مذكرة رقم: 7

التحضير للبكالوريا

السنة الدراسية 2016/ 2017	المستوى : الثانية رياضيات وعلوم تجريبية	اعداد الاستاذ يوسفي عبد الرحمن

المحور السابع النهايات limites

كفاءات المحور

الكفاءة المستهدفة

- نهاية منتهية لدالة
- نهاية غير منتهية لدالة
- حساب نهاية دالة ناطقة
- التفسير البياني لنهاية
- المستقيم مقارب يوازى أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيم معلوم هو مستقيم مقارب.البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- إستعمال النظريات الأولية (المجموع ،الجداء ،المقلوب وحاصل) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعين .
- حساب النهايات وتطبيقاته في دراسة الدوال.

المكتسبات القبلية

- الدوال العددية

سير الدرس	التوقيت
النهـايات :	
حساب النهايات .	1 سا
النهايات والسلوك التقاربي .	2 سا
معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$	1 سا
	1 سا
النهـايات :	
تطبيقات على النهايات	2 سا
المبرهنات الأولية في حساب النهايات .	1 سا
	1 سا

وسائل التحضير	الوسائل البياغوجية	نقد ذاتي
دليل الأستاذ الكتاب المدرسي المنهاج الهباج في الرياضيات	السبورة	

المؤسســـــة:	المســـــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :نهاية دالة

المكتسبات القبلية : حساب نهاية دالة ناطقة عندما يؤول x إلى a ، حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدّالة.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 1

نعتبر الدوال $f;g;h$ حيث

$f(x)=x^2-3x+1$

$g(x)=-x^2+3$

$h(x)=\dfrac{3}{x-2}$

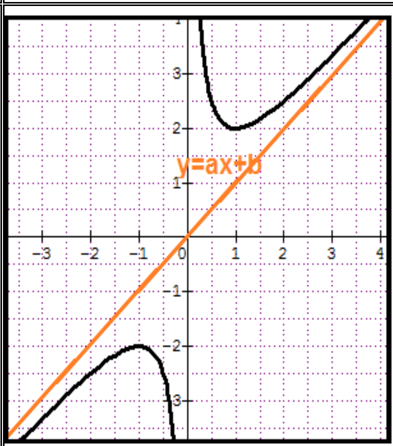
اوجد مجموعة تعريف كل دالة

اختر قيم ل x قريبة من 1 بالقدر الكافي

اختر قيم ل x كبيرة بالقدر الكافي واحسب صورها بواسطة كل من $f;g;h$

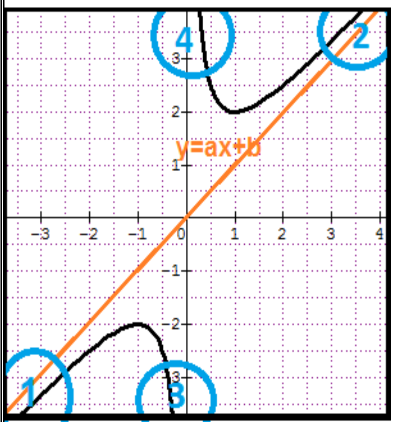
نشاط رقم 1

نعتبر الدالة f المعرفة بتمثيلها البياني (c_f) في المعلم م م الشكل المقابل $(o;\vec{i};\vec{j})$



1. من خلال المنحنى ماهو تخمينك حول $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$
2. شكل جدول التغيرات

نشاط رقم 1 الحل



الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ اي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

التخمين حول النهايات

الحالة 1 نلاحظ عندما تتجه قيم x نحو $-\infty$ فان (c_f) يتجه نحو $-\infty$ ومنه نقول لما x يؤول الى $-\infty$ فان $f(x)$ تساوي $-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ والمنحنى (c_f) يقارب المستقيم $y=ax+b$ بجوار $-\infty$

الحالة 2 نلاحظ عندما تتجه قيم x نحو $+\infty$ فان (c_f) يتجه نحو $+\infty$ ومنه نقول لما x يؤول الى $+\infty$ فان $f(x)$ تساوي $+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ والمنحنى (c_f) يقارب المستقيم $y=ax+b$ بجوار $+\infty$

الحالة 3

نلاحظ عندما تتجه قيم x نحو 0 سالب فان (c_f) يتجه نحو $-\infty$ ومنه نقول لما x يؤول الى 0 فان $f(x)$ تساوي $-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ والمنحنى (c_f) يقارب المستقيم $x=0$

الحالة 4

نلاحظ عندما تتجه قيم x نحو 0 موجب فان (c_f) يتجه نحو $+\infty$ ومنه نقول لما x يؤول الى 0 فان $f(x)$ تساوي $+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ والمنحنى (c_f) يقارب المستقيم $x=0$

جدول التغييرات

x	$-\infty$ 1- 0	1 $+\infty$
f `(x)	+ 0 -	- 0 +
f(x)	$-\infty$ ↗ 1- ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1 ↗ $+\infty$

- نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $|x|\to+\infty$ ثم عندما $x\xrightarrow{<}x_0$ ثم عندما $x\xrightarrow{>}x_0$.
- يقتصر تطبيق تعريف النهاية، باستعمال المجالات، على أمثلة للدوال المرجعية كتفسير للمقاربة التجريبية والحدسية للمفهوم.

