مذكرة رقم:6

تحضير مذكرة تعليمية

السنة الدراسية		إعداد الاستاذ
2014/2013		يوسفي عبد الرحمن

المحور الخامس: المتتاليات العددية

المستوى : الثانية رياضيات

الموضوع : المتتاليات Les suites

الكفاءة المستهدفة

- ♥ وصف ظاهرة بواسطة متتالية.
- ♥ التعرف على اتجاه تغير متتالية.
- ♥ التعرف على متتالية حسابية (هندسية).
- ♥ حساب الحد العام لمتتالية حسابية (هندسية).
- ♥ حساب مجموع p حدا متعاقبا.
- ♥ حساب نهاية متتالية عددية.

المكتسبات القبلية

- ♥ الدوال العددية

مخطط الدرس	التوقيت
نشاط : .... 1: المتتالية العددية 2: المتتالية الحسابية 3:المتتالية الهندسية :4	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • المميز في الرياضيات • راسم المتتاليات برنامج	• السبورة • جهاز داتاشو حاسبة بيانية	

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة	المستـــــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية: 2014/2013	ميدان التعـــلم:التحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية:المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : توليد متتالية

• المكتسبات القبلية : التعرّف على اتجاه تغير متتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة. الكفاءاتالقاعدية : وصف ظاهرة بواسطة متتالية

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط تعريف متتالية كما اسمها يدل عليها اي ان المتتاليات العددية هي تتالي اعداد وفق ترتيب ما (3,7,8,9)	(see below)	• ندرج الترميز بالدليل ونسجل أنّ u_n إلى الترميز الدالي $u(n)$ (المستخدم في الحاسبات البيانية) وتوظيفه في بعض الأحيان يساعد التلميذ على استخدام هذه الحاسبات، حيث تظهر عندئذ المتتالية كدالة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ ونوضح الفرق بين المتتالية u والحد u_n الذي دليله n.

نشـــــاط 01

نعتبر قائمة الاعداد التالية : 1 ، 3 ، 5 ، 7، 9 ، .... و نرمز لها على الترتيب بـ u_0، u_1، u_2، u_3، u_4، ....

1) أحسب u_5 ، u_6 ، u_7 ، u_8 و بتخمين أحسب u_{18} ، u_{120} و أكتب u_n بدلالة

حل النشـــــاط

تعريف متتالية بحدهـــــــا العام

$u_5 = 11$ $u_6 = 13$ ، $u_7 = 15$ ، $u_8 = 17$

$u_{18} = 2\times 9+1 = 90$ ، $u_{120} = 2\times 60+1 = 121$ و أكتب $u_n = 2n+1$ بدلالة n

1/.المتتاليات العددية

1.1. مبرهنة

تعريف:

نسمي متتالية عددية حقيقية كل دالة معرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ ترفق بكل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، n_0 معطى، العدد u_n .

ونرمز لها ب: u_n أو v_n.

يمكن التعبير عن المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n = f(n)$

حيث $f : x \mapsto -x^2+3$.

$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

ترميز:

نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هوا لحد العام للمتتالية u و يسمى كذالك الحد الذي دليله n.

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

مثال: $u_n = 1/(n-2)$ معرفة حيث $n \geq 3$

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n = 3n-2$

احسب الحد الأول u_0، u_1، u_2 استنتج u_{n+1} بدلالة u_n

الحل: $u_0 = 3(0)-2 = -2$، $u_1 = 3(1)-2 = 1$ ، $u_2 = 3(2)-2 = 4$ إذن

$u_{n+1} = 3(n+1)-2 = 3n+1$

1.1 طرق توليد متتالية عددية :(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

1.2.1 توليد متتالية عددية بالحد العام:

إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام. ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: لابد من التمييز بين متتالية (u_n) و بين حدها u_n الذي هو عدد حقيقي.

تعريف:
يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$ حيث مثلا : $f:x\mapsto -x^2+3$. أي $u_n=-n^2+3$

2.2.1 توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

تعريف: يمكن تعريف متتالية بالتراجع و ذلك بإعطاء:
1) قيمة الحد الأول.
2) علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية

لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$.
المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بِـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n-2$.
تسمح علاقة $u_{n+1}=3u_n-2$ بحساب قيمة الحد u_{n+1} إذا علمت قيمة الحد الذي يسبقه u_n معرفة قيمة u_0 تسمح من حساب قيمة u_1 و هكذا فإن $u_1=3\times u_0-2=3\times 2-2=4$.

مثال1: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية $\begin{cases}u_0=-1\\u_{n+1}=2u_n+5\end{cases}$ احسب u_1، u_2، u_3

الحل1: لدينا $u_1=2u_0+5=3$ ، $u_2=2u_1+5=2\times 3+5=11$، و $u_3=2u_2+5=2\times 11+5=27$ و هكذا ...

مثال2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n$.

الحل2: لدينا $u_0=1$ و منه $u_1=3u_0=3$ ، $u_2=3u_1=9$، $u_3=3u_2=27$ و هكذا ...

✓ **ملاحظة:** في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

✓ **ملاحظة:** تعرف متتالية بعلاقة تراجعية كذلك بهذه الصيغة $\begin{cases}u_0=1,u_1=3\\u_{n+2}=2u_{n+1}+5u_n\end{cases}$

- نقترح أنشطة حول ظواهر متقطعة تؤدي إلى علاقات من النوع $u_n=f(n)$ أو $u_{n+1}=f(u_n)$.
- نحسب حدود متتالية بواسطة مجدول أو حاسبة بيانية.
- نقترح توضيحات بيانية مختلفة، بواسطة النقط $M_n(n;u_n)$ أو بواسطة النقط $M_n(u_n;u_{n+1})$ في حالة متتالية تراجعية، باليد أو بالحاسبة البيانية أو باستعمال البرمجيات.
- ندرج أمثلة لمتتالية غير رتيبة.
- نعتمد في دراسة اتجاه تغير متتالية على :
- اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.
- أو اتجاه تغير الدالة f حيث $u_n=f(n)$.
- أو على المقارنة بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و1 (في حالة ما إذا كانت المتتالية ذات إشارة ثابتة).

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ، **6** هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b \in \mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

❖ 2.1 تطبيقات:

تطبيق1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

✓ **ملاحظة:** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -3x^2 + 1$.

الهدف من التمرين التحكم في حساب حدود متتالية معرفة بهذا الشكل واستخدام الدليل الإستخدام الجيد

حـل: 1) $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ،

$u_3 = -3(3)^2 + 1 = -26$

$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$ ، $u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$.

2) $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

$u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$.

تطبيق2:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{3}{2+u_n}$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} . ثم ضع تخمينا.

✓ **ملاحظة:** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x) = \frac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0, +\infty[$ وبما أن $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

حـل:

1) $u_1 = \frac{3}{2+u_0} = \frac{3}{4}$ ، $u_2 = \frac{3}{2+u_1} = \frac{3}{2+\frac{3}{4}} = \frac{12}{11}$ ، $u_3 = \frac{3}{2+u_2} = \frac{3}{2+\frac{12}{11}} = \frac{33}{34}$.

2) الحاسبات تبين أن $u_{10} \approx 1$ ، $u_{11} \approx 1$ و $u_{12} \approx 1$.

نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة **1** إنطلاقا من $n = 10$.

نقترح أنشطة حول ظواهر متقطعة تؤدي إلى علاقات من النوع $u_n = f(n)$ أو $u_{n+1} = f(u_n)$.

