1. التحويلات النقطية:

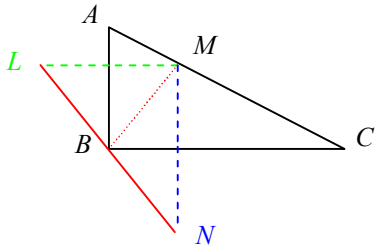
نشاط 1 : 102 صفحة 247

ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره $[AC]$. النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى $[LN]$. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

حل النشاط :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة $[LM]$

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن $BL = BM$

و (AB) يكون منصف الزاوية $L\hat{B}M$ أي : $L\hat{B}M = 2 \times A\hat{B}M$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة $[MN]$

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن $BN = BM$

و (BC) يكون منصف الزاوية $M\hat{B}N$ أي : $M\hat{B}N = 2 \times M\hat{B}C$

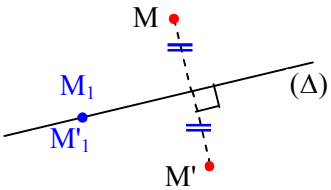
وبالتالي : $BN = BL$

ولدينا : $L\hat{B}N = L\hat{B}M + M\hat{B}N = 2 \times A\hat{B}M + 2 \times M\hat{B}C = 2(A\hat{B}M + M\hat{B}C) = 2\,A\hat{B}C = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة. وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة $[LN]$.

1) تعاريف :

• تعريف التناظر المحوري :

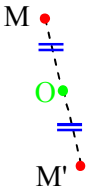


(Δ) مستقيم ثابت ، **التناظر المحوري** بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تكون منطبقة على M ،

وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة $[MM']$.

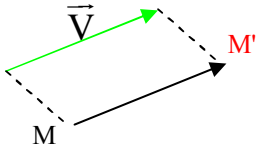
• تعريف التناظر المركزي :



O نقطة ثابتة من المستوي ، **التناظر المركزي** بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

تكون النقطة O منتصف القطعة $[MM']$.

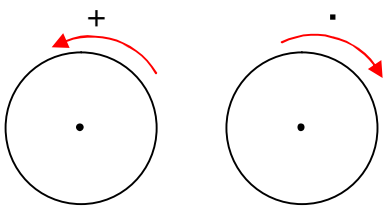
• تعريف الانسحاب :



$\vec{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، **الانسحاب** الذي شعاعه $\vec{V}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

ملاحظة : إذا كان $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي $ABMM'$ هو متوازي أضلاع.

• **توجيه المستوي :**



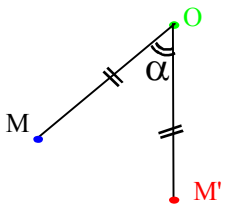
لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه **المباشر** (أو **الاتجاه الموجب**) ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه **غير المباشر** (أو **الاتجاه السالب**).

تعريف : توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

ملاحظة : لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة).

• **تعريف الدوران :**

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و α زاوية معلومة ، **الدوران** الذي مركزه النقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :



إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.

وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : $OM' = OM$ و $\widehat{MOM'} = \alpha$

والثلاثية $(O\ ,\ M\ ,\ M')$ مباشرة.

ملاحظة : في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

2) خواص :

• **النقط الصامدة :**

تعريف : نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

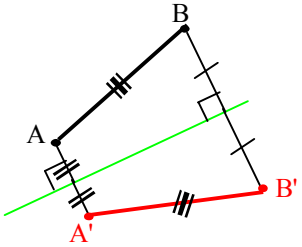
أمثلة :

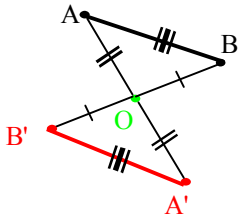
- ✓ **التناظر المحوري** الذي محوره المستقيم (Δ): كل نقط المستقيم (Δ) هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✓ **التناظر المركزي** الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✓ **الانسحاب** الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✓ **الدوران** الذي مركزه O وزاويته α حيث : $\alpha \neq k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.
- ✓ **ملاحظة :** إذا كانت $\alpha = 2k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

• **حفظ المسافات (التقايس)**

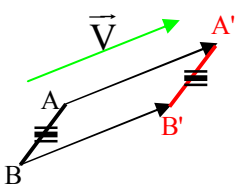
تعريف : التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية $(A\ ,\ B)$ الثنائية النقطية $(A'\ ,\ B')$ حيث : $A'B' = AB$. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.

