 النسب المثلثية

(C) دائرة مثلثية مركزها O ، لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث أن $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ معلم متعامد و متجانس مباشر . نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ ، لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ ، نعلم أن جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونكتب $\cos x$ و أن جيب العدد x هو ترتيب النقطة M ونكتب $\sin x$. إذا كان x قيسا بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح هو كذالك قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ و منه x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة (C) . و بالتالي: $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ مع $k\in\mathbb{Z}$

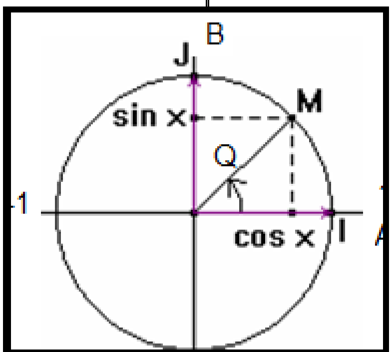
نقول أن الدالتين دوريتان و 2π دور لهما .

نتائج: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و $-1\le\sin x\le 1$ و $-1\le\cos x\le 1$
- $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

أي أنّ الدّالة جيب تمام زوجية و الدالة جيب فردية.

- نتحقق عند استعمال الدائرة المثلثية من تحكم التلميذ في تحديد أرباعها وصور القيم $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}$ ومن تمثيل الأعداد $\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ثم ربط ذلك بالجيب وجيب التمام.كما نوجه التلميذ.كلما كان ذلك ممكنا لاستخدام التناظرات التي توفرها الدائرة المثلثية في حساب جيب وجيب تمام الزوايا الشهيرة في بقية الأرباع.



جدول القيم الشهيرة:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

تعريف: جيب زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\sin(\vec{u},\vec{v})$.

جيب تمام زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب تمام أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

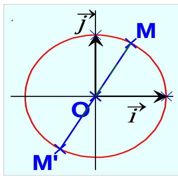
3.2: جيب وجيب تمام زاوية المرافقة

نسمي الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث x قيس لها، الزوايا الموجهة التي أحد أقياسها :

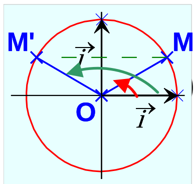
$-x$ ، $\pi-x$ ، $\pi+x$ ، $\frac{\pi}{2}-x$ ، $\frac{\pi}{2}+x$.

1 $\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$ 2 $\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$ 3 $\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}$

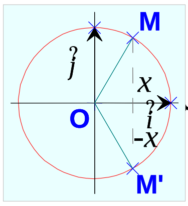
الجملة (1)



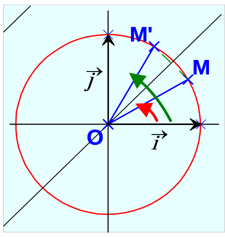
الجملة



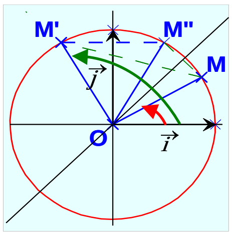
الج



ملاحظة: من الجملة (3) نستنتج أن الدالة cos (جيب تمام) دالة زوجية و أن الدالة sin (جيب) دالة فردية .



$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$



$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

تطبيق: عين القيم المضبوطة لكل من: (1 $\cos\frac{17\pi}{4}+\sin\frac{21\pi}{2}$. (2 $\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$.

الحل $\cos\frac{17\pi}{4}+\sin\frac{21\pi}{2}=\cos\frac{16\pi+\pi}{4}+\sin\frac{20\pi+\pi}{2}$

$=\cos 8\pi+\pi/4+\sin 10\pi+\pi/2$

وبالتالي $\cos\pi/4+\sin\pi/2=\sqrt{2}/2$

(2 $\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{36\pi+\pi}{6}\right)=\sin-6\pi+\pi/6=1/2$

(2 $\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{36\pi+\pi}{6}\right)=\sin-6\pi+\pi/6=1/2$

تمرين30 علما أن قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\frac{\pi}{2}$ عين

قيس الزوايا الموجهة التالية:

(1 $(\vec{u},-\vec{v})$ (2 $(2\vec{u},\vec{v})$ (3 $(\vec{u},-3\vec{v})$

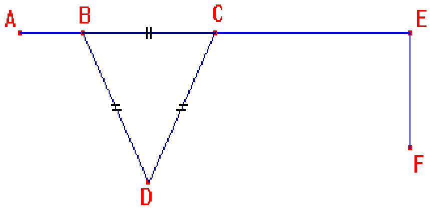
(4 $(-\vec{u},-\vec{v})$ (5 $(\vec{v},-\vec{u})$

5	4	3	2	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

تمرين منزلي

نعتبر النقط A ، B ، C و E في استقامية

BCD مثلث متقايس الأضلاع. المستقيم (EF) يعامد (AE) .



