الميدان: التحليل

الأستاذ: عبد الله علي

المستوى: 2ر,2ت ر ,2 ع ت .

الوحدة التعليمية: النهايات

تاريخ:

موضوع الحصة: حساب نهاية..

المدة:

الوسائل المستخدمة: الكتاب المدرسي ،السبورة

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حساب نهاية دالة عندما يؤول الى $+\infty$ او $-\infty$ او عند x_0

مذكرة
رقم
01

توجيهات -تعاليق	الزمن	الانشطة المرافقة لكل مرحلة	مراحل الدرس

الانطلاق

نهاية غير منتهية عند اللانهاية

نشاط3 ص 110من الكتاب المدرسي

إكمال الجدول

x	10	10^2	10^3	10^4
$k(x)$	10^2	10^4	10^5	10^8

نلاحظ أنه كلما أخذx قيم كبيرة أخذ (x)قيم كبيرة

$A \geq k(x)$ معناه $A \geq x^2$معناه $\sqrt{A} \geq |x|$ ومنه $\sqrt{A} \geq x$أو$x \leq -\sqrt{A}$ يكفي أخذ$B = \sqrt{A}$

خلاصة:

يمكننا جعل $k(x)$ كبير بالقدر الذي نريد شريطة أن نجعل x كبير بالقدر الكافي ونكتب

$\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

المعارف

تعريف :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من اجل كل عدد حقيقي موجب تما ما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تما ما B بحيث : إذا كا ن $x > B$ يكون $f(x) > A$ ونكتب

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

مثال :

أثبت أن$lim_{x\to+\infty}(3x-1) = +\infty$

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما بحيث$3x - 1 > a$

$3x - 1 > a$ يكافىء $x > \frac{a+1}{3}$ ومنه يكفي أخذ$B = \frac{a+1}{3}$

نقترح في البداية
أمثلة حول
حساب النهايات
عندما $x \mapsto |\quad|$
ثم عندما $x \overset{>}{\rightarrow} x_0$
ثم عندما $x \overset{<}{\rightarrow} x_0$

تعديل
2008/2009
نكتفي بدراسة
دوال مجموعة
تعريفها معطاة

الأنـطلاق

نهاية غير منتهية عندعدد حقيقي .

أ)نهاية غير منتهية عند عدد.

نشاط 1 الصـــــــــــــــفحة 110من الكتاب المدرسي.

1ـــالدالة f قابلةللإشتقاق على$R-\{3\}$ ودالتها المشتقة$f'(x)=\frac{-2x+6}{(x-3)^4}$

لما$x\epsilon]-\infty;3[$ ، $f'(x)>0$ وتكون الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;3[$

لما $]3;+\infty[$, $f'(x)<0$ وتكون الدالة f متناقصة تماما عـلى $]3;+\infty[$ وجدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$		↗	‖	↘	

2ـ إكمال الجدول

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8	10^6	10^4	10^2

3) نلاحظ أنه كلـما إقـترب x من العدد3 فإن $f(x)$تزداد وتأخذ قيم أكبر فأكبر.

4) أ- ليكن$x\epsilon]3;3+10^{-4}]$ معناه$3<x\leq 3+10^{-4}$ وf متناقصة على $]3;+\infty[$ ومنه $f(x)\geq 10^8$

ب – ليـكن $[3-10^{-4};3[$ معناه $3-10^{-4}\leq x<3$ و f متزايدة على الـمجال$]-\infty;3[$ ومنه$f(x)\geq 10^8$

من (أ) و (ب) نجد إذا كان$x\epsilon]3-10^{-4};3[\cup]3;3+10^{-4}]$ فإن $f(x)\geq 10^8$.