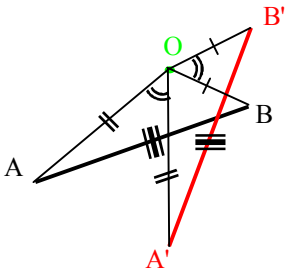
أمثلة :





- ✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالتناظر المحوري** الذي محوره المستقيم (Δ) : لدينا : $A'B' = AB$
- ✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالتناظر المركزي**





الذي مركزه النقطة O : لدينا $A'B' = AB$

- ✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالانسحاب** الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$: لدينا $A'B' = AB$
- ✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **الدوران** الذي مركزه O وزاويته α : لدينا $A'B' = AB$

مبرهنة : كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس (يحافظ على المسافات).

نتيجة : يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.

ملاحظة : إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- **حفظ أقياس الزوايا :**

مبرهنة : صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- **حفظ الاستقامية :**

مبرهنة : إذا كانت A ، B ، C في استقامية فإن صورها A' ، B' ، C' ، بتقايس ، تكون في استقامية.

نتائج :

- صورة مستقيم بتقايس (تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران) هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم (D) بتناظر محوري بالنسبة إلى (Δ) هي المستقيم (D') حيث :

إذا كان (D) و (Δ) متوازيين فإن (D) يوازي (D') وإذا كان (D) و (Δ) متقاطعان فإن (D) يقطع (D') في نفس النقطة.

- صورة مستقيم (D) بدوران هي مستقيم (D') حيث إحدى الزوايا المحصورة بين (D) و (D') تقايس زاوية الدوران.

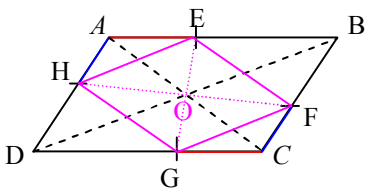
تطبيق 1 : 103 صفحة 247

$ABCD$ متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[AD]$ على الترتيب حيث : $AE = CG$ و $AH = CF$.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي $EFGH$ ؟

الحل :



أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D :

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن قطراه $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب) طبيعة الرباعي $EFGH$:

الطريقة 1 : $(AE) // (GC)$ و $AE = GC$ إذن الرباعي $AECG$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[AC]$ ، $[EG]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

$(FC) // (AH)$ و $AH = FC$ إذن الرباعي $AFCH$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[AC]$ ، $[HF]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

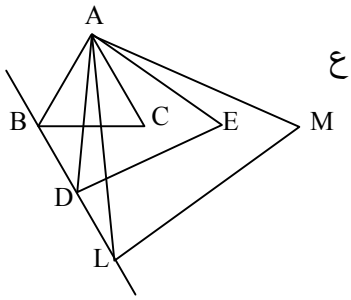
إذن $[HG]$ هي صورة $[EF]$ بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : $(HG) // (EF)$

والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : $HG = EF$ وبالتالي الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 : نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

ونحصل على النتيجتين : $EH = FG$ و $HG = EF$.

تطبيق 2 : 105 صفحة 248



يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM كل منها متقايسة الأضلاع حيث النقط B ، D ، L في استقامية. بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.

الحل :

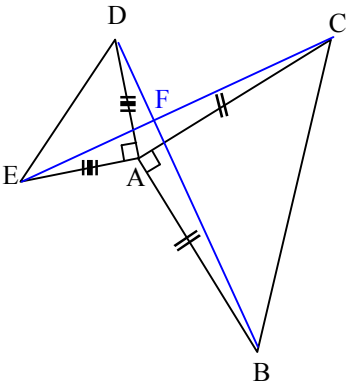
بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : $AC = AB$ ، $AE = AD$ ، $AM = AL$

و $B\hat{A}C = D\hat{A}E = L\hat{A}M = 60°$

ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته $60°$.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.

تطبيق 3 : 107 صفحة 248 (نفس معطيات التمرين 95)



ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ، $[CE]$ و $[BD]$ متقاطعان في النقطة F.

بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

الحل :

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته $90°$.

إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران

ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و (CE) تقايس زاوية الدوران التي هي $90°$ ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

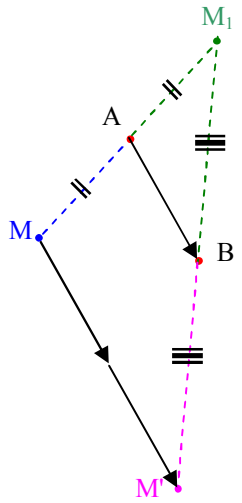
تطبيق 4 : 109 صفحة 248 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.



الحل :

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : $(AB) // (MM')$ و $MM' = 2\,AB$

بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$.

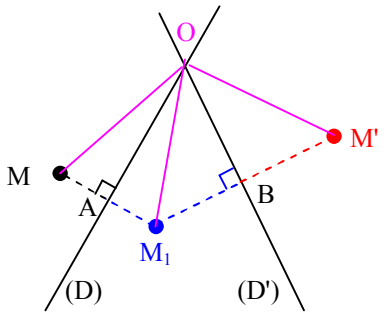
تطبيق 5 : 110 صفحة 248 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

الحل :



أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $M\hat{O}A = A\hat{O}M_1$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $M_1\hat{O}B = B\hat{O}M'$ ومنه : $OM = OM'$

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $A\hat{O}B = \alpha$. $M\hat{O}M' = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M' = 2\,A\hat{O}M_1 + 2\,M_1\hat{O}B = 2\,A\hat{O}B = 2\alpha$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : $OM = OM'$ و $M\hat{O}M' = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.

2. الزوايا والدائرة :

الكفاءات المستهدفة : الزوايا والدائرة .

نشاط 11 :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها $5\ cm$ ، و $[AB]$ قطر فيها ،

و M نقطة من الدائرة حيث $AM = 4\ cm$.

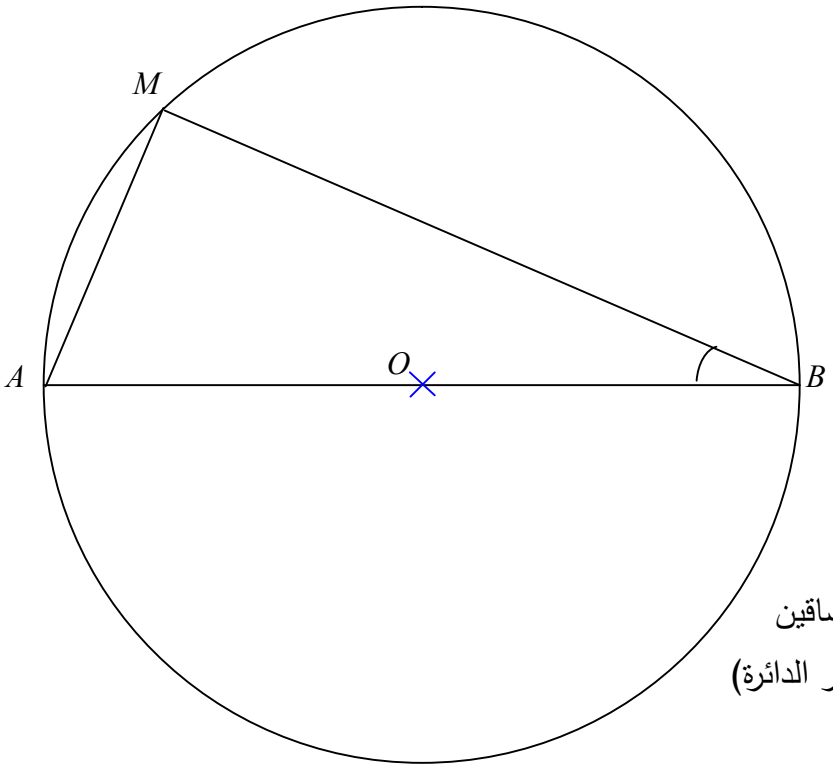
أ) باستعمال ال

ب) آلة الحاسبة والتدوير إلى $0,1$ أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .

ج) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.

د) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :



أ) حساب قيس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه $[AB]$ هو قطر للدائرة (C) .