- نحسب حدود متتالية بواسطة مجدول أو حاسبة بيانية.
- نقترح توضيحات بيانية مختلفة، بواسطة النقط $M_n(n; u_n)$ أو بواسطة النقط $M_n(u_n; u_{n+1})$ في حالة متتالية تراجعية، باليد أو بالحاسبة البيانية أو باستعمال البرمجيات.

- ندرج أمثلة لمتتالية غير رتيبة.

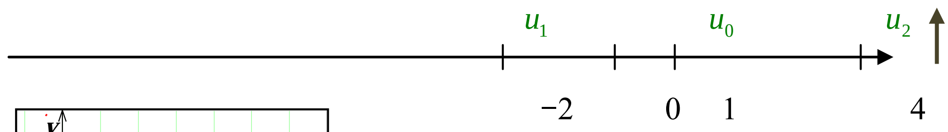
- نعتمد في دراسة اتجاه تغير متتالية على :
  - اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.
  - أو اتجاه تغير الدالة f حيث $u_n = f(n)$.
  - أو على المقارنة بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و1 (في حالة ما إذا كانت المتتالية ذات إشارة ثابتة).

2.1 التمثيل البياني لمتتالية عددية

1.2.1 متتالية معرفة بالحد العام:

- يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور

مثال: لتكن المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{\,n}=(-2)^n$.

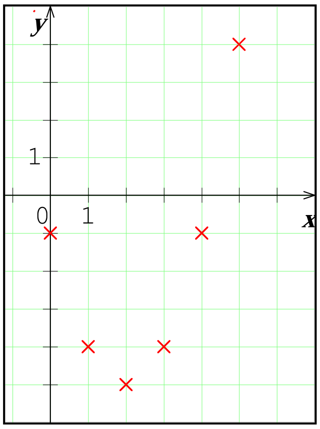


- يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).

مثال: لتكن المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{\,n}=n^2-4n-1$.

$\left(u_n\right)$معرفة كذلك $u_{\,n}=f\left(n\right)$ حيث:

$f:x\mapsto x^2-4x-1$ نعرف f على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $\left(n,f\left(n\right)\right)$

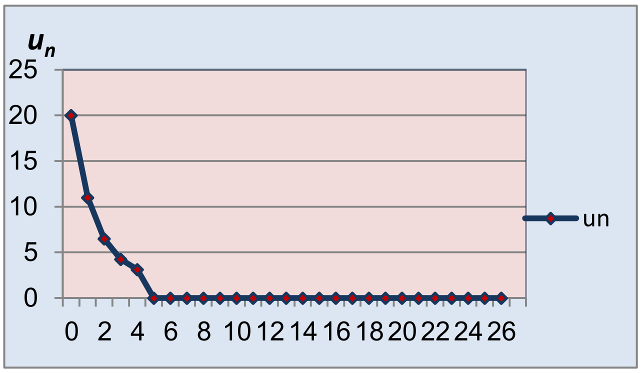


من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. مجموعة النقط $M\left(n,f\left(n\right)\right)$ هي التمثيل البياني للمتتالية $\left(u_n\right)$.

استخدام مجدول Excel:

أ– حساب حدود المتتالية (u_n) من أجل $n\in[0;26]$ ورسم تمثيلها البياني:

n	u_n
0	20
1	11
2	6.5
3	4.25
4	3.125
5	2.5625
6	2.28125
7	2.140625
8	2.070313
9	2.035156
10	2.017578
11	2.008789
12	2.004395
13	2.002197
14	2.001099
15	2.000549
16	2.000275



نقترح أنشطة حول ظواهر متقطعة تِؤدي إلى علاقات من النوع $u_n=f\left(n\right)$ أو $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

- نحسب حدود متتالية بواسطة مجدول أو حاسبة بيانية.
- نقترح توضيحات بيانية مختلفة، بواسطة النقط $M_n\left(n;u_n\right)$ أو بواسطة النقط $M_n\left(u_n;u_{n+1}\right)$ في حالة متتالية تراجعية، باليد أو بالحاسبة البيانية أو باستعمال البرمجيات.
- تدرج أمثلة لمتتاليات غير رتيبة.
- نعتمد في دراسة اتجاه تغير متتالية على :
  - اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.
  - أو اتجاه تغير الدالة f حيث $u_n=f\left(n\right)$.
  - أو على المقارنة بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ و1 (في حالة ما إذا كانت المتتالية ذات إشارة ثابتة).

2.2.1 متتالية معرفة بعلاقة تراجعية:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

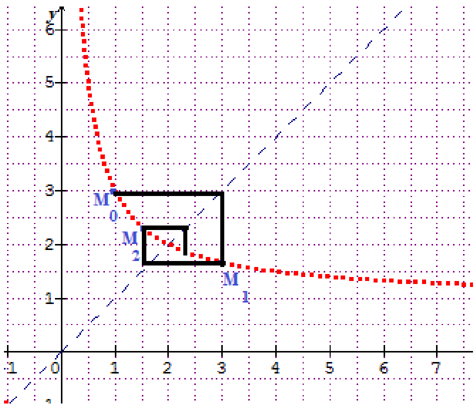
مجموعة النقط $M(u_n\,,f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية

تطبيق:

المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$ حيث n طبيعي

● مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J)

لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y=x$. لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n,u_{n+1})$ هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$



نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

3.1 أتجاه تغير متتالية عددية:

1.3.1 متتالية متزايدة

متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

2.3.1 متتالية متناقصة

متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

3.3.1 متتالية ثابتة

متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

مثال2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_n=n^2+2$ اثبت أنها متزايدة

$$\begin{cases} u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+2-n^2-2 \\ u_{n+1}-u_n=n^2+2n+4-n^2-2 \\ u_{n+1}-u_n=2n+2 \end{cases}$$

لاحظ بما ان $n\geq 0$ فان $2n+2\geq 0$ فهي متزايدة تماما

● ندرج الترميز بالدليل u_n ونسجل أنّ الإشارة إلى الترميز الدالي $u(n)$ (المستخدم في الحاسبات البيانية) وتوظيفه في بعض الأحيان يساعد التلميذ على استخدام هذه الحاسبات، حيث تظهر عندئذ المتتالية كدالة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ ونوضح الفرق بين المتتالية u والحد u_n الذي دليله n.

● نقترح أنشطة حول ظواهر متقطعة تؤدي إلى علاقات من النوع $u_n=f(n)$ أو $u_{n+1}=f(u_n)$.

● نحسب حدود متتالية بواسطة مجدول أو حاسبة بيانية.

● نقترح توضيحات بيانية مختلفة، بواسطة النقط $M_n(n;u_n)$ أو بواسطة النقط $M_n(u_n;u_{n+1})$ في حالة متتالية تراجعية، باليد أو بالحاسبة البيانية أو باستعمال البرمجيات.

● تدرج أمثلة لمتتالية غير رتيبة.

● نعتمد في دراسة اتجاه تغير متتالية على :

- اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

- أو اتجاه تغير الدالة f حيث $u_n=f(n)$.

- أو على المقارنة

3.3.1 متتالية رتيبة

المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 (في حالة ما إذا كانت المتتالية ذات إشارة ثابتة).

تطبيق1: لتكن المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_n = n^2+1$ ، $u_n = 2n-4$ ، $u_n = -5n+1$ أدرس اتجاه تغيرها .

الحل: $u_n = n^2+1$ لدينا $u_{n+1} = (n+1)^2+1 = n^2+2n+2$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = n^2+2n+2-n^2-1 = 2n+1$

$2n+1>0$ لأن n عدد طبيعي وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

خلاصة: لتكن (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$.