5) تتم الإجابة عنه بنفس خطوات الإجابة في السؤال 4

المعارف

خلاصة

مما سبق نستطيع القول أن $f(x)$تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ**x** قيما قريبة من 3 بالقدر الكافي نقول في هذه الحالة أن نهاية f هي$+\infty$ عند 3 أو لما x يؤل إلى 3ونكتب

$\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$

تعريف2: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي$+\infty$يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-x_0|<\alpha$ يكون $f(x)>A$

ونكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

نقترح في البداية
أمثلة حول
حساب النهايات
عندما $x\mapsto |\quad|$
ثم عندما $x\overset{>}{\rightarrow}x_0$
ثم عندما $x\overset{<}{\rightarrow}x_0$
تعديل
2008/2009
نكتفي بدراسة
دوال مجموعة
تعريفها معطاة

إعـادة الاستثمار	**مثال:** اثبت أن $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ ليكن عدد حقيقي A موجب تماما بحيث $A < \frac{1}{(x-2)^2}$ $A < \frac{1}{(x-2)^2}$ يكافيء $(x-2)^2 < \frac{1}{A}$ يكافيء $0 < \lvert x-2\rvert < \sqrt{\frac{1}{A}}$ ومنه يكفي أخذ $\alpha = \sqrt{\frac{1}{A}}$ **تمارين من رقم الى رقم الصـــفحة**		نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $x \mapsto \lvert\quad\rvert$ ثم عندما $x \overset{>}{\to} x_0$ ثم عندما $x \overset{<}{\to} x_0$ تعديل 2008/2009 نكتفي بدراسة دوال مجموعة تعريفها معطاة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....

الميدان: التحليل

الأستاذ: عبد الله علي

المستـــوى: 2ر,2ت ر ,2 ع ت .

الوحدة التعليمية: النهايات

تاريـــخ:

موضوع الحصة: حساب نهاية..

المـــدة:

الوسائل المستخدمة: الكتاب المدرسي ،السبورة

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حساب نهاية دالة عندما يؤول الى $+\infty$ او $-\infty$ او عند x_0

مذكرة

رقم

02

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق

الانطلاق

ب- النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند عدد حقيقي

نشاط 2الصـــــــفحة 110 من الكتاب المدرسي:

2) إكمال الجدولين

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	x	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g(x)$	-10	-10^2	-10^3	-10^4	$g(x)$	10^4	10^3	10^2	10

3) نلاحظ أنه كلما إقترب x من 1 فإن $|g(x)|$ تاخذ قيم كبيرة أكثر فأكثر

5) _ $x\epsilon\left]1;1+\frac{1}{A}\right]$ يكافىء $1 < x \leq 1+\frac{1}{A}$ يكافىء $0 < x-1 \leq \frac{1}{A}$ ومنه $\frac{1}{x-1} \geq A$ ومنه

$g(x) \geq A$

_ $x\epsilon\left[1-\frac{1}{A};1\right[$ يكافىء $1-\frac{1}{A} \leq x < 1$ يكافى $-\frac{1}{A} \leq x-1 < 0$ ومنه$\frac{1}{x-1} \leq -A$ ومنه

$g(x) \leq -A$

خلاصة: مما سبق نستنتج $g(x)$ تأخذ قيم كبيرة بالقدر الذ ي نريد شريطة أن يأخذ x قيما اكبر وقريبة من 1بالقدر الكافي ونقول أن نهاية$g(x)$ هي $+\infty$ عند 1 من اليمين ونكتب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) = +\infty$

كما أن $|(x)|$ تأخذ قيم كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما أصغر من 1 وقريبة من 1 بالقدرا لكافي ونقول أن نهاية$g(x)$ هي$-\infty$ عند 1 من اليسار ونكتب $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} g(x) = +\infty$

المعارف

تعريف3

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم اكبر هي$+\infty$يعنى أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان $0 < -x$,$x_0 < \alpha$يكون$f(x) > A$

ونكتب : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = +\infty$

نقترح في البداية

أمثلة حول

حساب النهايات

عندما x ↦ | |

ثم عندما $x_0 \overset{>}{\rightarrow} x$

ثم عندما $x_0 \overset{<}{\rightarrow} x$

تعديل

2008/2009

نكتفي بدراسة

دوال مجموعة

تعريفها معطاة

المعارف

تعريف 4

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$يعنى أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ،يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:إذا كان$0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) > A$