عين قيسا للزوايا الموجهة التالية

1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$ 2) $\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF}\right)$ 4) $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\right)$

الحل:

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$

في المثلث BCD مثلث متقايس الأضلاع $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)=\pi/3$ وبما ان $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\pi$ فان :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=-\left(\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)=\pi/3\right)=-\pi/6$$

$$\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD}\right)=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=\pi/6 \qquad -\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{2},-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$$

تطبيق:

عين القيمة المضبوطة لـ $\cos x$ إذا علمت أن $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

الحل 1) بما أن $\sin x=\frac{3}{5}$ فإن $\sin^2 x=\frac{9}{25}$ و منه : $\frac{9}{25}+\cos^2 x=1$. و بالتالي

$\cos^2 x=1-\frac{9}{25}$ أي $\cos^2 x=\frac{16}{25}$ و منه $\cos x=\frac{4}{5}$ أو $\cos x=-\frac{4}{5}$.

لدينا $\cos x<0$ لأن $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ إذن $\cos x=-\frac{4}{5}$

57 باستعمال الدائرة المثلثية (C) أوجد الأعداد الحقيقية x من المجال $[-\pi;\pi]$ التي تحقق:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$ 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin x=-\frac{1}{2}$ 4) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل: $x=\pi/3$ $x=-\pi/3$

51 1) عين على الدائرة المثلثية النقطة M حيث

$\cos x=\frac{3}{5}$ و $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

2) احسب $\sin x$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\cos(\pi-x)$ ، $\sin(\pi-x)$

3) احسب $\tan x$ ، $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\tan(\pi-x)$

نتائج : إذا كان x عددا حقيقيا فإنه من أجل كل عدد صحيح k نجد:

$\boxed{\cos(x)=\cos(x+2k\pi)}$ و $\boxed{\sin x=\sin(x+2k\pi)}$. (2π يسمى دورا للدالتين sin، cos)

$\boxed{-1\le\sin x\le+1}$ ، $\boxed{-1\le\cos x\le1}$ ، $\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1}$ ، $\boxed{\cos x=\cos(-x)}$

$\boxed{\sin x=-\sin(-x)}$ ، $\boxed{\cos(\pi+x)=-\cos x}$ ، $\boxed{\sin(\pi+x)=-\sin x}$

$\boxed{\cos(\pi-x)=-\cos x}$ ، $\boxed{\sin(\pi-x)=\sin x}$

المؤسســـــــة:	المستـــــــــوى: الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة وحساب المثلثات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المعادلات والمتراجحات المثلثية

المكتسبات القبلية حلّ المعادلات المثلثية الأساسية.حلّ متراجحات مثلثية بسيطة. حلّ المعادلة: $a\cos x + b\sin x = c$

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

3/المعادلات المثلثية

1.3 معادلات مثلثية

1.1.3 عددين حقيقيين لهما نفس جب

ليكن a و b عددين حقيقيين

$\cos a = \cos b$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = -b + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$\sin a = \sin b$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = \pi - b + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

2.1.3 المعادلات المثلثية الاساسية

المعادلات من الشكل $\cos x = a$ حيث a عدد حقيقي

إذا كان $a \in]-\infty.-1[\cup]1.+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $-1 \le a \le 1$ يوجد عدد حقيقي α حيث $a = \cos c$ و الحلول هي $\begin{cases} x = -\alpha + 2k\pi \\ x = \alpha + 2k\pi \end{cases}$.