- (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \le u_{n+1}$.
- (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \ge u_{n+1}$.
- (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = u_{n+1}$.

طرق دراسة اتجاه تغير متتالية عددية :

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n) ، يمكن:

إما دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

إما مقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1 (بالنسبة إلى متتالية حدّها العام موجب تماما)

إما كتابة $u_n = f(n)$ ، ودراسة تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

تمرين محلول : ادرس اتجاه تغير المتتاليات المعرفة بما يلي:

$u_0 \in \mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{n}{2^n}$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{n^2+5n+5}{n+4}$

الحلّ:

1. لدراسة اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) نقوم بحساب الفرق $u_{n+1} - \quad_n$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \ge 0$

إذن: (u_n) متتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

2. بما أنّ الحدّ العام للمتتالية (v_n) موجب تماما من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، فلدراسة اتجاه تغيّرها يكفي حساب حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ومقارنته بالعدد 1.

لدينا: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$ وبما أنّ: $1 - \frac{n+1}{2n} = \frac{n-1}{2n} \ge 0$

نستنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $\frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$. إذن: (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

3. نضع: $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x+4}$. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

ومن أجل كل $x \ge 0$: $f'(x) = \frac{x^2+8x+15}{x+4^2}$ ، نستنتج أنه من أجل $x \ge 0$:

$f'(x) > 0$

وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. إذن: (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $n < n+1$ ومنه $f(n) < f(n+1)$ أي:

$w_n < w_{n+1}$).

❖ تمارين منزلية:

32 – (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بِـ :

$$u_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}$$

1) أحسب قيمة لكل من الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) جد تخمينا لعبارة مبسطة للحد u_n .

3) أحسب u_5 ، u_6 ، u_7 . هل تخمينك صحيح ؟

جد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل $n \geq n_0$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

الحل:

1) $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ، $u_2 = 4$ ، $u_3 = 8$ ، $u_4 = 16$

2) جد تخمينا لعبارة مبسطة للحد u_n نستنتج ان $u_n = 2^n$

3) $u_5 = 31$ ، $u_6 = 57$ ، $u_7 = 99$. تخمينك ليس صحيح .

المؤسسة: ثانوية رقان الجديدة
السنة الدراسية: 2014/2013
التاريخ:
توقيت الحصة :

المستوى: الثانية رياضيات
ميدان التعلم: التحليل
الوحدة التعلمية: المتتاليات
موضوع الحصة : المتتالية الحسابية

المكتسبات القبلية : عموميات حول المتتاليات مقرر السنة الماضية **الكفاءات القاعدية :** حساب الحد العام. حساب مجموع حدود. الوسط الحسابي التعرّف على متتالية حسابية. حساب الحد العام لمتتالية حسابية بدلالة n. حساب مجموع p حدًا متعاقبا من متتالية حسابية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	سير الحصة الإنجاز	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط
المتتاليات الحسابية

كيف نعرف ان متتالية ما حسابية ؟
لكي نعرف ان كانت متتالية حسابية يجب التفكير في العمليتين (الطرح و الجمع فقط)
مثال : هل المتتالية (1,3,5,7) متتالية حسابية ؟
الحل نعم لان:

نشاط 1: V متتالية تحقق : $V_0=-5$، ومن أجل كل n من N :
$3V_{n+1}-4V_n=-V_{n+1}+8$.
1/ عبر عن V_{n+1} بدلالة V_n من أجل كل n من N.
2/ أحسب الحدود: من V_1 إلى V_5
3/ أكتب الحدود السابقة بدلالة V_0
4/ هل يمكن استنتاج V_n بدلالة n و V_0 ؟

سير الحصة الإنجاز

2.المتتالية الحسابية

تعريف:

نقول أن المتتالية العددية (u_n) متتالية حسابية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=r$ يسمى r أساس المتتالية (u_n).

ملاحظة : إذا كان $r=0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول u_0 .

مثال: لدينا المتتالية العددية (u_n) حيث أن $u_n=3n-1$. اثبت انها حسابية عين الحد الأول u_0 و أساسها r.

الحل: لدينا $u_{n+1}-u_n=[3(n+1)-1]-[3n-1]=3n+3-1-3n+1=3$ و 3 عدد ثابت

اذن المتتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها العام $u_0=-1$

ملاحظة

يسمى r أساس المتتالية وهو عدد حقيقي يكون سالبا او موجبا اذا كان معدوم تصبح المتتالية ثابتة.

1.2 الحد العام لمتتالية حسابية

مبرهنة 1: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r.

لاحظ: $u_{n+1}-u_n=r$ ومنه

$$\begin{cases} u_1=u_0+r \\ u_2=u_1+r=u_0+2r \\ u_3=u_2+r=u_1+2r=u_0+3r \end{cases}$$

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr$ من أجل كل عدد طبيعي n

ملاحظات : إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n=u_1+(n-1)r$.

بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي الحد $u_n=u_p+(n-p)r$. تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n

مثال:

لدينا المتتالية الحسابية (u_n) حيث أن حدها الأول $u_0=3$ و أساسها $r=4$.

1- احسب u_1 ، u_2 ، u_3 . 2-اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

الحل:

$$u_1=u_0+r=3+4=7$$
$$u_2=u_1+r=u_0+2r=7+4=11$$
$$u_3=u_2+r=u_1+2r=u_0+3r=11+4=15$$

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr=3+4n$ اذا كان الحد الأول u_1

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

التعليمات والتوجيهات

- نعرف متتالية حسابية (أو هندسية) بواسطة حدّها الأول و عدد حقيقي r (أو q) يسمى أساس المتتالية.
- يمكن اقتراح تطبيقات من الحياة العملية لتنمية قدرة التلميذ على نمذجة الوضعيات.

تمرين منزلي: تمرين 64

$u_7=-1$ و $u_{24}=33$ ؛ أحسب حدها الأول u_0 وأساسها r

الحل:

$u_n=u_1+(n-1)r$ لما $u_{24}=u_7+(24-7)r$ أي ان $33=-1+(24-7)r$ ومنه $r=2$

حساب u_n أي $u_n=u_0+nr$ ومنه $u_7=u_0+14=-1$ ومنه $u_0=-15$

2.2 مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

مبرهنة 2:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r . ليكن المجموع :

$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n : .

$$S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

S يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول و الحد الأخير .

برهان: ليكن p عدد طبيعي أصغر من n ، لدينا $u_p=u_0+pr$ و $u_{n-p}=u_0+(n-p)r$.

و منه $u_p+u_{n-p}=u_0+u_0+nr=u_0+u_n$.

نكتب S بطريقتين ثم نجمع المساوتين طرف بطرف .

$$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$$

$$S=u_n+u_{n-1}+........+u_1+u_0$$

و منه $2S=u_0+u_n+u_1+u_{n-1}+......+u_{n-1}+u_1+u_n+u_0$

أي $2S=u_0+u_n+u_0+u_n+......+u_0+u_n+u_0+u_n$ بتطبيق $u_p+u_{n-p}=u_0+u_n$

و منه $2S=(n+1)(u_0+u_n)$ إذن $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$.

تطبيق: لدينا المتتالية الحسابية (u_n) حيث أن حدها الأول $u_0=2$ و أساسها $r=3$.

1- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

2- احسب الحد العاشر.

3- احسب مجموع العشرة حدود الأولى.