في كل الحالات تعطى مجموعة تعريف الدالة

نشاط رقم 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{(x+1)^2}$

المنحنى (c_f) الممثل للدالة f في المعلم م م $(o;\vec{i};\vec{j})$ وليكن المستقيم $(\Delta): y=x$

1. ادرس اشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]$
2. استنتج الوضع النسبي بين (c_f) و (Δ)
3. ارسم (Δ) ثم انطلاقا من جدول التغيرات التالي انشئ (c_f)

x	$-\infty$	2-		1-	0	1/2	$+\infty$
f `(x)	+	0	-	‖	+		
f(x)	$-\infty$ ↗	3 -	↘ $-\infty$	‖ $-\infty$ ↗	1-	0	↗ $+\infty$

نشاط رقم 2 الحل

اشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]$

لدينا $\left[f(x)-y\right]=\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{(x+1)^2}-(x)$ ومنه $\left[f(x)-y\right]=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$

المقام موجب لوجود التربيع اذن اشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]$ هي من اشارة -1

نستنتج ان $\left[f(x)-y\right]<0$

الوضع النسبي بين (c_f) و (Δ) بما ان $\left[f(x)-y\right]<0$ فان المنحنى (c_f) يقع تحت (Δ)

4. رسم (Δ) ثم انطلاقا من جدول التغيرات التالي انشئ (c_f)

من خلال الجدول المنحنى يقبل قيمة حدية كبرى عند النقطة $A(-2;-3)$

ويقطع محور الفواصل عند النقطة $A(1/2;0)$ ومحور التراتيب عند $C(0;-1)$

عندما تكون قيم x عند $-\infty$ فان

1/ $f(x)$ تكون عند $-\infty$

عندما تكون قيم x عند 0 فان

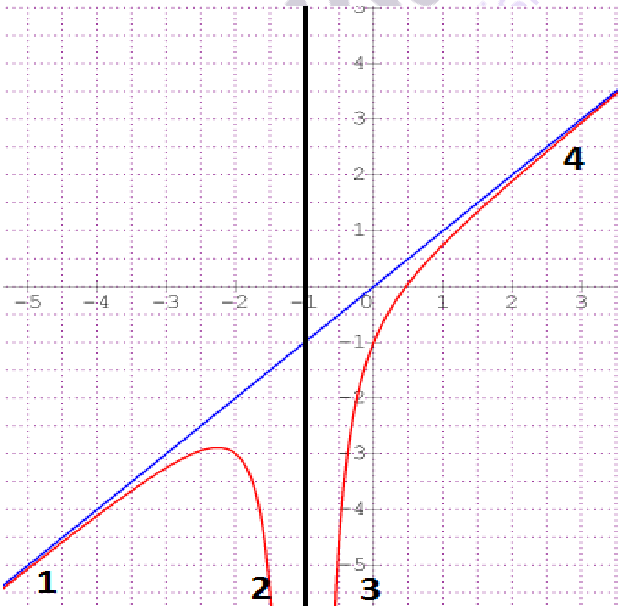
2/ $f(x)$ تكون عند $-\infty$

عندما تكون قيم x عند 0 فان

3/ $f(x)$ تكون عند $-\infty$

عندما تكون قيم x عند $+\infty$ فان

4/ $f(x)$ تكون عند $-\infty$



مخطط الدرس

النهايات

1.1 نهاية منتهية

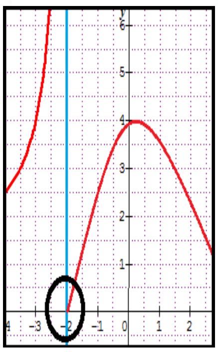
1. عند

تكتب

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

التفسير البياني

المنحنى يقبل نقطة توقف احداثياتها $(x_0;l)$



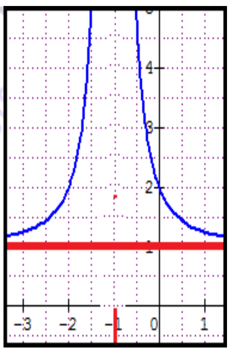
2. عند اللانهاية

تكتب

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$$

التفسير البياني

المنحنى يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y=l$



2.1 نهاية غير منتهية

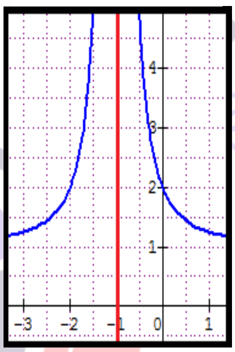
3. عند

تكتب

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$$

التفسير البياني

المنحنى يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب معادلته $x=x_0$



4. عند اللانهاية

تكتب

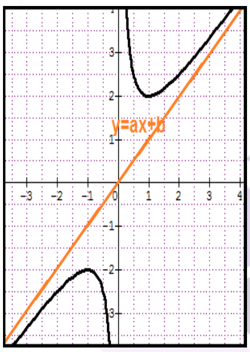
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

التفسير البياني

المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ حيث

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax$$



المؤسســـــة:	المستـــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :نهاية دالة

المكتسبات القبلية : حساب نهاية دالة ناطقة عندما يؤول x إلى a، حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدّالة.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها:

نشاط 1

نعتبر الدوال $f;g;h$ حيث

$f(x)=x^2-3x+1$

$g(x)=-x^2+3$

$h(x)=\dfrac{3}{x-2}$

اوجد مجموعة تعريف كل دالة

اختر قيم ل x قريبة من 1 بالقدر الكافي

اختر قيم ل x كبيرة بالقدر الكافي واحسب صورها بواسطة كل من $f;g;h$

تمرين منزلي ص

الإنجاز(ســـير الحصة):

نشاط رقم 1 01ص110

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

1. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f .
2. أكمل، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم الموالي:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$								

3. ماذا تلاحظ ؟
4. بين أنه حتى يكون $f(x)\geq 10^8$ يكفي أن يكون x عنصرا من $\left[3-10^{-4};3\right[\cup\left]3;3+10^{-4}\right]$
5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يكون $f(x)\geq A$ لما $x\in\left[3-\dfrac{1}{\sqrt{A}};3\right[\cup\left]3;3+\dfrac{1}{\sqrt{A}}\right]$

نشاط رقم 1 الحل

الدالة f قابلة للإشتقاق على R-{3} ودالتها المشتقة $f'(x)=-2x+6/(x-3)^4$

لما $x\in\left]-\infty,3\right[$، $f'(x)>0$ وتكون الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty,3\right[$

لما $x\in\left]3,+\infty\right[$، $f'(x)<0$ وتكون الدالة f متناقصة تماما على $\left]3,+\infty\right[$ وجدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'(x)	+	‖	-
f(x)	↗	‖	↘

2ـــــ إكمال الجدول

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8	10^6	10^4	10^2

3) نلاحظ أنه كلما إقترب x من العدد3 فإن f(x) تزداد وتأخذ قيم أكبر فأكبر.