ونكتب: $\lim_{\overset{<}{x \to x_0}} f(x) = +\infty$

مثال: إثبات أن$\mathbf{l}_{\overset{>}{x \to 1}} \frac{2}{x-1} = +\infty$

ليكن A عدد حقيقي موجب تماما بحيث$\frac{2}{x-1} > A$

$\frac{2}{x-1} > A$ يكافيء$0 < x - 1 < \frac{2}{A}$ ومنه يكفي أخذ $\alpha = \frac{2}{A}$ ومنه $\lim_{\overset{>}{x \to 1}} \frac{2}{x-1} = +\infty$

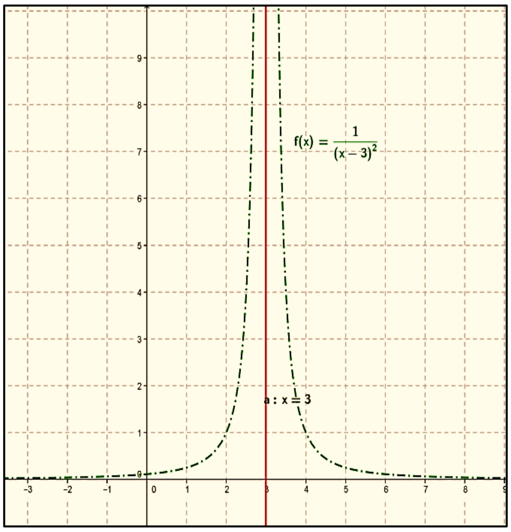
مبرهنة1: a عدد حقيقي نقبل بدون برهان النتائج التالية

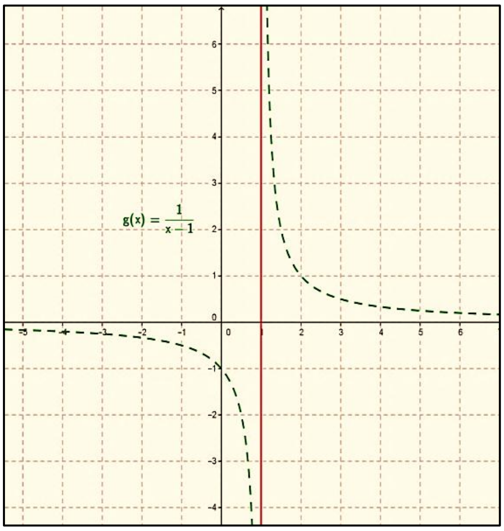
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty \text{ ، } \lim_{\overset{>}{x \to a}} \frac{1}{x-a} = +\infty \text{ ، } \lim_{\overset{<}{x \to a}} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

ج) المستقيم المقارب الموازى لمحور التراتيب (التفسير البياني لنهاية غير منتهية عند عدد حقيقي)

ليكن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ (الشكل1) و ليكن التمثيل البياني للدالة$g(x) = \frac{1}{x-1}$

(الشكل2)





نلاحظ أن (C_f) يقترب قـدر مانريد من المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ كلما إقترب x أكثر من 3 وأن (C_g) يقترب قـدر مانريد من المستقيم ذو المعادلة$x = 1$ كلما إقترب x أكثر من 1 نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة$x = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_g) موازي لمحور التراتيب.

نقترح في البداية
أمثلة حول
حساب النهايات
عندما $x \mapsto | \quad |$
ثم عندما $x \overset{>}{\to} x_0$
ثم عندما $x \overset{<}{\to} x_0$
تعديل
2008/2009
نكتفي بدراسة
دوال مجموعة
تعريفها معطاة

اعــادة الاستثمــار

تعريف:

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن a عدد حقيقي إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند a هي $+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x = a$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) موازي لمحور التراتيب

تطبيق: أحسب $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$، أعـط تفسير بياني لهذه النهاية

الحل:

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (حسب المبرهنة 1) ونستنتج أن منحنى الدالة $\frac{1}{x^2}$ يقبل محور الفواصل مستقيم مقارب ته

تمارين من رقم الى رقم الصـــفحة

نقترح في البداية

أمثلة حول

حساب النهايات

عندما $x \mapsto | \quad |$

ثم عندما $x \overset{>}{\rightarrow} x_0$

ثم عندما $x \overset{<}{\rightarrow} x_0$

تعديل

2008/2009

نكتفي بدراسة

دوال مجموعة

تعريفها معطاة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....

