ميدان التعلم: الهندسة.　　**السنة الدراسية:** 2015/2014.

الوحدة التعليمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات.　　**المستوى:** 2 ع.ت.

الموضوع: الزاوية الموجهة لشعاعين.　　**الأستاذة:** روبة هاجر.

تقويم تشخيصي: نشاط رقم 02 صفحة 210.

I. الزواية الموجهة :

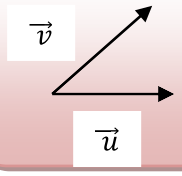
1. الزاوية الموجهة لشعاعين غير معدومين:

- يوجه المستوي توجيها مباشر (موجب) و يسمى الاتجاه الأخر الاتجاه الغير المباشر (السالب)
- اصطلاحا نختار الاتجاه المباشر المعاكس لاتجاه عقارب الساعة.

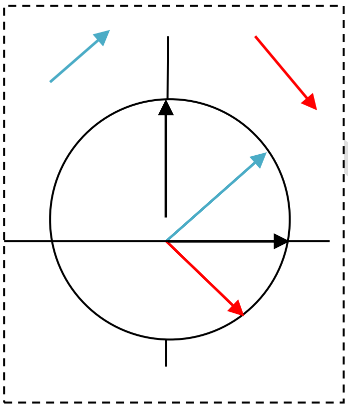
تعريف:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين.

الثنائية $(\vec{u}\,;\vec{v}\,)$ تسمى زاوية موجهة للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.



2. قيس زاوية موجهة



ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و ليكن (C) دائرة مثلثية مركزها O

و لتكن $N; M$ النقطتين من المستوي حيث :

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$; $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$

المستقيم (OM) يقطع (C) في A و المستقيم (ON) يقطع (C) في B قيس بالراديان الزاوية $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}; \overrightarrow{\mathrm{ON}}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$

مثال:

$ABCD$ مربع

❖ أقياس كل من الزوايا $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AD}})$; $(\overrightarrow{\mathrm{AD}}; \overrightarrow{\mathrm{AB}})$; $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{CA}})$:

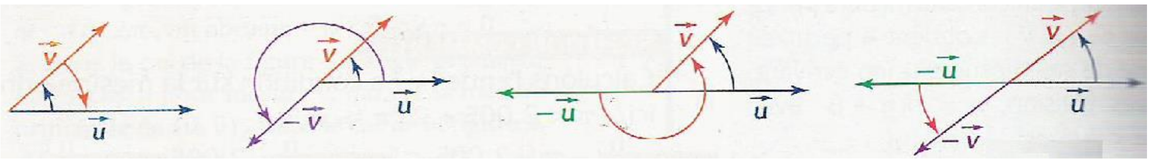
تعريف :

ليكن $\vec{v}\ ;\ \vec{u}$ شعاعين غير معدومين

إذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ فان كل الأعداد من الشكل $x + 2k\pi$

هي أقياس للزاوية $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ مع $k \in Z$.

من بين أقياس الزوايا الموجهة $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ;\vec{v})$.



نتائج:

من اجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u};\vec{v}$ لدينا

- $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$
- $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$
- $(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$
- $(\vec{v};\vec{u}) = (-\vec{u};-\vec{v})$

نتائج :

- القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $(\vec{u}\ ;\ \vec{u})$ هو 0
- القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $(\vec{u}\ ;-\ \vec{u})$ هو π
- القيس الرئيسي للزاوية القائمة الغير المباشرة هو $-\frac{\pi}{2}$
- القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$
- اذا كان القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ;\ \vec{u})$ فان $|x|$ هو قيس الزاوية الهندسية المكونة من $\vec{v}\ ;\ \vec{u}$

تطبيق:

قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ هو $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 2011rd$

- أوجد القيس الرئيسي لهذه الزاوية.

الحل:

$-\pi < 2011 + 2k\pi \leq \pi$ ومنه $-2011-\pi < 2k\pi \leq \pi - 2011$

و بالتالي $\frac{-2011-\pi}{2\pi} < k \leq \frac{\pi - 2011}{2\pi}$ إذن $-320,56 < k \leq -319,56$ و منه $k = -320$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو $2011 + (-320 \times 2 \times \pi) = 0,38rad$

3. علاقة شال:

مبرهنة:

من اجل كل ثلاث أشعة غير معدومة $\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}$ لدينا :

$$(\vec{u};\vec{v})+(\vec{v};\vec{w})=(\vec{u};\vec{w})+2k\pi$$

نتيجة:

- $(-\vec{u};-\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})$

تطبيق:

تمرين رقم 17 ص 127.

تمرين منزلي

تمرين رقم 22 ص 127.