4) أ- ليكن $x\in\left]3,3+10^{-4}\right]$ معناه $3<x\leq 3+10^{-4}$ وf متناقصة على $\left]3,+\infty\right[$ ومنه $f(x)\geq 10^8$

ب – ليكن $x\in\left]3-10^{-4};3\right[$ معناه $3-10^{-4}\leq x<3$ و f متزايدة على المجال $\left]-\infty,3\right[$ ومنه $10^8\leq f(x)$

ومن (أ) و (ب) نجد إذا كان $x\in\left[3-10^{-4};3\right[\cup\left]3;3+10^{-4}\right]$ فإن $f(x)\geq 10^8$.

$f(x)\geq 10^8$

5) تتم الإجابة عنه بنفس خطوات الإجابة في السؤال 4

خلاصة: مما سبق نستطيع القول أن f(x) تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من 3 بالقدر الكافي

التعليمات والتوجيهات:

- نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $|x|\to+\infty$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{<}x_0$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{>}x_0$.
- يقتصر تطبيق تعريف النهاية، باستعمال المجالات، على أمثلة للدوال المرجعية كتفسير للمقاربة التجريبية والحدسية للمفهوم. في كل الحالات تعطى مجموعة تعريف الدالة

1.نهاية منتهية لدالة

1.1.نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي

تعريف1: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $|x-x_0|<\alpha$ يكون $|f(x)-l|<e$ و نكتب: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1$

باستعمال التعريف أثبت أن: $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

الحل: ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث: $|f(x)-3|<e$

$|f(x)-3|<e$ يكافئ $|(2x+1)-3|<e$ أي $|2x-2|<e$ و هذا يعني أن

$|2(x-1)|<e$ أي $2|x-1|<e$ نجد هكذا $|x-1|<\frac{e}{2}$ و منه إذا كان $|x-1|<\frac{e}{2}$ فإن

$|f(x)-3|<e$

ومنه $\lim f(x)=3$

1.1.1 التفسير البياني

نقطة توقف

تعريف: ليكن (c_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم وليكن a عدد حقيقي إذا كانت النهاية للدالة f عند a هي b نقول ان المنحنى (c_f) يقبل النقطة $A(a;b)$ كنقطة توقف

2.1 نهاية منتهية لدالة عند مالانهاية

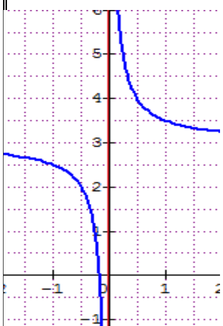
مبرهنة1: نقبل دون برهان النتائج التالية: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+a}=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+a}=0$

أمثلة:

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=3+\frac{1}{2x}$ نقول في هذه الحالة:

أن نهاية h هي 3 عند $+\infty$ ونكتب: $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} 3+1/+\infty=3+0=3$

ونقول أن نهاية h هي 3 عند $-\infty$ ونكتب: $\lim h(x)=\lim 3+\frac{1}{\quad}=3$



تعريف2: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعنى أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان x>B يكون $0\le|f(x)-l|\le e$ ونكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

مثال: إثبات أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}=2$

ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث: $0\le\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<e$

$\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<e$ يكافيء $0\le\left|\frac{1}{x}\right|<e$ ومنه $0\le |x|>\frac{1}{e}$ ومنه يكفي أخذ $B=\frac{1}{e}$ وبذالك نجد

● معرفة شرط وجود مستقيم مقارب للمنحنى يوازي أحد محوري المعلم.
تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}=2$$

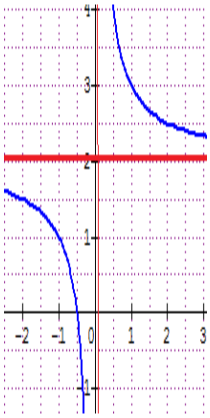
2.1 .1 التفسير البياني

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

تعريف

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن b عدد حقيقي

_القول أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة y=b مستقيم مقارب للمنحني (c_f) عند $+\infty$ يعني أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$



مثال ليكن $h(x)=2+\frac{1}{x}$ وليكن تمثيلها البياني (c_k) في (الشكل3)

نلاحظ كلما أخذ $|x|$ قيم كبيرة كلما إقترب منحنى الدالة h من المستقيم ذو المعادلةy=2 وعليه يسمى هذا المستقيم مستقيم مقارب ل (c_k) عند $+\infty$ عند $-\infty$

خلاصة نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y=b$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f اذا وفقط اذا كان:
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$

مثال: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ هو مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل لمنحنى الدالة f

نتيجة:

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن b عدد حقيقي.

القول أن الدالة f لها مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=b$ لما تكون لها نهاية منتهية عند مالا نهاية.

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-5;-4[\cup]-4;5]$ بـ $f(x)=3+\frac{1}{(x+4)^2}$.

1.أدرس نهاية الدالة f عند (-4). ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحنى (C_f).

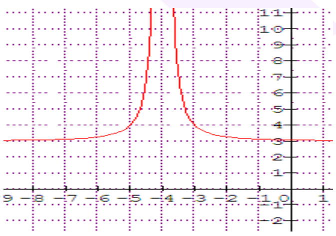
الحل: لدينا حسب المبرهنة السابقة $\lim_{x\to-4}\frac{1}{(x+4)^2}=\frac{1}{0}=+\infty$ و منه.