4- احسب المجموع. $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

الحل: 1- عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr=2+3n$ اذا كان الحد الأول u_1

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

2.الحد العاشر. $u_9=u_0+3\times9=2+3\times9=29$

3.احسب مجموع العشرة حدود الأولى. $S=u_0+u_1+........+u_9$ ومنه

$$S=(10)\left(\frac{u_0+u_9}{2}\right)=5(2+29)=155$$

4.احسب المجموع. $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

عدد الحدود هو $n+1$ حد الحد الأول هو $u_0=2$ وبما ان الحد الأخير هو بدلالة n أي

$u_n=2+3n$ اذن

ومنه $S=\frac{(n+1)}{2}(2+2+3n)=\frac{(n+1)}{2}(4+3n)$

مثال: (u_n) متتالية حسابية للاعداد الطبيعية غير المعدومة أحسب مجموع n حدا

الحل: $1+2+3+..........+n=n\left(\frac{n+1}{2}\right)$

تطبيق: لدينا المتتالية الحسابية (u_n) حيث أن حدها الأول $u_0=1$ و $u_2=8$.

5- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

6- احسب المجموع. $S=1+8+15+.........603$

الحل: حساب الأساس r لدينا $u_0=1$ و $u_2=8$

$u_n=u_p+(n-p)r$ ومنه $u_1=u_0+(1-0)r$ أي $8=1+r\Rightarrow r=7$

عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

بما أن المتتالية حسابية $u_0=1$ و $r=7$ فان $u_n=u_0+nr$ أي أن $u_n=1+7n$

نبحث عن الحد الذي قيمته هي 603

$u_n=1+7n=603$ أي أن $n=602/7$ ومنه $n=86$ أي آن

$S=u_0+u_1+........+u_{86}$ ومنه $S=(86+1)\frac{1+603}{2}=26274$

3.2 الوسط الحسابي لمتتالية حسابية

لتكن a.b.c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية اساسها r مأخوذة بهذا الترتيب فان:

$$\begin{cases} b=a+r \\ a=b-r \\ c=b+r \end{cases}$$ و منه $a+c=2b$

تطبيق:

عين الأعداد a.b.c علما انها بهذا الترتيب تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة حيث:

$$\begin{cases} a+b+c=15......................(1) \\ a\times b\times c=105......................(2) \end{cases}$$

الحل:

$a+c=2b$ أي $3b=15$ يعني ان $b=5$

$a=b-r=5-r$ و $c=5+r$

بتعويض في المعادلة 2 نجد:

$(5-r)5(5+r)=105$ ومنه $25-r^2=21$ أي ان $r=-2$ ....or.............. $r=2$

1- لما $r=2$ فان $\begin{cases} a=5-2=3 \\ b=5 \\ c=5+2=7 \end{cases}$ ولما – لما $r=-2$ فان $\begin{cases} a=5+2=7 \\ b=5 \\ c=5-2=3 \end{cases}$ وهذا مرفوض اذن

$r=2$

تطبيق:

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_7=10$ و $u_3=2$

1- احسب الأساس r والحد الأول u_1

2- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3- عين رتبة الحد الذي قيمته 16.

الحل:

1- المتتالية حدها الأول u_1 أي $u_n=u_1+(n-1)r$

ومنه $\begin{cases} u_7=u_1+6r=10 \\ u_3=u_1+2r=3 \end{cases}$ أي ان $r=2$ وبالتالي $u_1=10-12=-2$

2- $u_n=u_1+(n-1)r$ وبالتالي $u_n=u_1+(n-1)r=-2+2n-2=2n-4$

3- رتبة الحد الذي قيمته **16**: $u_n=2n-4=16$ ومنه $n=10$ أي ان $u_{10}=2n-4=16$

تمرين منزلي: تمرين **66 - 72**

تمرين 69- (u_n) متتالية حسابية حيث :

$u_{10}=16$ و $u_{15}=41$.

1- أحسب المجموع : $S=u_{10}+u_{11}+u_{12}+...+u_{29}$

تمرين 70 لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-1$ و $u_{n+1}=\frac{4}{4-u_n}$. ونعتبر المتتالية (v_n) حيث : $v_n=1/u_n-2$

1) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية عين حدها الأول وأساسها. **2)** عبر عن الحد العام v_n بدلالة n

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

الحل69: $r=5$ ومنه $u_{29}=111$ وبالتالي $S=20\left(\frac{u_{10}+u_{29}}{2}\right)=1270$

الحل70: (1 $v_{n+1}-v_n=-1/2$ و $v_0=-1/3$ (2 $v_n=-1/2n-1/3$. (3 $u_n=\frac{6n-2}{3n+2}$

تطبيق:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=-2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-3n+1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

- **أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

الحل:

بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذا حدها الأول هو v_0 ، $v_0=u_1-u_0$.

$u_1=u_0-3(0)+1=-1$ و منه $v_0=u_1-u_0=-1-(-2)=1$. لنحسب $v_{n+1}-v_n$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=-3n+1$. إذن : $v_n=-3n+1$

$v_{n+1}-v_n=-3(n+1)+1-(-3n+1)=-3$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}-v_n=-3$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-3$ و حدها الأول $v_0=1$

اثبت أن: $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

برهان: ليكن p عدد طبيعي أصغر من n ، لدينا $u_p=u_0+pr$ و $u_{n-p}=u_0+(n-p)r$.

و منه $u_p+u_{n-p}=u_0+u_0+nr=u_0+u_n$.

نكتب S **بطريقتين ثم نجمع المساويتين طرف بطرف .**

$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

$S=u_n+u_{n-1}+........+u_1+u_0$

و منه $2S=u_0+u_n+u_1+u_{n-1}+......+u_{n-1}+u_1+u_n+u_0$

أي $2S=u_0+u_n+u_0+u_n+......+u_0+u_n+u_0+u_n$ بتطبيق $u_p+u_{n-p}=u_0+u_n$

و منه $2S=(n+1)(u_0+u_n)$ إذن $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

طريقة: a و b عددان طبيعيان حيث $a<b$ عدد الحدود u_a ، u_{a+1} ، u_{a+2} ، . . . . ، u_b لمتتالية (u_n) هو: $b-a+1$

تطبيق:

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $r=-2$ ، و حدها الأول $u_0=204$.

- أحسب $S=u_{10}+u_{11}+........+u_{216}+u_{217}$.

الحل:

عدد الحدود هو $217-10+1=208$.

$u_{10}=u_0+10r=204-20=184$.

$u_{217}=u_0+217(-2)=-230$.

$$S=\frac{208}{2}(u_{10}+u_{217})$$
$$=104(184-230)=-4784$$

مثال: اوجد قيمة اذا علمت ان: 7.x.3 بهذا الترتيب هى حدود متتابعة لمتتالية حسابية عين اساسها

4.2 اتجاه تغير متتالية حسابية

مبرهنة لدراسة أتجاه تغير متتالية عددية حاسابية يكفي مراعاة إشارة r

- **متتالية متزايدة:** تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة إذا كان $r>0$
- **متتالية متناقصة:** تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة إذا كان $r<0$
- **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا كان $r=0$.

تطبيق: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-n$.

1. أحسب $u_{n+1}-u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل: 1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-(n^2-n)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.

2.من أجل كل عدد طبيعي n ، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تمرين منزلي: 10 ص 44

تطبيق: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_1=4$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=1/2u_n-1$. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

الحل: إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة الأولى: نتحقق من أن: $u_2\leq u_1$

لدينا $u_2=1/2u_1-1=1/2\times 4-1=1$ و منه $u_2\leq u_1$.

المرحلة الثانية: نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة الثالثة: نبرهن أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$.