II. خواص الزوايا الموجهة

1. الزوايا المتقايسة

خاصية

$\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'}$ أشعة غير معدومة من المستوي

ليكن x قيسا للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ و x' قيسا للزاوية $(\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'})$ يكون الزاويتان $(\vec{u};\vec{v})$و $(\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'})$ متقايستين

إذا وفقط إذا كان k عدد صحيح حيث $x'=x+2k\pi$

ملاحظة :

- $x'=x+2k\pi$ معناه $x'-x=2k\pi$ معناه أن $x'-x$ مضاعف لـ 2π
- إذا كان $x'-x=2k\pi$ نقول أن x' و x قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتين متقايستين.

تمرين رقم 26 ص 228.

2. الزاوية الموجهة و الارتباط الخطي لشعاعين

خاصية :

$\vec{u}\,;\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي

يكون الشعاعان $\vec{u}\,;\vec{v}$ مرتبطان خطيا اذا وفقط اذا كان :

$(\vec{u};\vec{v}) = 2\pi k$ أو $(\vec{u};\vec{v}) = \pi + 2$

ملاحظة :

إذا كان $(\vec{u};\vec{v}) = 2\pi k$ يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من نفس الاتجاه.

إذا كان $(\vec{\ };\vec{v}) = \pi + 2\pi k$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اتجاهين متعاكسين.

خاصية

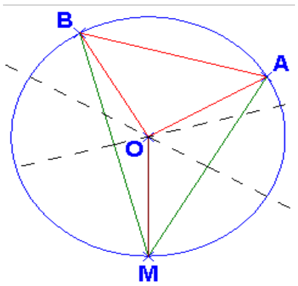
$\vec{u}$ و$\vec{v}$شعاعين غير معدومين من المستوي.

ليكن k' و k عددين حقيقيين غير معدومين

- إذا كان k' و k من نفس الإشارة فان $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$
- إذا كان k' و k من اشارتين مختلفتين فإن $(k\vec{u};k'\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v})$

- تمرين رقم 30 ص 229.
- **الزاوية المحيطية:**

إذا كانت $M\,;A\,;B$ ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O.



- الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$ تسمى زاوية محيطية.
- الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ تسمى زاوية مركزيـــــــة.

مبرهنة :

إذا كان α قيسا لزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

فان $\frac{\alpha}{2}$ قيس لزاوية $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$

البرهان: ....

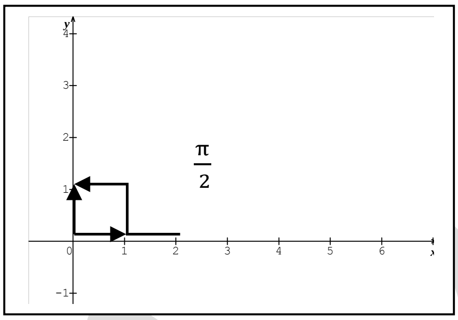
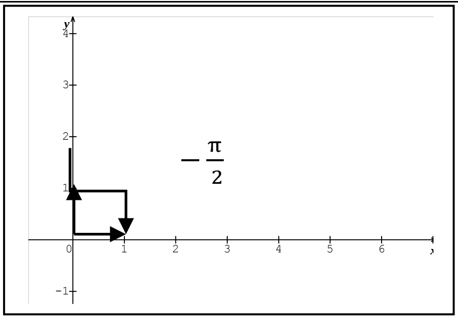
تطبيق : تمرين رقم30 و 31 ص 229.

III. المثلثات :

المعلم متعامد ومتجانس المباشر

تعريف :

- إذا كان $\frac{\pi}{2} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$ نقول ان المعلم متعامد ومتجانس من المستوي المباشر
- إذا كان $-\frac{\pi}{2} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$ نقول أن المعلم متعامد والمتجانس من المستوي غير مباشر

	
معلم متعامد و متجانس مباشر	معلم متعامد ومتجانس غير مباشر

1. جيب تمام و جيب زاوية موجهة لشعاعين

نتائج :

من أجل كل عدد حقيقي x

- $-1 \leq cosx \leq 1$
- $-1 \leq sinx \leq 1$
- $cos^2x + sin^2x = 1$

جيب وجيب تمام أقياس زوايا شهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تعريف :

- جيب التمام زاوية موجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو جيب تمام لأحد أقياس بالراديان و نرمز له بالرمز $cos(\vec{u};\vec{v})$.
- جيب زاوية موجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو جيب لأحد أقياس بالراديان و نرمز له بالرمز $sin(\vec{u};\vec{v})$.

- تمرين رقم 35 ص 229.