نستنتج أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=-4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-5;-4[\cup]-4;5]$ لدينا: $f(x)=3+\frac{1}{(x+4)^2}$ أي

$$f'(x)=0-\frac{2(x+4)}{(x+4)^4}=-\frac{2}{(x+4)^3}$$

x	-5		-4		5
$f'(x)$		+	||	−	
$f(x)$	0	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘	0



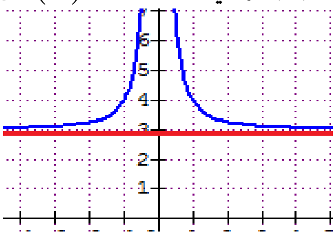
تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $f(x)=3+\dfrac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني

أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

الحل: لدينا حسب المبرهنة السابقة $f(x)=3+\dfrac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}3+\dfrac{1}{0}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

نستنتج أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

2.من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{0\}$ لدينا: $f(x)=3+1/x^2$ أي $f'(x)=-2/x^3$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	3	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘	3

تمارين منزلية:

25 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و أكّد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور الفواصل

1) $f(x)=x^2+2x-3$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ 4) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ 6) $f(x)=\dfrac{2x}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

26 احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و أكّد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور التراتيب

في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2$ 4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

27 احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و أكّد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً في

كل حالة من

الحالات التالية: 1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{4x^5-3x^2}{2x^5}$

المؤسســــــــة:	المستـــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :نهاية دالة

المكتسبات القبلية : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$. **مؤشرات الكفاءات :**

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط: نعتبر الدالة $f:x\mapsto\frac{x+1}{x-2}$. 1) ما هي مجموعة تعريفها؟ 2) أحسب نهاياتها عند أطراف مجموعة تعريفها. 3) كيف نفسر بيانيا هذه النهايات؟	انظر أدناه	• نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $\|x\|\to+\infty$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{<}x_0$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{>}x_0$. • يقتصر تطبيق تعريف النهاية، باستعمال المجالات، على أمثلة للدوال المرجعية كتفسير للمقاربة التجريبية والحدسية للمفهوم. في كل الحالات تعطى مجموعة تعريف الدالة

نشاط رقم 2 4 ص 110

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=\frac{2x+1}{x}$

1. بين أن $h(x)=a+\frac{b}{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.
2. بعد حساب $h'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة h.
3. أكمل جدولي القيم المواليين:

x	-10	-10^3	-10^5		x	10	10^3
$h(x)$					$h(x)$		

4. ماذا تلاحظ ؟
5. بين أنه: إذا كان $x\geq10^6$ فإن $h(x)\in\left]2;2+10^{-6}\right]$ و إذا كان $x\leq-10^6$ فإن $h(x)\in\left[2;2-10^6\right[$
6. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x\geq B$ فإن $h(x)\in\left]2;2+e\right]$
7. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x\leq-B$ فإن $h(x)\in\left[2-e;2\right[$

نشاط رقم 2 الحل

_ $h(x)=\frac{2x+1}{x}$ ومنه $h(x)=\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}$ ومنه $h(x)=2+\frac{1}{x}$

3_ إكمال الجدول

x	-10	-10^3	-10^5		x	10	10^3
$h(x)$	1.9	1.999	1.99999		$h(x)$	2.1	2.001

4_ نلاحظ من الجدول كلما أخذت $|x|$ قيم كبيرة $h(x)$ من 2

5_ أ) ليكن $x>10^6$ ومنه $0<\frac{1}{x}\leq10^{-6}$ ومنه $2<2+\frac{1}{x}\leq2+10^{-6}$ أي $2<h(x)\leq2+10^{-6}$ ومنه $h(x)\in\left]2;2+10^{-6}\right]$

ب) ليكن $x\leq10^{-6}$ ومنه $-10^{-6}\leq\frac{1}{x}<0$ ومنه $2-10^{-6}\leq2+\frac{1}{x}<2$ أي $2-10^{-6}\leq h(x)<2$

$h(x)\in\left[2-10^{-6};2\right[$ ومنه $h(x)\in\left[2-10^{-6};2\right[$

6_ ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث

$2<h(x)\leq2+e$ يكافئ $2<2+\frac{1}{x}\leq2+e$ يكافئ $0<\frac{1}{x}\leq e$ ومنه $x\geq\frac{1}{e}$ يكفي أخذ $B=\frac{1}{e}$

7_ تتم الإجابة عنه بنفس الطريقة في السؤال 6

$f(x) \geq 10^8$

5) تتم الإجابة عنه بنفس خطوات الإجابة في السؤال 4

خلاصة

* يبن لنا الجدول الأول أن $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة

نقول في هذه الحالة أن نهاية h هي 2 عند $+\infty$ ونكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2$

*يبن لنا الجدول الثاني أن $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيما سالبة وتكون $|x|$ جد كبيرة نقول في هذه الحالة أن نهاية h هي 2 عندلانهاية ونكتب: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2$

2/ نهاية غير منتهية لدالة

1.2 نهاية غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

مبرهنة1: نقبل دون برهان النتائج التالية: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty$

أمثلة:

1. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بِـ: $f(x) = 1/(x-3)^2$ نقول في هذه الحالة: أن نهاية f هي $+\infty$ عند 3 (أو لما يؤول x إلى 3)

و نكتب: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1/(x-3)^2 = 1/0 = +\infty$

نقول في هذه الحالة أن نهاية f هي $+\infty$ عند 3 أو لما x يؤل إلى 3 ونكتب $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$

تعريف3: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0 < |x - x_0| < \alpha$ يكون $f(x) > A$ ونكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0.

مثال: أثبت أن $\lim\limits_{x \to 2} 1/(x-2)^2 = +\infty$

الحل: ليكن عدد حقيقي A موجب تماما بحيث $1/(x-2)^2 > A$

$1/(x-2)^2 > A$ يكافيء $(x-2)^2 < \dfrac{1}{A}$ يكافيء $0 < |x-2| < \sqrt{1/A}$ ومنه يكفي أخذ $\alpha = \sqrt{1/A}$

1.1.2 النهاية من اليمين واليسار

مبرهنة1: نقبل دون برهان النتائج التالية: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$

أمثلة

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بِـ: $g(x) = 1/x$.