لدينا $u_n \le u_{n+1}$. نحصل بضرب الطرفين في $1/2$ على $1/2u_{n+1} \le 1/2u_n$. نضيف (-1) إلى الطرفين لنجد: $1/2u_{n+1} - 1 \le 1/2u_n - 1$ أي $u_{n+2} \le u_{n+1}$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} \le u_n$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

نمذجة وضعية

يقترح أحمد عمر عقدين لكراء مسكن لمدة 8 سنوات . يدفع عمر $5000\,DA$ في السنة الأولى

1) في العقد الأول, ثمن الكراء يزداد كل سنة بقيمة ثابتة $150\,DA$. نضع u_n ثمن الكراء للسنة n

أ) أحسب الثمن u_2 .

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8 .

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

2) في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3% .

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب v_8.

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات .

3) ما هو العقد الذي يختاره عمر

الحل

أ) أحسب الثمن u_2 .

لدينا $u_1 = 5000\,DA$ ومنه $u_2 = u_1 + 150\,DA = 5150\,DA$

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8 .

نلاحظ انه دائما من اجل n عدد طبيعي فان $u_{n+1} = u_n + 150\,DA$ ومنه $u_{n+1} - u_n = 150$

وهي متتالية حسابية اساسها $r = 150$

لدينا $u_1 = 5000\,DA$ مباشرة $u_n = u_1 + (n-1)r$ أي

$$u_n = 5000 + (n-1)150 = 150n - 4850$$

ومنه $u_8 = 150 \times 8 - 4850 = 9600DA$

ث) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

يعني حساب مجموع ثمن سنوات وهو $S = u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_8$

اذن $S = u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_8 = {}^{8}\!/_{2}(u_1 + u_8) = 58400DA$

2) في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3% .

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2 .

لدينا $v_1 = 5000\,DA$ ومنه $v_2 = v_1 + 0,03v_1 = 1.03v_1 = 5150$

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1} = v_n + 0,03v_n = 1.03v_n$ اذن (v_n) متتالية هندسيةاساسها 1.03ومنه $v_n = v_1(1,03)^{n-1} = 5000(1,03)^{n-1}$ ،

$$v_8 = 5000(1,03)^7 = 6149.37DA$$

ت) $T = v_1 + v_2 + \dots + v_8 = \dfrac{(1,03)^8 - 1}{1,03 - 1} = 44461.68DA$

3)العقد الثاني اقل تكلفة اذن عمار يختار العقد الثاني

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة	المستـــــــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية: 2014/2013	ميدان التعـــــلم:التحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية:المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المتتالية الهندسية

المكتسبات القبلية : 　　الكفاءات القاعدية :.حساب الحد العام .حساب مجموع حدود .الوسط الحسابي

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	سير الحصة　　الإنجاز	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها:

نشاط

المتتاليات الهندسية

كيف نعرف ان متتالية ما هندسية ؟

لكي نعرف ان كانت متتالية هندسية يجب التفكير في العمليتين (الضرب و القسمة) فقط

متال : هل المتتالية (2,4,8,16) متتالية هندسية ؟

الحل نعم لان:

2*2 = 4

4*2 = 8

8*2 = 16

نشاط: V متتالية نشاط الحصة السابقة:

$\left(V_0 = \frac{1}{16}\right.$، ومن أجل كل n من N:

$\left(3V_{n+1} - 4V_n = V_{n+1}\right.$

أحسب العدين

$V_0 + V_1 + \ldots + V_7$،

$V_0 \cdot \frac{1-2^{7+1}}{1-2}$.

سير الحصة — الإنجاز:

3.المتتالية الهندسية

تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

يسمى q أساس المتتالية (u_n).

مثال: لدينا المتتالية العددية (u_n) حيث أن $u_n = 3^n \times 2$. اثبت انها هندسية عين الحد الأول u_0 و أساسها q.

الحل: لدينا $= 3^n \times 2 \times 3 = \left[3^{(n+1)} \times 2\right] = u_{n+1}$ اذن المتتالية هندسية أساسها $q = 3$

حدها الاول $u_0 = 2$

1.3 الحد العام لمتتالية هندسية

تعريف: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q.

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n = u_0 \times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 أساسها q.

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

بصفة عامة إذا كان u_p (p عدد طبيعي أصغرمن n) الحد الأول فإن عبارة الحد العام $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.

ملاحظات: إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

بصفة عامة إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p،

تطبيق: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 أساسها q موجب تماما حيث : $u_1 = 2$ و $u_3 = 18$

1- أوجد الأساس q

2- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3- عين العدد الطبيعي n بحيث $u_n = 162$

الحل:

1- (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 أي $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ومنه $u_3 = u_1 \times q^2$ و منه

$q^2 = 18/2 = 9$

اذن $q = 3$ لأن $q = -3$ مرفوض

2- عبارة الحد العام u_n بدلالة n. لدينا $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ اذن $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

3- العدد الطبيعي n بحيث $u_n = 162$

$u_n = 2 \times 3^{n-1} = 162$ ومنه $3^{n-1} = 162/2 = 81$ نجد $3^{n-1} = 3^4$ معناه $n - 1 = 4 \to n = 5$

التعليمات والتوجيهات:

● نعرف متتالية حسابية (أو هندسية) بواسطة حدّها الأول و عدد حقيقي r (أو q) يسمى أساس المتتالية.

يمكن اقتراح تطبيقات من الحياة العملية لتنمية قدرة التلميذ على نمذجة الوضعيات..

• نعرف متتالية حسابية (أو هندسية) بواسطة حدّها الأول و عدد حقيقي r (أو q) يسمى أساس المتتالية. يمكن اقتراح تطبيقات من الحياة العملية لتنمية قدرة التلميذ على نمذجة الوضعيات..

2.3 مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

تعريف:

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن: المجموع $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

بصفة عامة:

$$S=(\text{الحد الأول})\times\frac{1-\text{الأساس أس عدد الحدود}}{1-\text{الأساس}}.$$

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$

مثال: (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.

أحسب، بدلالة n، المجموع $S=v_1+v_2+........+v_n$

الحل:

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

$S=v_1+v_2+........+v_n=v_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S=3\times\frac{1-2^n}{1-2}=-3(1-2^n)=3(2^n-1)$

تطبيق:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=2$ أساسها $q=-3$.

1− اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

2− احسب الحد الخامس.

3− احسب مجموع الخمس حدود الأولى لهذه المتتالية.

الحل:

1− (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أي $u_n=u_0\times q^n$ ومنه $u_n=2\times(-3)^n$

2− الحد الخامس $u_n=2\times 3^4=162$.

3− مجموع الخمس حدود الأولى لهذه المتتالية

إذا كان $q\neq 1$ فإن $S=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$S=2\left(\frac{1-(-3)^5}{1+3}\right)=2\left(\frac{244}{4}\right)=122$$

3.3 الوسط الهندسي:

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c .

نتيجة : في متتالية هندسية جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط

تطبيق:

عين الأعداد a.b.c علما انها بهذا الترتيب تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q:

$$\begin{cases} a+b+c=26.......................(1) \\ a\times b\times c=216......................(2) \end{cases}$$

الحل:

$a\times c=b^2$ أي $b^3=216=6^3$ يعني ان $b=6$

$\begin{cases} a+c=20..............(3) \\ a\times c=36................(4) \end{cases}$ أي $a=-c+20$ نعوض في 4 نجد $20c-c^2-36=0$ اذن

$\Delta=256\to\sqrt{\Delta}=16$ ومنه

$c_1=18.,c_2=2$ لما $c_2=2$ يعني $a=18..;.b=6$ لما $c_2=18$ يعني $a=2..;.b=6$

تمرين منزلي:

تمرين 83. الأعداد الحقيقية a ، b ، c هي حدود متتابعة من متتالية هندسية وتحقق :

$a+b+c=21$ و $2a+b=27+c$.