مذكرة
رقم
03

الميدان: التحليل **الأستاذ: عبد الله علي** **المستوى:** 2ر,2ت ر ,2 ع ت .

الوحدة التعليمية: النهايات **تاريخ:**

موضوع الحصة: حساب نهاية والسلوك التقاربي لمنحنى دالة. **المدة:**

الوسائل المستخدمة: الكتاب المدرسي، السبورة

الكفاءات القاعدية: حساب نهاية دالة عندما يؤول الى $+\infty$ او $-\infty$ او عند x_0 - التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما x يؤول x_0 - معرفة شرط وجود مستقيم مقارب للمنحني يوازي أحد محوري المعلم

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق

الانطلاق

مفهوم نهاية منتهية عند مالإنهاية

أ) نهاية منتهية عند مالإنهاية

نشاط4 من الكتاب المدرسي

1_ $h(x) = \frac{2x+1}{x}$ ومنه $h(x) = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x}$ ومنه $h(x) = 2 + \frac{1}{x}$

3_ إكمال الجدول:

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7	x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$	1.9	1.999	1.99999	1.9999999	$h(x)$	2.1	2.001	2.00001	2.0000001

4_ نلاحظ من الجدول كلما أخذت $|x|$ قيم كبيرة $h(x)$ من 2

5_ أ) ليكن $x > 10^5$ ومنه $0 < \frac{1}{x} \leq 10^{-5}$ ومنه $2 < \frac{1}{x} + 2 \leq 2 + 10^{-5}$ أي

$2 < h(x) \leq 2 + 10^{-5}$ ومنه $h(x) \epsilon]2; 2 + 10^{-5}]$

ب)ليكن $x \leq 10^{-5}$ ومنه $-10^{-5} \leq \frac{1}{x} < 0$ ومنه $2 - 10^{-5} \leq 2 + \frac{1}{x} < 2$ أي

$2 - 10^{-5} \leq h(x) < 2$ ومنه $h(x) \epsilon [2 - 10^{-5}; 2[$

6_ ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث

$2 < h(x) \leq 2 + e$ يكافيء $2 < 2 + \frac{1}{x} \leq 2 + e$ يكافيء $0 < \frac{1}{x} \leq e$ ومنه $x \geq \frac{1}{e}$ يكفي

أخذ $B = \frac{1}{e}$ 7_ تتم الإجابة عنه بنفس الطريقة في السؤال 6

خلاصة:

* بين لنا الجدول الأول أن $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة نقول في هذه الحالة أن نهاية h هي 2 عند $+\infty$ ونكتب:

*بين لنا الجدول الثاني أن $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيما سالبة وتكون $|x|$ جد كبيرة نقول في هذه الحالة أن نهاية h هي 2 عندالانهاية

ونكتب: $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2$

نقترح في البداية
أمثلة حول
حساب النهايات
عندما $x \mapsto |\quad|$
ثم عندما $x \overset{>}{\to} x_0$
ثم عندما $x \overset{<}{\to} x_0$
تعديل
2008/2009
نكتفي بدراسة
دوال مجموعة
تعريفها معطاة

المعارف

تعريف:

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:إذا كان $x > B$ يكون $0 \leq |f(x) - l| \leq e$

ونكتب$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

مثال إثبات أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

ليكن eعدد حقيقي موجب تماما بحيث: $0 \leq \left|\frac{2x+}{x} - 2\right| < e$

$0 \leq \left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| < e$ يكافيء $0 \leq \left|\frac{1}{x}\right| < e$ ومنه $|x| > \frac{1}{e}$ ومنه يكفي أخذ$B = \frac{1}{e}$ وبذالك نجد

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

مبرهنة2:

a عدد حقيقي نقبل بدون برهان النتائج التالية

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+a} = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+a} = 0$

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل(التفسير البياني لنهاية منتهية عندما إلا نهاية)

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن b عدد حقيقي

_القول أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y = b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ يعني أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

_ القول أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y = b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ يعني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