لتكن g_1 و g_2 الدالتان المعرفتان على $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ على الترتيب حيث:

$g_1(x) = g_2(x) = g(x)$

من خلال المنحنى يأخذ x قيما قريبة كبرى من 1 بالقدر الكافي ومنه: $\lim\limits_{x \to 1} g_1(x) = +\infty$ عند 1 من اليمين كما يبين لنا المنحنى أن x يأخذ قيما قريبة صغرى من العدد1 بالقدر الكافي ومنه: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g_1(x) = -\infty$. نقول أن نهاية g هي $+\infty$ عند 1 من اليسار

حساب نهاية دالة

مقلوب عند مالا نهاية

خلاصة:مما سبق نستنتج $g(x)$ تأخذ قيم كبيرة بالقدر الذ ي نريد شريطة أن يأخذ x قيما اكبر وقريبة من1 بالقدر الكافي ونقول أن نهاية $g(x)$ هي $+\infty$ عند 1 من اليمين ونكتب

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} g(x) = +\infty$$

كما أن $|g(x)|$ تأخذ قيم كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما أصغر من 1 وقريبة من1 بالقدرا لكافي ونقول أن نهاية $g(x)$ هي $-\infty$ عند 1 من اليسار ونكتب $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = -\infty$

تعريف4: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم اكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) > A$ ونكتب: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = +\infty$

تعريف5: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) < A$ ونكتب: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = +\infty$

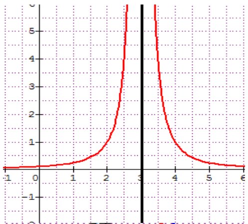
مثال: إثبات أن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{2}{x-1} = +\infty$

الحل: ليكن A عدد حقيقي موجب تماما بحيث $\frac{2}{x-1} > A$. $\frac{2}{x-1} > A$ يكافيء $0 < x-1 < \frac{2}{A}$ ومنه

يكفي أخذ $\alpha = \frac{2}{A}$ ومنه $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{2}{x-1} = +\infty$

2.1.2 التفسير البياني لنهاية غير منتهية عند عدد

المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب



ليكن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ (الشكل1)

و ليكن التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x-1}$ (الشكل2)

نلاحظ أن (c_f) يقترب قدر مانريد من المستقيم ذو المعادلة x=3 كلما إقترب x أكثر من 3 وأن (c_g) يقترب قدر مانريد من المستقيم ذو المعادلة x=1 كلما إقترب x أكثر من 1 نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة x=3 مستقيم مقارب للمنحنى (c_f) والمستقيم ذو المعادلة x=1 مستقيم مقارب للمنحنى (c_g) موازي لمحور التراتيب .

تعريف: ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن aعدد حقيقي

إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند a هي $+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة x=a مستقيم مقارب للمنحنى (c_f) موازي لمحور التراتيب

تطبيق: أحسب $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$، أعط تفسير بياني لهذه النهاية

الحل: $+\infty$ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=$(حسب المبرهنة 1) ونستنتج أن منحنى الدالة $\frac{1}{x^2}$ يقبل محور الفواصل مستقيم مقارب له

نتيجة: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن a عدد حقيقي.

القول أن الدالة f لها مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=a$

لما تكون نهايتها غير منتهية عند عدد حقيقي.

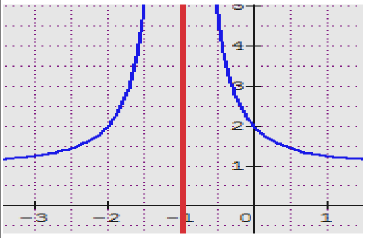
مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-1+\frac{1}{(x+1)^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. أدرس نهاية الدالة f عند (-1). ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟
2. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني (C_f).

الحـــل: 1) لدينا حسب المبرهنة السابقة $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ و منه $\lim_{x\to -1}f(x)=+\infty$.

نستنتج أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

2) من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;-1[\cup]-1;0]$ لدينا: $f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^3}$



x	-2		-1		0
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[\cup]1;2]$ بـ: $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

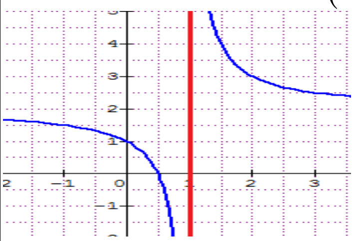
1. أدرس نهاية الدالة f عند 1. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟
2. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني (C_f).

الحل:

لدينا حسب المبرهنة السابقة $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty$. نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;1[\cup]1;2]$ لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$



x	-2		1		2
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f اذا وفقط اذا كان:

$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = (+\infty);(-\infty)$ او $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = (+\infty);(-\infty)$

مثال: $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ إذن مجموعة التعريف هي $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ومنه $\lim_{x \to 2} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{1}{0}$

ندرس حالتين هما .

الحالة1 $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{3\times 2-1}{0^-} = -\infty$ الحالة2 $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{3\times 2-1}{0^+} = +\infty$

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ هو مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب لمنحني الدالة f

تمرين منزلي:

25 احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و أكّد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور الفواصل

1) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ 4) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 6) $f(x) = \frac{2x}{1-\frac{1}{x^2}}$

26 احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و أكّد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور التراتيب في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2$ 4) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

27 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و أكّد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً في كل حالة من الحالات التالية: 1) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$ 2) $f(x) = \frac{4x^5-3x^2}{2x^5}$

المؤسســـــــة:	المستـــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :نهاية دالة

المكتسبات القبلية : معرفة شرط وجود مستقيم مقارب للمنحني يوازي أحد محوري المعلم. تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب. البحث عن مستقيم مقارب مائل.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:
ينسب المستوي إلى معلم. وليكن المستقيم: $(\Delta): y = 2x+1$.
والدالة f حيث: $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x}$.
1/ أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\dfrac{1}{x}+\alpha x+\beta$.
2/ أحسب $(f(x)-(2x+1))$.
3/ استنتج الوضع النسبي لـ (Δ)، (C_f).
4/ أحسب: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]$، $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]$.
5/ بم تفسر ذلك؟

الإنجاز (ســـير الحصة)

نشاط رقم 03 ص110

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x)=x^2$ (k هي الدالة مربع)

1. شكل جدول تغيرات الدالة k.