تطبيق: حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x الآتيتين

1) $\cos x = \sqrt{3}/2$. 2) $\sin x = -1/2$. 3) مثل الحلول على الدائرة المثلثية

الحل: 1) $\cos x = \sqrt{3}/2$ ومنه $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$ و بالتالي

$x = \pi/6 + 2k\pi$ أو $x = -\pi/6 + 2k\pi$ بما أن $\sin \pi/6 = 1\backslash 2$ ، لإنشاء النقطة $M1$ يكفي أخذ النقطة $M1$ الموجودة في الربع الأول صورة $\pi/6$

2) $\sin x = -1/2$ ومنه $\sin x = -\sin \pi/6$ و بالتالي محور التراتيب النقطة التي ترتيبها $1/2$ و إسقاطها على $\sin x = \sin(-\pi/6)$ و بالتالي الدائرة المثلثية. $M2$ صورة $-\pi/6$ هي نظيرة $M1$

و منه $x = -\pi/6 + 2k\pi$ أو $x = \pi + \pi/6 + 2k\pi$ بالنسبة إلى محور الفواصل ، النقطة $M3$ صورة و نستنتج $x = -\pi/6 + 2k\pi$ أو $x = 7\pi/6 + 2k\pi$ هي نظيرة $M1$ بالنسبة إلى مبدأ المعلم

المعادلات من الشكل $\sin x = a$ حيث a عدد حقيقي

إذا كان $a \in]-\infty.-1[\cup]1.+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $-1 \le a \le 1$ يوجد عدد حقيقي β حيث $a = \sin c$ و الحلول هي $\begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$.

تمرين منزلي 61 حل في المجال $[0;2\pi[$ المعادلة:

$2\cos^2 x = \sin x$ بوضع: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\sin x = y$.

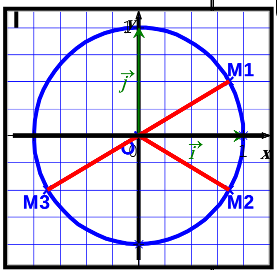
62 حل في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة: بوضع: $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

$\cos 2x + 2\sin x\cos x = 0$

63 حل في المجال $[0;\pi[$ المعادلة: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$\cos 7x = \cos^2 x - \sin^2 x$

التعليمات والتوجيهات: نقصد هنا المتراجحات من النوع: $\cos x < a$ ، $\sin x < b$ ،.... فيما يخص المتراجحات، نكتفي بحلها على مجال طوله 2π على الأكثر ونمثّل مجموعة الحلول على الدائرة المثلثية.



● يجب التركيز على الفرق بين القيس الرئيسي والهندسي

1.3 حل معادلات من الشكل $\cos u = \sin v$.

<u>تمرين:</u> حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

<u>إرشادات للحل:</u> لحل معادلة من الشكل $\cos u = \sin v$ يجب تحويل $\sin$ إلى $\cos$ أو العكس

علما أن: $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$ و $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على أقياس الزوايا الشهيرة .نشير إلى أن القيم التي يأخذها k في العبارة $\frac{2k\pi}{n}$ هي من 0 إلى $n-1$ (k عدد صحيح و n عدد طبيعي غير معدوم)

<u>الحل:</u> 1) نعلم ان

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$ و بالتالي النقطة $M1$ الموجودة في الربع الأول صورة $\frac{\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ بما أن $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ، لإنشاء النقطة $M1$ يكفي أخذ على

2) $\sin x=-\frac{1}{2}$ و منه $\sin x=-\sin\frac{\pi}{6}$ و بالتالي محور التراتيب النقطة التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ و إسقاطها على $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

نقصد هنا المتراجحات من النوع: $\cos x<a$ ، $\sin x<b$ .... فيما يخص المتراجحات ،نكتفي بحلها على مجال طوله 2π على الأكثر ونمثّل مجموعة الحلول على الدائرة المثلثية.

2.3 حل معادلات من الشكل $a\cos x+b\sin x=c$.

<u>تمرين:</u> لتكن في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$a\cos x+b\sin x=c$ .....(1) . حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و $(a;b)\neq(0;0)$.

1) أحسب $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$.

2) استنتج أنه توجد زاوية α حيث أن : $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3) استنتج أن المعادلة (1) تكتب $\cos x.\cos\alpha+\sin x.\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4) باستعمال دساتير الجمع استنتج أن (1) تكتب: $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

<u>ملاحظة:</u> في السؤال الثالث كان بإمكاننا وضع $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ثم.

استعمال دساتير الجمع لـ في السؤال الربع ، نكتب المعادلة (1) على الشكل : $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

<u>تطبيق:</u> حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\cos x+\sin x=1$.

2) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$.

3) $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-1$

4) $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=m$ (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

4/المتراجحات المثلثية

1.4 حل متراجحات الشكل $\cos x < a$.

تمرين: في المجموعة $[0,2\pi[$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $\cos x < a$ ... (1) (a عدد حقيقي).