أحسب قيمة لكل من الأعداد a ، b ، c .

تمرين 84.

لتكن الأعداد الحقيقية a ، b ، c التي تحقق الشروط التالية :

a ، b ، c في هذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية .

b ، c ، a في هذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية .

$a+b+c=18$.

1) أحسب قيمة الأعداد a ، b ، c .

2)عين قيمة أساس المتتالية الهندسية

تمرين 81.

(u_n) متتالية هندسية . هل (u_n) رتيبة ؟

إذا أجبت بنعم أكد إتجاه تغيرها في كل حالة من الحالات التالية :

1) $u_n=-5\times3^n$. 2) $u_n=\frac{4^{n-2}}{7^{n+2}}$. 3) $u_n=\frac{\sqrt{5}}{3^{2n}}$. 4) $u_n=\frac{1}{2}(-3)^n$.

5) $u_n=-\sqrt{3^n}$. 6) $u_n=\frac{(-4)^n}{5}$.

حل التمرين المنزلي: **تمرين 81.**

1- $u_{n+1}-u_n=-5\times3^n\times3+5\times3^n=5\times3^n(-2)$ وبالتالي $5\times3^n(-2)\le0$ أي $u_n=-5\times3^n$ متناقصة تماما.

2- $u_{n+1}=\frac{4^n\times4^{-1}}{7^n\times7^3}$ و $u_n=\frac{4^{n-2}}{7^{n+2}}=\frac{4^n\times4^{-2}}{7^n\times7^2}$ اذن $\frac{1}{7^2\times4^2}\le\frac{1}{7^3\times4}=u_{n+1}$ ومنه u_n متناقصة تماما.

3-متناقصة تماما. 4- ليست رتيبة 5-متناقصة تماما 6- ليست رتيبة

• نعرف متتالية حسابية (أو هندسية) بواسطة حدّها الأول و عدد حقيقي r (أو q) يسمى أساس المتتالية. يمكن اقتراح تطبيقات من الحياة العملية لتنمية قدرة التلميذ على نمذجة الوضعيات..

4.3 اتجاه تغير متتالية هندسية:

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها q.

نعلم أن $u_{n+1}=u_0q^{n+1}$ و $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}-u_n=u_0q^n(q-1)$ و منه:

- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.
- إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q<0$ فإن الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة

و منه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

تطبيق: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-n$.

1. أحسب $u_{n+1}-u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-(n^2-n)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تطبيقات:1 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=4u_n+6$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n+2$.

1- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

الحل: بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذن حدها الأول هو

$v_0=u_0+2=5$. نكتب v_{n+1} بدلالة v_n. $\begin{cases} v_{n+1}=u_{n+1}+2=4u_n+8 \\ \quad =4(u_n+2)=4v_n \end{cases}$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=4v_n$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ و حدها الأول $v_0=5$

2 (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $q=\frac{1}{2}$ ، و $u_5=\frac{1}{32}$.

1- أحسب u_{2007} .

2- أحسب $S=u_0+u_1+........+u_{28}+u_{29}$.

الحل: نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

إذا $\frac{1}{2^{2007}}=\frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}=u_{2007}=u_5\times q^{2007-5}$.

نعلم أنه إذا كان $q\neq 1$ لدينا $S=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و و منه $S=2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)$

- نعرف متتالية حسابية (أو هندسية) بواسطة حدّها الأول و عدد حقيقي r (أو q) يسمى أساس المتتالية.
يمكن اقتراح تطبيقات من الحياة العملية لتنمية قدرة التلميذ على نمذجة الوضعيات..

نمذجة وضعية

اشترت سلوى غسالة ب 40000 دينار وبعد مرور سنة اصبح ثمنها هو $3/4$ من ثمن الشراء بعد مرور سنة اخرى اصبح ثمنها هو $3/4$ من ثمنها الاول وهكذا بعد كل سنة يصبح ثمنها هو $3/4$ من ثمنها السنة السابقة

1- حدد ثمن الشراء بعد مرور سنتين

2- حدد ثمن الشراء بعد مرور 3 سنوات

3- حدد ثمن الشراء بعد مرور n سنة بدلالة n

4- في اي ستة يصبح ثمن الغسالة 10000

الحل :

نرمز للثمن ب p الثمن الابتدائي هو p_0

خلال السنة الاولى $p_1 = \frac{3}{4}p_0 = 40000 \times \frac{3}{4} = 30000$

خلال السنة الثانية $p_2 = \frac{3}{4}p_1 = 30000 \times \frac{3}{4} = 22500$

خلال السنة الثالثة $p_3 = \frac{3}{4}p_2 = 22500 \times \frac{3}{4} = 16875$

خلال السنة الرابعة $p_4 = \frac{3}{4}p_3 = 16875 \times \frac{3}{4} = 12656.25$

بعد مرور n سنة بدلالة n.

لاحظ ان

$$\begin{cases} p_1 = \frac{3}{4}p_0 \\ p_2 = \frac{3}{4}p_1 \\ p_3 = \frac{3}{4}p_2 \\ p_4 = \frac{3}{4}p_3 \end{cases}$$

وهكذا نستنتج $p_n = \frac{3}{4}p_{n-1}$

نضرب الاطراف نجد

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times ....p_n = p_0 \frac{3}{4}p_1 \times \frac{3}{4}p_2 \times \frac{3}{4}p_3 \times \frac{3}{4}p_4 \times .... \frac{3}{4}p_{n-1}$$

ومنه $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times ....p_n = p_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times ....p_{n-1}$

اذن $p_n = p_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ حد عام لمتتالية هندسية حدها الاول p_0 اساسها $q = \frac{3}{4}$

يصبح ثمن السيارة 10000 لما $10000 = 40000\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أي $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{10000}{40000}$ ومنه $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}$ نستعمل اللوغارثم نجد $n = 5$ بعد خمس سنوات

- نعرف متتالية حسابية (أو هندسية) بواسطة حدّها الأول و عدد حقيقي r (أو q) يسمى أساس المتتالية.
يمكن اقتراح تطبيقات من الحياة العملية لتنمية قدرة التلميذ على نمذجة الوضعيات..

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة السنة الدراسية: 2014/2013 التاريـــــــخ: توقيت الحصة :	المستــــــــوى:الثانية رياضيات ميدان التعـــلم:التحليل الوحدة التعلمية:المتتاليات موضوع الحصة : المتتالية الهندسية

المكتسبات القبلية : الكفاءات القاعدية :.توظيف متتالية في الحياة الواقعية

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز سير الحصة	التعليمات والتوجيهات
نشاط	(see below)	

5.توظيف متتالية

في أول جانفي 2005 ، بلغ عدد سكان إحدى المدن 100 000 نسمة.

ملاحظة: (الفرعان 1 و 2 مستقلان)

1. نفرض أن عدد سكان هذه المدينة يرتفع سنويا بنسبة قدرها 3% و نرمز بِ u_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة u_0 ؟ أحسب u_1 و u_2.