x	10	10^2	10^3	10^4
$k(x)$				

2. أكمل جدول القيم الموالي:
3. ماذا تلاحظ ؟
4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:
إذا كان $x\geq B$ يكون $k(x)\geq A$ و إذا كان $x\leq -B$ يكون $k(x)\geq A$

نشاط رقم 3 الحل

1:إكمال الجدول

x	10	10^2	10^3	10^4
$k(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8

3: نلاحظ أنه كلما أخذ x قيم كبيرة أخذ $k(x)$ قيم كبيرة

4: $k(x)\geq A$ معناه $x^2\geq A$ معناه $|x|\geq\sqrt{A}$ ومنه $x\geq\sqrt{A}$ أو $x\leq-\sqrt{A}$ يكفي أخذ $B=\sqrt{A}$

خلاصة:

يمكننا جعل $k(x)$ كبير بالقدر الذي نريد شريطة أن نجعل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=+\infty$

نشاط رقم

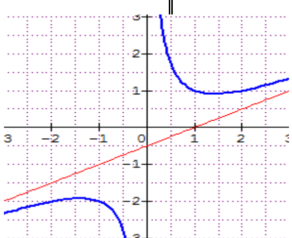
لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=(1/2)x-(1/2)+(1/x)$ وليكن (c_f) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=(1/2)x-(1/2)$ ولتكن M نقطة من (c_f) فاصلتها x و p نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x .

- أحسب المسافة MP
- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}MP$
- باستعمال راسم المنحنيات أرسم (c_f) و (Δ) في نفس المعلم ،ماذا تلاحظ ؟

نشاط رقم الحل

$MP=\sqrt{(y_M-y_P)^2+0}=|y_M-y_P|=\left|f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}MP=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)=0$



نلاحظ أن المنحنى (c_f) يقترب من المستقيم (Δ) لما يؤول x إلى $+\infty$

نقول في هذه الحالة أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c_f) عند $+\infty$

التعليمات والتوجيهات

- نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $|x|\to+\infty$ ثم عندما $x\xrightarrow{<}x_0$ ثم عندما $x\xrightarrow{>}x_0$.
- يقتصر تطبيق تعريف النهاية، باستعمال المجالات، على أمثلة للدوال المرجعية كتفسير للمقاربة التجريبية والحدسية للمفهوم.
في كل الحالات تعطى مجموعة تعريف الدالة

2.2 نهاية غير منتهية لدالة عند ما لانهاية

تعريف6: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $f(x) > A$ و نكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مثال: أثبت أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$

الحل: ليكن a عدد حقيقي موجب تماما بحيث $3x - 1 > a$

$3x - 1 > a$ يكافيء $x > \dfrac{a+1}{3}$ ومنه يكفي أخذ $B = \dfrac{a+1}{3}$

مثال: أثبت أن $\lim\limits_{x \to 2} 1/(x-2)^2 = +\infty$

الحل: ليكن عدد حقيقيA موجب تماما بحيث $1/(x-2)^2 > A$

$1/(x-2)^2 > A$ يكافيء $(x-2)^2 > \dfrac{1}{A}$ يكافيء $0 < |x-2| < \sqrt{1/A}$ ومنه يكفي أخذ $\alpha = \sqrt{1/A}$

2.1.2 التفسير البياني لنهاية غير منتهية عند مالانهاية

المستقيم المقارب المائل

تعريف : ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$)

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f كما قمنا بتمثيل المستقيم $(\Delta): y = 2x + 1$

من خلال المنحنى نلاحظ أن $(\Delta): y = 2x + 1$ مستقيم مقارب ل (C_f) أي ان

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x + 1 - \dfrac{1}{x} - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

وكذلك $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[2x + 1 - \dfrac{1}{x} - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

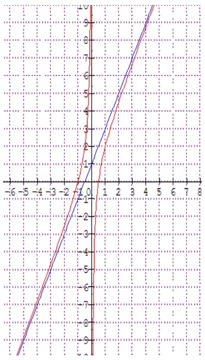
ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x) = ax + b + g(x)$ مع $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

فإنه من الواضح أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ لأن $f(x) - (ax+b) = g(x)$

و بالتالي فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

(نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

- نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $|x| \to +\infty$ ثمّ عندما $x \xrightarrow{<} x_0$ ثمّ عندما $x \xrightarrow{>} x_0$.
- يمكن استعمال حاسبة بيانية لتخمين وجود مستقيم مقارب بالبحث المتكرِّر عن معادلته (التي تكون من الشكل $y = ax + b$) ثمّ تبريرها فيما بعد بالحساب.
- يطلب تبرير قواعد حساب النهايات عند استعمال النظريات الأولية، مع الحرص على التطبيق السليم لها من قبل التلميذ، و تختار لذلك أمثلة لدوال كثيرة حدود ودوال تناظرية ودوال ناطقة أخرى.



نشاط:
لتكن الدالة
$f:x\mapsto \frac{x^2-2x+3}{x-1}$.
1- أحسب العددين a، b
حيث: $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$،
$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.
2- أحسب
$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$.

3.1.2 البحث عن مستقيم مقارب مائل

الشعب العلمية غير معنية بالبحث عن مستقيم مقارب مائل

ملاحظة: غالبا لا تظهر عبارة المستقيم المقارب المائل كالمثال السابق ولذلك نبحث عنها كما يلي

1. نتحقق أولا أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2. نحسب $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
3. اذا كان $a\in\mathbb{R}^*$ نحسب $b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$
4. اذا كان $b\in\mathbb{R}$ فان معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ هي $y=ax+b$ وبنفس الكيفية عند $-\infty$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

يمكن ان نحسب a كما يلي $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{(x^2-1/x)}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}=1$

يمكن ان نحسب b كما يلي: $b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$

نتيجة: منحى الدالة يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ هو $y=x$

تمرين منزلي : 31 ص 134

ادرس تغيرات الدالة f و بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لمنحى الدالة f في كل حالة من الحالات التالية: (1 $f(x)=\frac{x^2+5x-1}{x}$;(2 $(\Delta): y=x+5$ (2 (3 $f(x)=x-1+\frac{2}{x}$; $(\Delta): y=x-1$

تمرين 45 ص 136 لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-1))=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

و

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-1))=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c_f) الممثل للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (c_f) و المستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x-1)$

ولدينا $f(x)-y=\frac{1}{x+1}$ وإشارته حسب الجدول الآتي :

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$1/x+1$	$-$	$+$
الوضعيــة	المنحنى (c_f) تحت (Δ)	المنحنى (c_f) يقع فوق (Δ)

تمرين

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$ و (c_f) تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم أثبت أن المنحنى (c_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تحديد معادلته

الحل

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)=+\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)=-\infty$ نستنتج إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل عند

$-\infty$ و $+\infty$ نبحث عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)=1$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$

بنفس الطريقة نثبت أنه مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$

تطبيق2: أحسب نهايات كل دالة مما يلي عند أطراف مجالات تعريفها.