مثال ليكن$h(x) = 2 + \frac{1}{x}$ وليكن تمثيلها البياني (C_h) في (الشكل3)

نلاحظ كلما أخذ $|x|$ قيم كبيرة كلما إقترب منحنى الدالة hمن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ وعليه

يسمى هذا المستقيم مستقيم مقارب ل(C_h) عند $+\infty$ عند $-\infty$

تطبيق:

نعتبر الدالة $f(x) = -4 + \frac{1}{(x-3)}$ المعرفة على $R - \{3\}$ و(C_f) تمثيلها البياني في معلم$0; \vec{i}; \vec{j}$

* أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفه .ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟

نقترح في البداية

أمثلة حول

حساب النهايات

عندما $x \mapsto |\quad|$

ثم عندما $x \overset{>}{\to} x_0$

ثم عندما $x \overset{<}{\to} x_0$

تعديل

2008/2009

نكتفي بدراسة

دوال مجموعة

تعريفها معطاة

اعادة الاستثمار

الحل: لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = +\infty$.ستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ مستقيم مقارب ل (C_f) موازي لمحور التراتيب لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$. ستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 4$ مستقيم مقارب ل (C_f) موازي لمحور الفواصل عند $+\infty$ وعند $-\infty$

التمرين رقم الصـــــــــــــفحة

نقترح في البداية أمثلة حول حساب النهايات عندما $x \mapsto |\quad|$ ثم عندما $x \overset{>}{\to} x_0$ ثم عندما $x \overset{<}{\to} x_0$

تعديل 2008/2009 نكتفي بدراسة دوال مجموعة تعريفها معطاة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....

الميدان: التحليل

الأستاذ: عبد اللّه علي

المستـــوى: 2ر,2ت ر ,2 ع ت .

الوحدة التعليمية: النهايات

تاريـــخ:

موضوع الحصة: حساب النهايات.

المــــدة:

الوسائل المستخدمة: الكتاب المدرسي ،السبورة

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال النظريات الأولية(المجموع؛ الجُداء؛ المقلوب؛ حاصل القسمة) لحساب نهايات

مذكرة رقم 04

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق

المعارف

ب)المبرهنات الأولية على النهايات

f و g دالتان .a يمثل عدد حقيقي أو$+\infty$أو $-\infty$ نقبل بدون برهان المبرهنات التالية

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\epsilon R$	$l\epsilon R$	$l\epsilon R$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\epsilon R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\epsilon R$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\epsilon R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\epsilon R$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\epsilon R^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

نهاية الجذر التربيعي لدالة : f

دالة موجبة و l عدد حقيقي موجب

*إذا كانت $\mathrm{l}_{x\to a} f(x) = l$ فإن $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

* إذا كانت $\lim_{x\to a}(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = +\infty$

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من إستنتاج النهايات بحالات عدم التعين

يطلب تبرير قواعد حساب النهايات عند استعمال النظريات الأولية، مع الحرص على التطبيق السليم لها من قبل التلميذ،

2008/2009

نكتفي بدراسة دوال مجموعة تعريفها معطاة

المعارف

إعادة الاستثمار

تطبيق: أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)،\ \lim_{x\to-\infty}(x^3+2)\ ،\ \lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -2}\left(\frac{3}{x^2-4}\right)\ ،\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{-x^2-3}\right)$$

تعريف: القول أن نهاية الدالة $\boldsymbol{f}$ عند $\boldsymbol{x_0}$ هي $\boldsymbol{l}$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\boldsymbol{e}$

، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما $\boldsymbol{\alpha}$ بحيث:إذا كان $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}| <$ يكون $\mathbf{0} \le$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{l}| < \boldsymbol{e}$

لإثبات أن $\lim_{x\to2}(3x-5)=1$ يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ،يوجد

على الأقل عدد حقيقي موجب تماما $\boldsymbol{\alpha}$ بحيث:إذا كان $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x}-\mathbf{2}| < \boldsymbol{\alpha}$ يكون $\mathbf{0} \le$