1) أثبت أنه إذا كان $a \le -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $[0,2\pi[$.
2) أثبت أنه إذا كان $a \ge 1$ فإن $[0,2\pi[$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).
3) أثبت أنه إذا كان $-1 < a < 1$ فإنه يوجد عددين متعاكسان α و β من المجال $[0,2\pi[$ حيث أن $\cos\alpha = \cos\beta = a$.
نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.
4) استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي فواصلها أصغر من a .
5) استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $[0,2\pi[$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\cos x \le a$ الحالتان $a=-1$ و $a=1$ تدرس على حدى

تطبيق: حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المتراجحات ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية . في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $2\cos x < 1$. 2) $\sqrt{2}\cos 3x + 2 \le 0$. 3) $2\cos 2x - \sqrt{3} \ge 0$. 4) $\cos 4x - \frac{1}{2} > 0$.

2.4 حل متراجحات من الشكل $\sin x < b$.

تمرين: في المجموعة $]-\pi,\pi]$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $\sin x < b$ ... (1) (b عدد حقيقي).

1) أثبت أنه إذا كان $b \le -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $]-\pi,\pi]$.
2) أثبت أنه إذا كان $b \ge 1$ فإن $]-\pi,\pi]$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).
3) أثبت أنه إذا كان $-1 < b < 1$ فإنه يوجد عددان α و β من المجال $]-\pi,\pi]$ حيث أن $\sin\alpha = \sin\beta = b$
نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب.
استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي تراتيبها أصغر من b .
استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $]-\pi,\pi]$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\sin x \le b$ الحالتان $b=-1$ و $b=1$ تدرس على حدى .

تطبيق: حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية. في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\sin x < -\frac{1}{2}$. 2) $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \le 0$. 3) $2\sin 5x + \sqrt{3} \ge 0$. 4) $2\sin 4x - \sqrt{2} > 0$.

التمرين الرابع: 1/ أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ لاحظ أن : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

2/ علما ان : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ، أحسب $\sin\frac{7\pi}{12}$.ثم إستنتج $\sin\frac{13\pi}{12}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

لاحظ أن : $\frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}$ ، $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}$

لتمرين الخامس : 1/ عين قيمة $\cos x$ و $\sin x$ من أجل :

$$x=-\frac{\pi}{4} \quad , \quad x=\frac{2\pi}{3} \quad , \quad x=-\frac{5\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{29\pi}{6}$$

2/ اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$$

التمرين السادس : 1- أنشر $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ثم حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلة : $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$. 2- أحسب : $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

التمرين السابع : المستوي منسوب إلى المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المتعامد والمتجانس

1 / أحسب الإحداثيات القطبية للنقطتين A و B المعرفتين بالإحداثيتين الديكارتيتين كمايلي :

$A(-1,1)$ ، $B\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

2/ أحسب الإحداثيات الديكارتية للنقطتين C و D المعرفتين بالإحداثيتين القطبيتينكمايلي :

$C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ ، $D\left(4,\frac{-7\pi}{6}\right)$

التمرين الثامن : المستوي منسوب إلى المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المتعامد والمتجانس

لتكن النقطة A إحداثياتها الديكارتية $\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ و M نقطة حيث $AM=2$ و $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)=\frac{7\pi}{12}$

1/ عين الإحداثيات القطبية للنقطة A

2/ تحقق أن : $\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{4}$

3/ أحسب الإحداثيات القطبية للنقطة B المعرفة بـ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AM}$ ثم إستنتج إحداثيات النقطة M

التمرين التاسع : x و y عددان حقيقيان ، إذا علمت أن : $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

1/ إستنتج $\cos 2x$ ثم حل في المجال $[-\pi,\pi]$ المعادلة : $\sin 2x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