$f:x\mapsto-\sqrt{x}+x$ ، $g:x\mapsto(x^2+1)(2x-1)$ ، $h:x\mapsto\dfrac{-x}{\sqrt{|x|}}$.

تطبيق3: أحسب نهايات كل دالة مما يلي عند أطراف مجالات تعريفها.

$f:x\mapsto x^2-2x+5$ ، $g:x\mapsto-2x^2-x+1$ ، $h:x\mapsto x^3-x^2-x+1$ ،

$k:x\mapsto-\dfrac{1}{2}x^3-x$ ، $m:x\mapsto x^3-2x+2$ ، $l:x\mapsto\dfrac{x-2}{x+1}$ ، $x\mapsto\dfrac{2x-1}{-x-4}$

$r:x\mapsto\dfrac{x+\sqrt{2}}{3x-1}$.

تطبيق4: (هذا التطبيق لا يعني ع تج)أحسب نهايات كل دالة مما يلي عند أطراف مجالات تعريفها.

$f:x\mapsto\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x+1}$ ، $g:x\mapsto\dfrac{x^4-1}{-x^2-4}$ ، $h:x\mapsto\dfrac{x^3-x}{x^3+x^2+x+1}$.

المؤسســــــة: السنة الدراسية: التاريــــــخ: توقيت الحصة :	المستـــــوى:الثانية رياضيات ميدان التعلم:التحليل الوحدة التعلمية:النهايات موضوع الحصة :مفهوم نهاية

المكتسبات القبلية : معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$-مؤشرات الكفاءات:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	(see below)	• نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $\lvert x\rvert \to +\infty$ ثمّ عندما $x \xrightarrow{<} x_0$ ثمّ عندما $x \xrightarrow{>} x_0$. • يقتصر تطبيق تعريف النهاية، باستعمال المجالات، على أمثلة للدوال المرجعية كتفسير للمقاربة التجريبية والحدسية للمفهوم. في كل الحالات تعطى مجموعة تعريف الدالة

5/مفهوم النهاية

تعريف1: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $\lvert x-x_0\rvert<\alpha$ يكون $\lvert f(x)-l\rvert<e$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x+1$

باستعمال التعريف أثبت أن: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$

الحل: ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث: $\lvert f(x)-3\rvert<e$

$\lvert f(x)-3\rvert<e$ يكافئ $\lvert(2x+1)-3\rvert<e$ أي $\lvert 2x-2\rvert<e$ و هذا يعني أن $\lvert 2(x-2)\rvert<e$

أي $2\lvert x-2\rvert<e$ نجد هكذا $\lvert x-2\rvert<\frac{e}{2}$ و منه إذا كان $\lvert x-2\rvert<\frac{e}{2}$ فإن $\lvert f(x)-3\rvert<e$

للحصول على $\lvert f(x)-3\rvert<e$ يكفي إذن أخذ $\alpha=\frac{e}{2}$ (أو $\alpha\le\frac{e}{2}$) و هكذا إذن $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$

تعريف2: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $+\infty$ يعنى أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<\lvert x-x_0\rvert<\alpha$ يكون $f(x)>A$ ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

تعريف3: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم اكبر هي $+\infty$ يعنى أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0<x_0-x<\alpha$ يكون $f(x)>A$ ونكتب: $\lim\limits_{x\xrightarrow[x>x_0]{} x_0} f(x)=+\infty$

مثال: لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{1}{x}$ باستعمال التعريف أثبت أن:

$$\lim_{x\xrightarrow[x>0]{}0} g(x)=+\infty$$

الحل: ليكن A عدد حقيقي موجب تماما بحيث: $g(x)>A$

$g(x)>A$ يكافئ $\frac{1}{x}>A>0$ أي $0<x<\frac{1}{A}$ و منه إذا كان $0<x<\frac{1}{A}$ يكون $g(x)>A$

للحصول على $g(x)>A$ يكفي إذن أخذ $\alpha=\frac{1}{A}$ و هكذا إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow[x>0]{}0} g(x)=+\infty$

تعريف4: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) \succ A$ ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$

تعريف5: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعنى أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:إذا كان x>B يكون $0 \le |f(x) - l| \le e$ ونكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

تعريف6: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $f(x) > A$ و

ملاحظات هامة:

- عامة نقوم بحساب النهايات لدالة عند كل طرف مفتوح من مجموعة تعريفها.
- اذا وجدت نهاية لدالة f عند عدد حقيقي a فأن هذه النهاية وحيدة
- يمكن لدالة ما إن لا تقبل نهاية مثلا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$
- إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق عند العدد الحقيقي a فان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

المؤسســـــــة:	المستـــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :نهاية دالة مرجعية

المكتسبات القبلية : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$. **مؤشرات الكفاءات :**

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

6/ نهاية دالة مرجعية

1.6 نهاية دالة تالفية

تعريف :

نهاية الدالة التالفية $ax+b$ اذا كان $a>0$ عند $+\infty$ هي $+\infty$ وعند $-\infty$ هي $-\infty$ اذا كان $a<0$ عند $+\infty$ هي $-\infty$ وعند $-\infty$ هي $+\infty$

2.6 نهاية دالة مربع

تعريف :