$|(3x-5)-\mathbf{1}| < \boldsymbol{e}$

$\mathbf{0} \le |(3x-5)-\mathbf{1}| < \boldsymbol{e}$ يكافيء $\mathbf{0} \le |3(x-2)| < \boldsymbol{e}$ ومنه $\mathbf{0} \le |x-2| < \frac{\boldsymbol{e}}{\mathbf{3}}$

وعليه يكفي أخذ $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{e}}{\mathbf{3}}$ ومنه $\lim_{x\to2}(3x-5)=1$

تمارين من رقم 24 الى رقم 48 الصـــــفحة 133 ، 137

يطلب تبرير قواعد
حساب النهايات
عند استعمال
النظريات الأولية،
مع الحرص على
التطبيق السليم لها
من قبل التلميذ،

2008/2009
نكتفي بدراسة
دوال مجموعة
تعريفها معطاة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....

مذكرة
رقم
05

الميدان: التحليل

الأستاذ: عبد الله علي

المستـــوى: 2ر,2ت ر ,2 ع ت .

الوحدة التعليمية: النهايات

تاريـــخ:

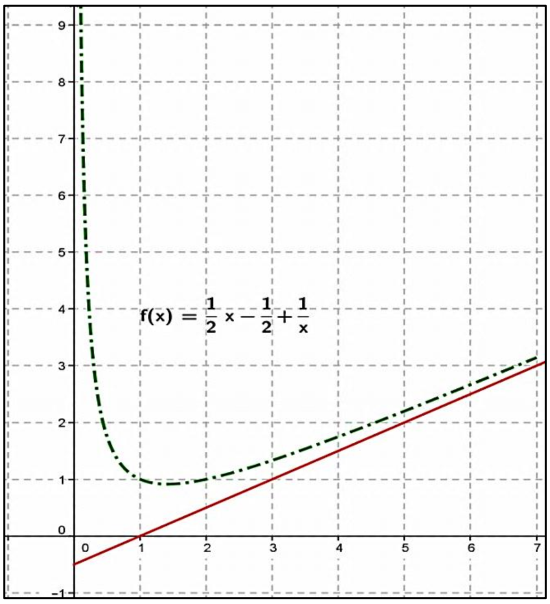
موضوع الحصة: النهايات والسلوك التقاربي لمنحنى دالة..

المــــدة:

الوسائل المستخدمة: الكتاب المدرسي ،السبورة

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب - البحث عن مستقيم مقارب مائل.

مراحل الدرس	**الأنشطة المرافقة لكل مرحلة**	الزمن	توجيهات -تعاليق
الانطلاق	**نشـــــــــاط 5 :** لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$ وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و P نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x . • أحسب المسافة MP • أحسب $\lim_{x\to+\infty} MP$ • باستعمال راسم المنحنيات أرسم (C_f) و (Δ) في نفس المعلم ،ماذا تلاحظ ؟ **الحـــــــل:** $MP=\sqrt{(y_m-y_p)^2+0}$ $MP=\lvert y_m-y_p\rvert$ $MP=\left\lvert f(x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert$ $MP=\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert$ $\lim_{x\to+\infty} MP=\lim_{x\to+\infty}\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert=0$ نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقترب من المستقيم (Δ)لما يؤول x إلى $+\infty$ نقول في هذه الحالة أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$  		يمكن استعمال حاسبة بيانية لتخمين وجود مستقيم مقارب بالبحث المتكرِّر عن معادلته) التي تكون من الشكل $y=ax+b$ ثم تبريرها فيما بعد بالحساب 2008/2009 نكتفي بدراسة دوال مجموعة تعريفها معطاة

المعـارف

تعريف : ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$ وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ، القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ يعني أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$

ملاحظة إذا كانت f دالة بحيث $f(x) = (ax + b) + g(x)$ وكانت $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

فإنه من الواضح أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ وبالتالي المستقيم ذو المعادلة

$y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$

تمرين(45 ص136 من الكتاب المدرسي)

البحث عن المستقيم المقارب المائل

نتيجة1: إذا كان المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$

2) نفرض أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$

عندئذ يكون لدينا $\lim_{x\to+\infty}[(f(x) - ax) - b] = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] =$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

نتيجة2 : إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

نتيجة: ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$ يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$ على الترتيب) إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$