جيب تمام و جيب الزوايا المرافقة:

نشاط : المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(o;\vec{i};\vec{j})$

(C) دائرة مثلثية و لتكن M نقطة من الدائرة (C)صورة العدد الحقيقي x .

- مثل على الدائرة المثلثية (C)النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 صور الأعداد الحقيقية $\pi-x$ ، $\pi+x$ ، $-x$ ، $\frac{\pi}{2}-x$ على الترتيب.

- ماذا تمثل هذه النقط بالنسبة لنقطة M.ثم عين جيب تمام و جيب الأقياس السابقة بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

- ماذا تستنتج بالنسبة لـــ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ؟

تعريف:

تسمى الزوايا المرفقة بزاوية موجهة x قيس لها الزاوية الموجهة التي أحد أقياسها:

$$-\frac{\pi}{2}-x\ ;\ \frac{\pi}{2}+x\ ;\ \pi+x\ ;\ \pi-x\ ;\ -x$$

فيما يلي نأخذ عددا حقيقيا x و M صورته على الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

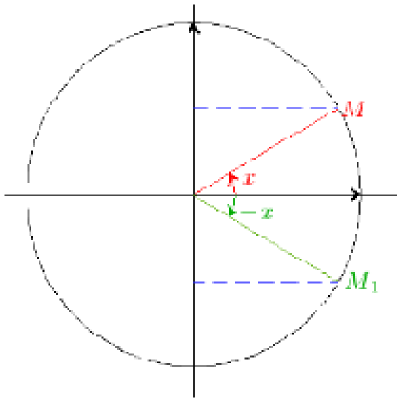
مبرهنة:

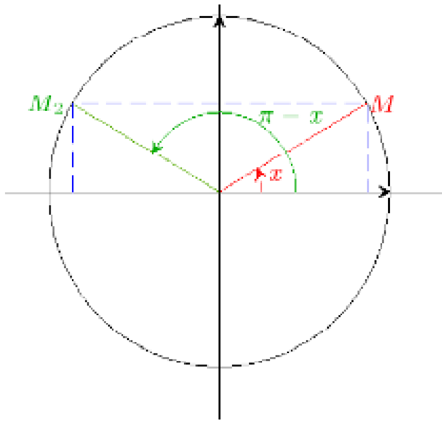
من اجل كل عدد حقيقي لدينا:

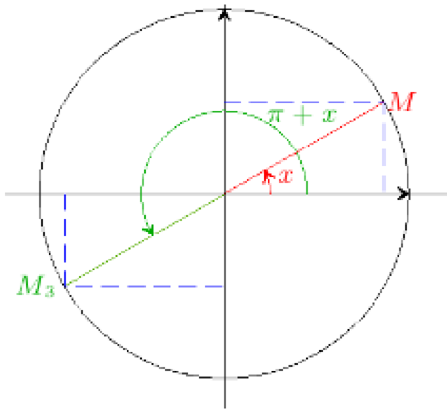
$$\begin{cases}\cos(\pi+x)=-cosx\\ \sin(\pi+x)=-sinx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(-x)=cosx\\ \sin(-x)=-sinx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\pi-x)=-cosx\\ \sin(\pi-x)=sinx\end{cases}$$



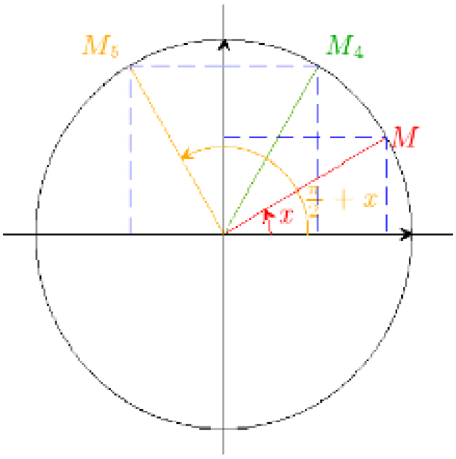


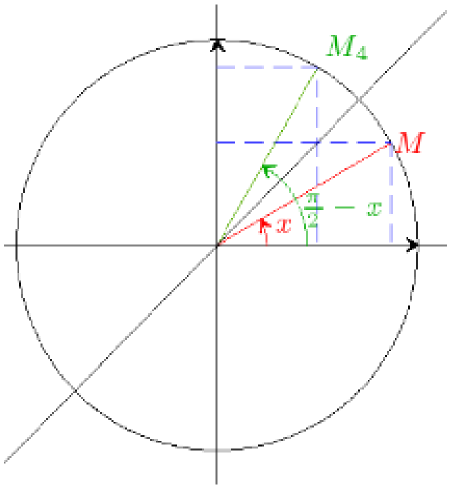


مبرهنة:

من أجل كل عدد حقيقي لدينا:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -sinx$
- $sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = cosx$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = sinx$
- $sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = cosx$





- تمرين رقم 32 ص 229.