قيمة u_0 لدينا $n=0$ اي ابتداءا من $2005+n$

عدد السكان $u_0=100\ 000+3000\times 0=100\ 000$

قيمة u_1 لدينا $n=1$ اي ابتداءا من $2005+1=2006$ تتم الزيادة ب 3%

في وجود الزيادة نقوم بضرب المقدار في $1+{}^{a}\!/_{100}$ حيث $a\%=3\%$ نسبة الزيادة ومنه

$$1+{}^{a}\!/_{100}=1+{}^{3}\!/_{100}=1.03$$

$$u_1=100000\times 1,03=103\ 000$$

قيمة u_2 لدينا $n=2$ اي ابتداءا من $2005+2=2007$ تتم الزيادة دائما ب 3% بالنسبة للسنة الماضية اي 2006 ومنه نقوم بضرب قيمة السكان ل 2006 في نسبة الزيادة

وبالتالي $u_2=u_1\times 1.03=103\ 000\times 1.03=106090$

- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,03\times u_n$. استنتج طبيعة المتتالية (u_n).

برهان ان $u_{n+1}=1,03\times u_n$ لدينا:

$$u_1=u_0\times 1,03=103\ 000$$

$$u_2=u_1\times 1.03=106090$$

وبالتالي فان $u_{n+1}=u_n\times 1,03$

استنتج طبيعة المتتالية (u_n).

بما انها من الشكل $u_{n+1}=q\times u_n$ فانها هندسية اساسها $q=1,03$

- عبر بدلالة n عن u_n.

المطلوب عبارة الحد العام

$u_0=100\ 000$ **و** $q=1,03$ **ومنه** $u_n=100000\times(1.03)^n$

- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).

قيمة u_0 لدينا $n=0$ اي ابتداءا من $2005+n$

ومنه 2025 هو $2005+20$ اي $n=20$ وبالتالي نقوم بحساب u_{20}

$u_{20}=100000\times(1.03)^{20}=180611$

- باستعمال حاسبة بيانية عين ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

نبحث عن قيمة n اي ان $u_n=100000\times(1.03)^n=200\,000$ ومنه $(1.03)^n=2$ ومنه $\ln(1.03)^n=\ln 2$ اي $n\cdot\ln(1.03)=\ln 2$ اذن $n=\ln(1.03)/\ln 2\simeq 24$ اي سنة 2029

2. نفرض أن عدد الوفيات هو نفسه عدد الولادات بهذه المدينة إلا أنه و نظرا لنشاطها الاقتصادي المتميز فإن 5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.

نرمز بِ v_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة v_0 ؟ أحسب v_1 و v_2.

5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.يعني زيادة كل سنة

v_0 هو عدد سكان الابتدائي وهو 100 000 نسمة.في $2005+0$

ومنه $v_0=100\,000$

v_1 هو عدد سكان الابتدائي ل $2005+0$ زائد 5000 في $2005+1=2006$

ومنه $v_1=v_0+5000=105000$

v_2 هو عدد سكان ل 2006 زائد 5000 وهو $105\,000+5000$ نسمة.في $2005+2=2007$

ومنه $v_2=v_1+5000=110000$

- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n. استنتج طبيعة المتتالية (v_n).

من خلال ماسبق نستنتج ان $v_1=v_0+5000=105000$ **و** $v_2=v_1+5000=110000$

اذن عموما نتحصل على $v_{n+1}=v_n+5000$ **وبالتالي المتتالية** (v_n) **هي من الشكل** $v_{n+1}=v_n+r$ **هي صيغة متتالية حسابية اساسها** $r=5000$

- عبر بدلالة n عن u_n.

لدينا $v_0=100\,000$ **و** $r=5000$ **ومنه** $v_n=v_0+nr=100000+5000n$

- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).

في 2010 اي $2005+5$ وبالتالي $n=5$ نحسب $v_5=100000+5000\times 5=125000$

- ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

$100000+5000n=200\,000$ **ومنه** $n=20$ **وبالتالي السنة هي** $2005+n$ **أي** 2025

المتتالية (u_n)	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بإضافة نفس العدد الثابت (الأساس)	ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بالضرب بنفس العدد الثابت (الأساس)
الحدّ العام		
خاصية ثلاثة حدود متتابعة	$a + c = 2b$	$a \times c = b^2$
المجموع		

المؤسســـــــــة: ثانوية رقان الجديدة	المستــــــــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية: 2014/2013	ميدان التعـــــلم:التحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية:المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : نهاية متتالية :النهاية غير المنتهية لمتتالية

الكفاءات القاعدية :.حساب نهاية متتالية عددية حساب نهاية متتالية باستعمال نظريات الحد الأعلى، الحد الأدنى والحصر، في حساب النهايات.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	سير الحصة الإنجاز	التعليمات والتوجيهات

4.نهاية متتالية عددية

1.4 متتالية عددية متقاربة

تعريف:

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة. ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

(حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظة:

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة

إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

تعريف نهاية منتهية لمتتالية عند مالا نهاية

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ، أو إنها تقبل l نهاية لها عندما يؤول n إلى $+\infty$، إذا كان من أجل كل مجال مفتوح يشمل l فإنه يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة. ونكتب: $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

مثال:

(u_n)متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \dfrac{2\sin n + 3}{n+1}$

أحسب نهاية المتتالية (u_n).

الحلّ:

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-1 \le \sin n \le +1$

بضرب الأطراف الثلاثة بالعدد 2 نحصل على: $-2 \le 2\sin n \le +2$

وبإضافة العدد 3 إلى الأطراف الثلاثة نجد: $1 \le 2\sin n + 3 \le 5$

وبقسمة جميع الحدود على العدد ينتج: $\dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{2\sin n+3}{n+1} \le \dfrac{5}{n+1}$

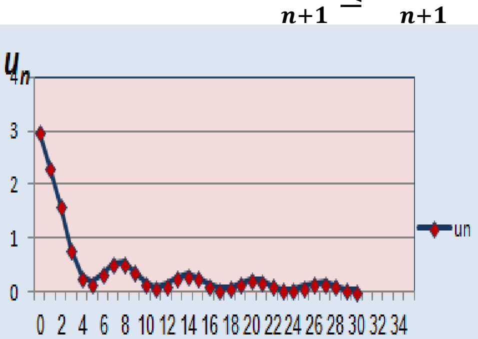
وبما أن: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n+1} = 0$ وحسب نظرية الحصر

نستنتج أن:

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2\sin n+3}{n+1} = 0$ أي

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

إذن: المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 0.



نختار أمثلة بسيطة يقود حساب الحدود المتتابعة لها إلى هذا التخمين(*) نستعمل التعريف التالي: نقول عن متتالية إنّها متقاربة نحو l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة . (*) نضع حيز التطبيق هذا التعريف في الحالات البسيطة ونعطي على الأقل مثالا على عدم تقارب متتالية.نطبق على المتتاليات النهايات المشابهة المتعلقة بنهايات الدوال (*)

نختار أمثلة بسيطة يقود حساب الحدود المتتابعة لها إلى هذا التخمين(*) نستعمل التعريف التالي: نقول عن متتالية إنّها متقاربة نحو l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة . (*) نضع حيز التطبيق هذا التعريف في الحالات البسيطة ونعطي على الأقل مثالا على عدم تقارب متتالية.نطبق على المتتاليات النهايات المشابهة المتعلقة بنهايات الدوال (*)

مثال:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\frac{1}{n}$.

باستعمال التعريف ، أثبت أن نهاية (u_n) هي **0** .