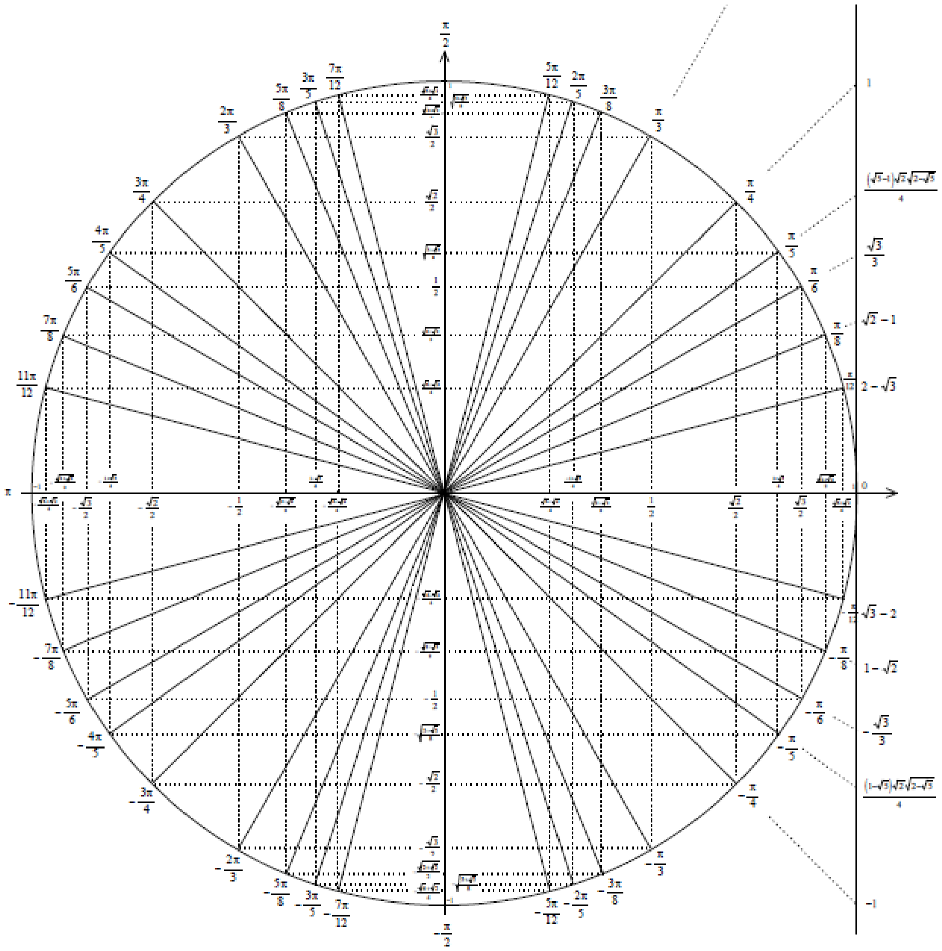
2/مثل صور هذه الحلول على الدائرة المثلثية

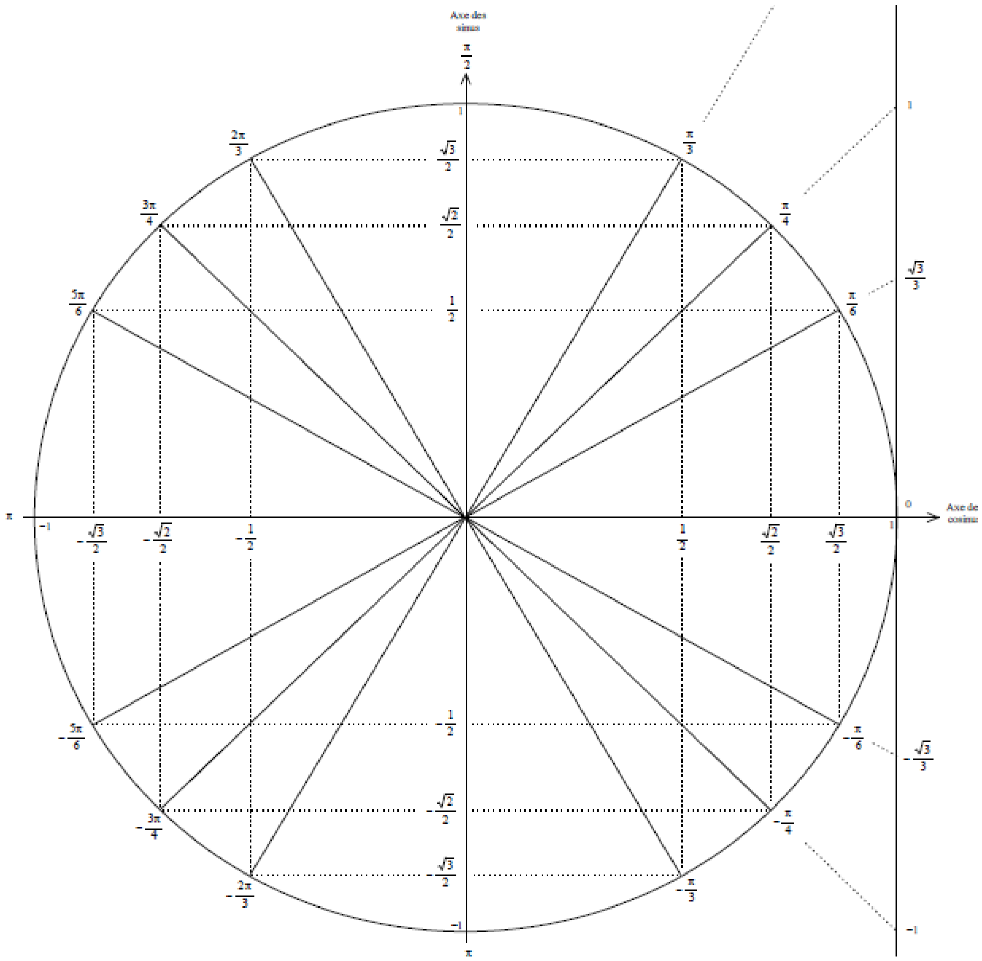
التمرين العاشر : 1/حل في $\Re$ مايلي : ا- $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ ، ب- $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ج- $\cos x+\sin x=0$ د- $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ هـ - $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