تطبيق1: أحسب مايلي $\cos\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{-3\pi}{4}$.

تطبيق 2: أكتب بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ مايلي .

$$a=\cos(\frac{\pi}{2}-x)-\sin x+\cos(\pi-x)+\sin(\pi+x)$$

$$b=\sin(\frac{\pi}{2}+x)-\sin x+\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)$$

- تطبيق : تمرين رقم 40 ص 229.
- تمرين رقم 53 ص 230.

1- حل معادلات مثلثية:

أ- عددين حقيقيين لهما نفس جيب تمام و نفس الجيب

مبرهنة:

a و b عددين حقيقيين.

$\cos a=\cos b$ معناه أن: $\begin{cases} a=b+2k\pi \\ k \ (\in\mathbb{Z}) \\ a=-b+2k\pi \end{cases}$

$\sin a=\sin b$ معناه أن: $\begin{cases} a=b+2k\pi \\ k \ (\in\mathbb{Z}) \\ a=\pi-b+2k\pi \end{cases}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين الآتيتين:

$\bullet \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\bullet \cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

ب- المعادلات من الشكل $\cos x = a$ حيث a عدد حقيقي:

- إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.
- إذا كان $-1\leq a\leq 1$ يوجد عدد حقيقي c حيث $a=\cos c$ أي أن:

$\cos x = \cos c$ ومنه:
$$\begin{cases} x = c+2k\pi \\ k \ (\in \mathbb{Z}) \\ x=-c+2k\pi \end{cases}$$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ج- المعادلات من الشكل $\sin x = a$ حيث a عدد حقيقي:

- إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.
- إذا كان $-1\leq a\leq 1$ يوجد عدد حقيقي c حيث $a=\sin c$ أي أن:

$\sin x = \sin c$ ومنه:
$$\begin{cases} x = c+2k\pi \\ k \ (\in \mathbb{Z}) \\ x=\pi-c+2k\pi \end{cases}$$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين رقم 56 صفحة 230.

تمرين رقم 57 صفحة 230.

ح- حل المعادلات من الشكل $\cos u = \sin v$:

تمرين: حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية.

- لحل المعادلة يجب تحويل sin إلى cos أو تحويل cos إلى sin لأجل ذلك نستعمل ما يلي:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \end{cases}$$

- لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على أقياس الزوايا الشهيرة، نشير إلى أن القيم التي يأخذها k في العبارة $\frac{2k\pi}{n}$ هي من 0 إلى $n-1$ (k عدد صحيح و n عدد طبيعي غير معدوم).

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x$

2- - حل متراجحات مثلثية:

أ- متراجحات من الشكل $\cos x \prec a$: حيث a عدد حقيقي

تمرين: في المجموعة $[0,2\pi[$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $\cos x < a$. (1) (a عدد حقيقي) .

1) أثبت أنه إذا كان $a \leq -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $[0,2\pi[$.

2) أثبت أنه إذا كان $a \geq 1$ فإن $[0,2\pi[$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).

3) أثبت أنه إذا كان $-1 < a < 1$ فإنه يوجد عددين متعاكسان α و β من المجال $[0,2\pi[$ حيث أن $\cos\alpha=\cos\beta=a$. نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.

- استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي فواصلها أصغر من a .

- استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $[0,2\pi[$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\cos x \leq a$ الحالتان $a=-1$ و $a=1$ تدرس على حدى .

تطبيق: حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المتراجحات ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $2\cos x < 1$.

2) $\sqrt{2}\cos 3x + 2 \leq 0$.

ب- متراجحات من الشكل $\sin x \prec b$: حيث b عدد حقيقي

تمرين: في المجموعة $]-\pi,\pi]$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $\sin x < b$. (1) (b عدد حقيقي) .

1) أثبت أنه إذا كان $b \leq -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $]-\pi,\pi]$.

2) أثبت أنه إذا كان $b \geq 1$ فإن $]-\pi,\pi]$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1) .

3) أثبت أنه إذا كان $-1 < b < 1$ فإنه يوجد عددان α و β من المجال $]-\pi,\pi]$ حيث أن $\sin\alpha = \sin\beta = b$
نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية، و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

- استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي تراتيبها أصغر من b .

- استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $]-\pi,\pi]$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\sin x \leq b$ الحالتين $b = -1$ و $b = 1$ تدرس على حدى .

تطبيق: حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

في كل حالة من الحالات الآتية: $\sin x < -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \leq 0$