(على الترتيب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$)

يمكن استعمال
حاسبة بيانية
لتخمين وجود
مستقيم مقارب
بالبحث المتكرِّر
عن معادلته) التي
تكون من الشكل
$y = ax + b$
ثم تبريرها فيما بعد
بالحساب

2008/2009
نكتفي بدراسة
دوال مجموعة
تعريفها معطاة

اعـادة الاستثمار

تمرين

لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{2\}$ كما يلي $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$ و(C_f) تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم

أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تحديد معادلته

الحل

لدينا $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=+\infty\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=-\infty\right)$$

نستنتج إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$ و $+\infty$

نبحث عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{1++\frac{2}{x}}=1$$ و

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)=1$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$

بنفس الطريقة نثبت أنه مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$

تمارين من رقم الى رقم الصـــفحة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....

مذكرة
رقم
06

الميدان: التحليل
الوحدة التعليمية: النهايات
موضوع الحصة: دراسة دالة.
الوسائل المستخدمة: الكتاب المدرسي ،السبورة
المكتسبات القبلية:
الكفاءات القاعدية: دراسة دوال كثيرة الحدود ودوال تناظرية .

الأستاذ: عبد اللّه علي

المستـــوى: 2ر,2ت ر ,2 ع ت .
تاريـــخ:
المــــدة:

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق
العــرض	**دراسة دالة** نقترح فيما يلي مخططا لدراسة دالة كما انه يمكن إجراء تغيير جزئي على الترتيب المقترح أو إلغاء بعض المراحل , وذلك حسب طبيعة الدالة المدروسة **مخطط دراسة دالة:** 1) مجموعة التعريف - تحديد مجموعة التعريف إذا لم تكن أعطيت في النص - دراسة شفعية الدالة أو دوريتها بهدف تقليص الدراسة 2)حساب النهايات عند حدود مجال التعريف 3)دراسة إتجاه تغير الدالة - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الإشتقاق - دراسة إشارتها وإستنتاج إتجاه تغير الدالة - تحديد القيم الحدية في حالة وجودها 4)تتشكيل جدول التغيرا ت 5)تحديد المستقيمات المقاربة 6)التمثيل البياني للدالة - رسم المستقيمات المقاربة - تمثيل بعض النقاط المساعدة (النقط الحدية, نقاط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات) - رسم المماسات المطلوبة في النص - رسم المنحنى		و تختار لذلك أمثلة لدوال كثيرة حدود ودوال تناظرية ودوال ناطقة أخرى. هذا الجزء المضلل لا يعني ع تج توضح حالات عدم التعيين بأمثلة مختارة، ونذكر هنا بأنّ التركيز على تقنيات الحساب الجبري في تحويل عبارة أمر يساعد التلميذ على تجاوز الصعوبات التي يمكن أن تعترضه في إزالة حالات عدم التعيين. 2008/2009ة نكتفي بدراسة دوال مجموعة تعريفها معطاة

إعـادة الاستثمار

دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

لتكن f دالة للمتغير الحقيقي x حيث $f(x) = -x^3 + 3x$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) بين أن f دالة فردية .

2) أدرس تغيرات االدالة f .

3) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f)عند النقطة 0 .

4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

5) أرسم (Δ)و(C_f) في نفس المعلم .

دراسة دالةتناظرية

لتكن f دالة للمتغير الحقيقي x معرفةعلى $R - \{1\}$بـ

$f(x) \frac{3}{x-1}$ و (C_f)تمثيلها البياني .

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات .

4) عين معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

5) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f)

و تختار لذلك أمثلة لدوال كثيرة حدود ودوال تناظرية ودوال ناطقة أخرى.

هذا الجزء المضلل لا يعني ع تج توضح حالات عدم التعيين بأمثلة مختارة، ونذكر هنا بأنّ التركيز على تقنيات الحساب الجبري في تحويل عبارة أمر يساعد التلميذ على تجاوز الصعوبات التي يمكن أن تعترضه في إزالة حالات عدم التعيين.

2008/2009ة

نكتفي بدراسة دوال مجموعة تعريفها معطاة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....