نهاية الدالة مربع $x \mapsto x^2$ عند $+\infty$ هي $+\infty$ وعند $-\infty$ هي $+\infty$

3.6 نهاية دالة مقلوب

تعريف :

نهاية الدالة امقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند $+\infty$ هي **0** وعند $-\infty$ هي **0**

وعند ال **0** بقيم كبرى هي $+\infty$ وعند ال **0** بقين صغرى هي $-\infty$

4.6 نهاية دالة الجذر التربيعي

تعريف :

نهاية الدالة جذر تربيعي $x \mapsto \sqrt{x}$ عند $+\infty$ هي $+\infty$

وعند ال **0** بقيم كبرى هي ال **0**

5.6 نهاية دالة القيمة المطلقة

تعريف :

نهاية الدالة القيمة المطلقة $|x| \to +\infty$ عند $+\infty$ هي $+\infty$ وعند $-\infty$ هي $+\infty$

تطبيق

ت 2) أحسب نهايات التالية: $\lim_{x\to-\infty}(-2x+4)$ ، $\lim_{x\to+\infty}(-2x+4)$ ، $\lim_{x\to-\infty}(x-14)$ ،

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2}x+1)$ ، $\lim_{x\to+\infty}2x^2$ ، $\lim_{x\to-\infty}2x^2$ ، $\lim_{x\to-\infty}-x^2$ ، $\lim_{x\to+\infty}-x^2$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{2}{x}$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{2}{x}$ ،

$\lim_{x\to0}\frac{-3}{x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{-3}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}$ ، $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})$ ، $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}$.

التعليمات والتوجيهات:

- نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $|x|\to+\infty$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{<}x_0$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{>}x_0$. $x\mapsto ax+b$ ، $x\mapsto x^2$ ، $x\mapsto\frac{1}{x}$ ، $x\mapsto\sqrt{x}$.

6.6 نهاية بعض الدوال المالوفة

الدالة كثير حدود

مبرهنة: نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة

الدالة الناطقة

مبرهنة: نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الاعلى درجة في المقام

نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة

الدالة الجذر التربيعي

مبرهنة: f دالة موجبة و l عدد حقيقيموجب

اذاكان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$

اذاكان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

مثال03: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\sqrt{X}}{x}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{X^3+1}{x^2}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-X^2+5}{x+2}\right)=-\infty$

قاعدة 01: النهاية عند $+\infty$ او عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ اوعند $-\infty$.

مثال 04:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7x^3-2x^2+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(7x^3\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x+1-2x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^2\right)=-\infty$$

تعريف 05:

** النهاية عند $+\infty$ او عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة $+\infty$ او عند $-\infty$

مثال 05:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3-x}\right),\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{\left(X^2-1\right)^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^4}=0,$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x}=-1,\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

المؤسســـــــة:	المستـــــوى:الثانية رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم:التحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية:النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :عمليات على النهايات

المكتسبات القبلية: استعمال النظريات الأولية(المجموع؛ الجُداء؛ المقلوب؛ حاصل القسمة) لحساب نهايات.. حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

8/عمليات على النهايات

1.8 ملاحظات

ملاحظة :

- يتم بصفة عامة حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
- إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد حقيقي a تكون هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها و نذكر على سبيل المثال الدالة: $x\to\sin x$ و التي لا تقبل نهاية لما يؤول x إلى $+\infty$.

2.8 المبرهنات الأولية على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين "

- نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $|x|\to+\infty$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{<}x_0$ ثمّ عندما $x\xrightarrow{>}x_0$.
- يقتصر تطبيق تعريف النهاية، باستعمال المجالات، على أمثلة للدوال المرجعية كتفسير للمقاربة التجريبية والحدسية للمفهوم. في كل الحالات تعطى مجموعة تعريف الدالة

مثال: إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x^2+x$

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{cases}$ و منه

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ولدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}$ لا يمكننا الاستنتاج في هذه الحالة

لإزالة حالة عدم التعيين نكتب $f(x)=x(2x+1)$ و بما أن

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

تطبيق: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+5+\frac{1}{x}\right),\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+2\right),\ \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{3x}{x^2-4}\right),\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{-x^2-3}\right)$$

الحل:

* $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ومنه نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ومنه نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2\right)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x=-\infty$ لدينا حالة عدم تعين من الشكل ($+\infty-\infty$

وعليه) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=+\infty$

* لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(x^2-4\right)=0^+$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 3x=-6$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{3x}{x^2-4}\right)=-\infty$

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2-3\right)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-1\right)=+\infty$ حالة عدم تعين من الشكل ($\frac{+\infty}{-\infty}$) وعليه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{-x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-1-\frac{3}{x^2}\right)}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{-x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-1-\frac{3}{x^2}\right)}=-2$$

- توضح حالات عدم التعيين بأمثلة مختارة، ونذكر هنا بأنّ التركيز على تقنيات الحساب الجبري في تحويل عبارة أمر يساعد التلميذ على تجاوز الصعوبات التي يمكن أن تعترضه في إزالة حالات عدم التعيين.

تمرين

1 _ أحسب النهاية التالية $\lim\limits_{x \to 2}(3x-5)$

2 _ أكتب تعريف النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

3 _ ثبت بإستخدام التعريف أن $\lim\limits_{x \to 2}(3x-5) = 1$

الحل

1_ $\lim\limits_{x \to 2}(3x-5) = 1$ باستخدام مبرهنات حساب النهايات

2_تعريف: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0 < |x - x_0| < \alpha$ يكون $0 \le |f(x) - l| < e$

3_لإثبات أن $\lim\limits_{x \to 2}(3x-5) = 1$ يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0 < |x-2| \le \alpha$ يكون e $0 \le |(3x-5)-1| <$

e $0 \le |(3x-5)-1| <$ يكافيء $0 \le |3(x-2)| < e$ ومنه $0 \le |x-2| < \frac{e}{3}$ وعليه يكفي أخذ

$\alpha = \frac{e}{3}$ ومنه $\lim\limits_{x \to 2}(3x-5) = 1$