الحل:

لنبرهن على هذا .ليكن مجال $]\alpha,\beta[$ يشمل **0** .ليكن عدد طبيعي p حيث :

$p>\frac{1}{\beta}$ و $p>-\frac{1}{\alpha}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n $(n\geq p)$

لدينا $\frac{1}{n}<\frac{1}{p}$ و $\alpha<-\frac{1}{p}$ و $\frac{1}{p}<\beta$ إذا $\alpha<\frac{1}{n}<\beta$ ومنه إبتداءا من الرتبة p $\alpha<u_n<\beta$

و بالتالي. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

<u>تعريف اخر</u> القول أن نهاية ا (u_n) عند $+\infty$ هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $n>B$ يكون $0\leq|(u_n)-l|<e$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=l$

2.4 نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة

مبرهنة 1:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\frac{3n+1}{n+2}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ :

$f(x)=\frac{3x+1}{x+2}$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

<u>تمرين محلول :</u> ادرس اتجاه تغير المتتالياة المعرفة بما يلي:

.1 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\frac{n^2+5n+5}{n+4}$

<u>الحل :</u> نضع: $f(x)=\frac{x^2+5x+5}{x+4}$. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

من أجل كل $x\geq 0$: $f'(x)=\frac{x^2+8x+15}{x+4^2}$ ، نستنتج أنه من أجل كلّ $x\geq0$: $f'(x)\geq0$

وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على$\mathbb{R}_+$. <u>إذن:</u> (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $n<n+1$ ومنه $f(n)<f(n+1)$ أي: $w_n<w_{n+1}$).

3.4 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية

تعاريف

(u_n) متتالية عددية .

- المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $(\alpha\in\mathbb{R})$ $]-\infty,\alpha[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

مثال 1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=n^2$. ليكن α عدد حقيقي . n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $n^2\in]\alpha,+\infty[$ إبتداءا من $n\geq n_0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

مثال 2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=-n^2-1$. ليكن α عدد حقيقي . n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2-1)\in]-\infty,\alpha[$ إبتداءا من $n\geq n_0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n)

الحل: نحول العبارة $u_n=\dfrac{n^2+3n+1}{2n+3}$. ومنه

$$u_n=\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=n\times\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty}2+\frac{3}{n}=2$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .

مبرهنة 2:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

ملاحظة: لا نتكلم عن تقارب المتتالية (u_n) إلا إذا كانت نهايتها محدودة (عدد حقيقي ثابت) أما إذا كانت نهايتها غير محدودة ($\infty +$ أو $\infty -$) أو لا تقبل نهاية ففي هذه الحالة نقول إن المتتالية (u_n) متباعدة.

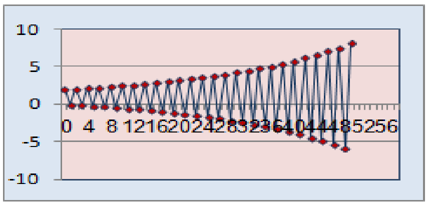
نستعمل التعريف التالي: نقول عن متتالية إنّها متقاربة نحو l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة . (*)
نضع حيز التطبيق هذا التعريف في الحالات البسيطة ونعطي على الأقل مثالا على عدم تقارب متتالية.نطبق على المتتاليات النهايات المشابهة المتعلقة بنهايات الدوال (*)

مثال:

$w_n = 1 + (-1.04)^n$

(w_n) لا تقبل نهاية

(w_n) متباعدة



المتتالية المحدودة

- نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq M$.
- نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي m إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq m$.
- نقول عن متتالية إنها محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.
- كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة.

مثال: (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $u_n = \frac{1-\sin n}{2}$

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq \sin n \leq +1$

بضرب الأطراف الثلاثة بالعدد -1 نحصل على: $-1 \leq -\sin n \leq +1$

بإضافة العدد $+1$ إلى الأطراف الثلاثة ينتج: $0 \leq 1 - \sin n \leq +2$

بقسمة كل الأطراف على العدد 2 نجد: $0 \leq \frac{1-\sin n}{2} \leq 1$ أي: $0 \leq u_n \leq 1$

إذن: المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومن الأسفل بالعدد 0.

في هذه الحالة نقول إن المتتالية (u_n) محدودة.

تمرين محلول :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1) \end{cases}$$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.
3. أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1، استنتج أن (u_n) متقاربة ثم أوجد نهايتها.

الحلّ:

1. حساب $_1$ و u_2 : $u_1 = \frac{5}{8}$ و $u_2 = \frac{89}{128}$.
2. إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1) - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1)$

نستعمل التعريف التالي: نقول عن متتالية إنّها متقاربة نحو l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة . (*) نضع حيز التطبيق هذا التعريف في الحالات البسيطة ونعطي على الأقل مثالا على عدم تقارب متتالية.نطبق على المتتاليات النهايات المشابهة المتعلقة بنهايات الدوال (*)

وبما أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\frac{1}{2}(u_n-1)^2 \geq 0$ فإن $u_{n+1}-u_n \geq 0$

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3. إثبات أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 :

تذكير: نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كان: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq M$.

4.4 نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

مبرهنة1: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \leq u_n \leq w_n$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

برهان: ليكن D مجالا يشمل l ، D يشمل كل حدود المتتالية (v_n) انطلاقا من n_1 و D يشمل كل حدود المتتالية (w_n) انطلاقا من n_2 . ليكن n_3 أكبر العددين n_1 و n_2 ، D يشمل كل حدود (v_n) و (w_n) انطلاقا من n_3

و بما أن $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن D يشمل كل حدود المتتالية (u_n) انطلاقا من n_3 . و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

مبرهنة2: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

برهان: ليكن $]\alpha,+\infty[$ مجالا . $]\alpha,+\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (v_n) و بما أن $u_{n_0} \geq v_{n_0}$ فإن المجال $]\alpha,+\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (u_n) معينة p ، من أجل $n \geq n_0$ ، $u_n \geq v_n$ ليكن q الأكبر من بين p و n_0. إذا كان $n \geq q$ فإن $v_n \in]\alpha,+\infty[$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

مبرهنة3: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

برهان: نفس البرهان مع المبرهنة 2 بوضع $u_n = -U_n$ و $v_n = -V_n$.

مثال: $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \frac{4n}{2n+3}$.

- عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

حل: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{2n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\left(2+\frac{3}{n}\right)} = 2$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

مثال:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n + \sin(n)$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: نعلم من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sin(n) \geq -1$.

إذا $u_n \geq n-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و العلاقة : $u_{n+1}=1+\frac{2}{5}u_n$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=u_n-5/3$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: 1) لنحسب v_{n+1}.

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{5}{3}=1+\frac{2}{5}u_n-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\left(u_n-\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{5}v_n$$

إذا أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=u_0-\frac{5}{3}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

2) أساس المتتالية هو $q=\frac{2}{5}$.

$-1<\frac{2}{5}<1$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{5}{3}$ لأن $u_n=v_n+\frac{5}{3}$

دراسة متتالية تراجعية

تمرين: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث أن: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن المتتالية (u_n)

المعرفة بحدها الأول $u_0=a$ $(a\in\mathbb{R})$، و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2$.

الجزء الأول : نفرض $a=\frac{7}{4}$.

1) أدرس إشارة $\frac{1}{2}x^2-x$.

2) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,2[$ ، $0\leq\frac{1}{2}x^2\leq x\leq 2$.

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4) باستعمال الرسم المقابل عين التمثيل البياني للمتتالية (u_n).

5) هل هذا التمثيل البياني يوحي باتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

6) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة .

قارن بين تغيرات الدالة f و اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الجزء الثاني : نفرض $a=4$.

1) بين أنه إذا كان $x>2$ فإن $f(x)>2$ استنتج أن $u_n>2$.

2) بين أن (u_n) متزايدة .

الجزء الثالث : نفرض $a=2$.

3) أحسب $f(2)$.

4) بين أن (u_n) متتالية ثابتة .