و- $4\cos^2 x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0$

2/ حل في المجال $[-\pi,\pi]$ مايلي : أ- $2\sin x+\sqrt{2}=0$ ، ب- $2\sin x+\sqrt{2}\leq 0$ ، ج- $1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 0$


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{12}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{8}$
$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt{2}-1$
$2-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-2$
$1-\sqrt{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
-1


Axe des sinus
Axe de cosinus
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
-1
0
π

1

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$\cos 2a=2\cos^2 a-1$$
$$\cos 2a=1-2\sin^2 a$$
$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a+\sin^2 a=1$$
$$1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$$

2

تحويل جداء إلى مجموع

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$
$$\cos a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$$

تحويل مجموع إلى جداء

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

3

$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ إذا كان: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $a+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$ إذا كان: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

$\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ إذا كان: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $a\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ و $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

بوضع: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ ولكل x من $\mathbb{R}$ بحيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\pi+2k\pi$ ولكل $k\in\mathbb{Z}$

لدينا: $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

4

$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$

حيث: $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

أو $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta)$

حيث: $\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

-sin x = sin (- x)
-cos x = cos (pi –x)
-tan x = tan (- x)

معادلات مثلثية

Sin x= sin a <=> [a = x + 2. k.pi أو a = pi – x + 2. k.pi] z
Cos x= cos a <=> [a = x + 2. k.pi أو a = – x + 2. k.pi] z
Tan x= tan a <=> [a = x + k.pi] z

حالات خاصة

Sin X = 0 <=> X = k.pi
Cos X = 0 <=> X = pi/2 + k.pi
Sin X = 1 <=> X = pi/2 + 2. k.pi
Cos X = 1 <=> X = 2.k.pi
Sin X = -1 <=> X = - pi/2 + 2. k.pi
Cos X = -1 <=> X = pi + 2. k.pi

صيغ التحويل

Cos (a + b) = cos a . cos b – sin a . sin b
Cos (a - b) = cos a . cos b + sin a . sin b
Sin (a + b) = sin a . cos b + cos a . sin b
Sin (a - b) = sin a . cos b - cos a . sin b
Tan (a + b) = tan a + tan b /1 - tan a . tan b
Tan (a - b) = tan a - tan b /1 + tan a . tan b

صيغ

	$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ $\tan 2x = 2\tan x / 1 - \tan^2 x$ $\cos^2 x = ½ (1 + \cos 2x)$ z _ $\sin^2 x = ½ (1 - \cos 2x)$ z _ **تحويل مجاميع إلى جداء ات** $\cos p + \cos q = 2\cos (p + q /2) . \cos (p - q /2)$z $\cos p - \cos q = 2\sin (p + q /2) . \sin (p - q /2)$z $\sin p + \sin q = 2\sin (p + q /2) . \cos (p - q /2)$z $\sin p - \sin q = 2\sin (p - q /2) . \cos (p + q /2)$z **تحويل جداء ات إلى مجاميع** $\cos a . \cos b = ½ [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$z $\sin a . \sin b = - ½ [\cos (a + b) - \cos (a - b)]$z $\sin a . \cos b = ½ [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$	