ومنه : $\sin \widehat{ABM} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{10} = 0,4$

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى $0,1$ نجد :

$\widehat{ABM} = 23,6°$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$\widehat{MAB} = 90 - 23,6 = 66,4°$

ب) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : $OM = OA$ (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

$\widehat{MAO} = \widehat{AMO} = 66,4°$ و $\widehat{AOM} = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2°$

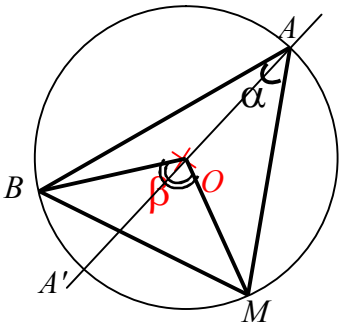
ج) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : $2 \times 23,6 = 47,2$ ومنه $\widehat{AOM} = 2\widehat{ABM}$

نشاط إضافي :

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة A'.

نضع $\widehat{MAB} = \alpha$ و $\widehat{MOB} = \beta$.



أ) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ ،

وعن قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$.

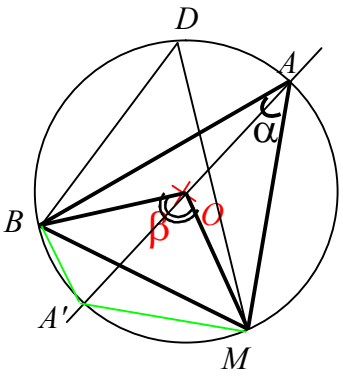
ب) استنتج العلاقة بين α و β.

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α،

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

د) D نقطة من القوس الكبرى $\overset{\frown}{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

حل النشاط :



أ) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا $OA = OM = OB$ (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$:

لدينا $\widehat{MOA'}$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\widehat{MOA'} = \widehat{MAO} + \widehat{OMA}$ وبما أن $\widehat{MAO} = \widehat{OMA} = \widehat{MAA'}$

فإن : $\widehat{MOA'} = 2\widehat{MAA'}$

- قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$:

لدينا $\widehat{BOA'}$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{OBA}$ وبما أن $\widehat{BAO} = \widehat{OBA} = \widehat{BAA'}$ فإن : $\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$.

ب) استنتاج العلاقة بين α و β.

$\widehat{BOM} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OM}$ ومنه : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAA'} + 2\widehat{A'AM}$ إذن : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAM}$

وبالتالي : $\beta = 2\alpha$

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $\widehat{BA'M} = 180° - \frac{1}{2}\beta$ و $\widehat{BA'M} = 180° - \alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

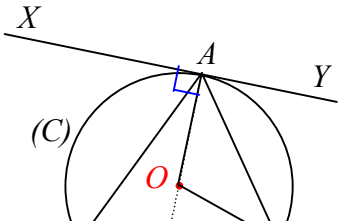
$\widehat{BA'M} + \alpha = 180°$ أي : $\widehat{BA'M} + \widehat{BAM} = 180°$ ومنه : $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ زاويتان متكاملتان .

د) D نقطة من القوس الكبرى BM استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

مما سبق نستنتج أن : $\widehat{BDM} = \frac{\beta}{2} = \alpha$ ومنه : $\widehat{BDM} = \widehat{BAM}$

مفردات ومصطلحات :

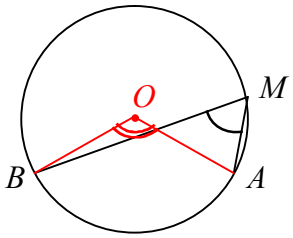
(C) دائرة مركزها O ، و A ، B ، M ، N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى $[AN]$.



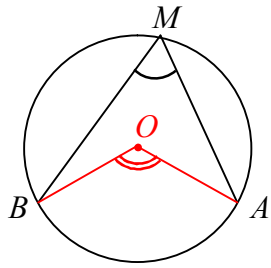
- القطعة $[AN]$ تسمى **قطرا** ، وكل من القطع $[AB]$ ، $[AM]$ ، $[BM]$ تسمى **وترا** في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى **مماسا** للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).
- الزاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية **مركزية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{XAB}$ تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AB}$.

مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

مثال : A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.

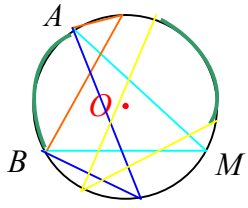


$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

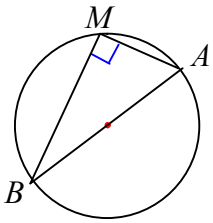


نتائج :

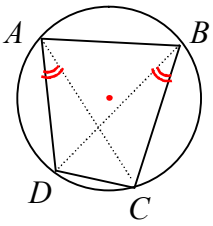
1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل 1)
2) إذا كانت القطعة $[AB]$ قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A و B ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل 2)
3) تكون رؤوس الرباعي المحدب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا كانت : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. (شكل 3)
4) يكون الرباعي المحدب $ABCD$ دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل 4)



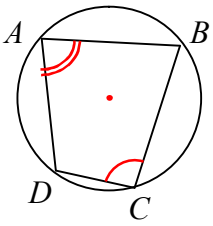
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)

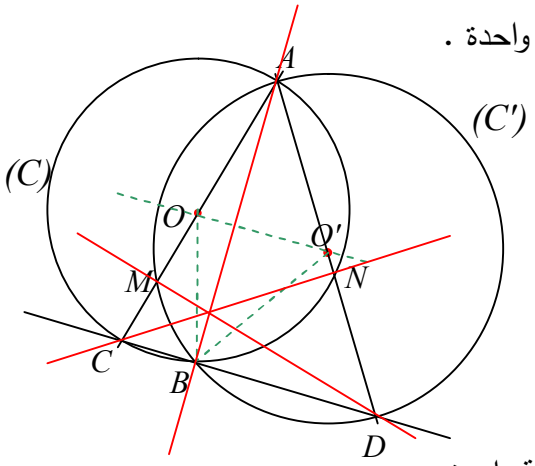
تطبيقات :

تمرين : 75 صفحة 244

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A و B ،

$[AC]$ قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و $[AD]$ قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

1. أرسم شكلا مناسبا .
2. بين أن النقط C ، B ، D في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .



الحل :

2) تبيان أن النقط C ، B ، D في استقامية .

$\widehat{ABC} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$\widehat{ABD} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $\widehat{CBD} = 180°$

وبالتالي : $(CB) // (CD)$ ومنه : النقط C ، B ، D في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\widehat{ANC}$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\widehat{ABD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

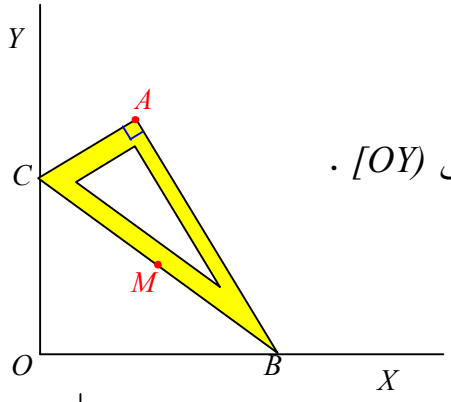
ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\widehat{AMD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

تمرين : 81 صفحة 245

$[OX)$ و $[OY)$ نصفا مستقيمين متعامدان في النقطة O ،

نفترض ABC كوسا ونحركه بحيث تتحرك B على $[OX)$ وتتحرك C على $[OY)$.

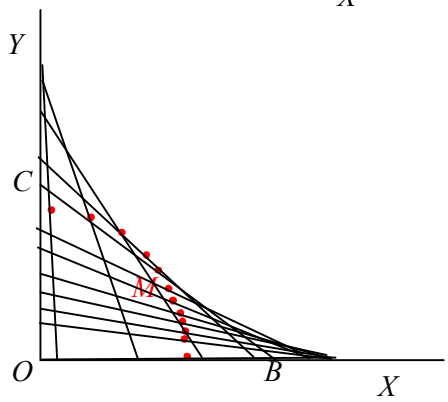


أ) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$ ؟

ب) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة A ؟

(إرشاد : بين أن الزاوية $\widehat{AOB}$ ثابتة)

الحل :



أ) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$:

نرمز بـ (e) مجموعة النقط (المسار) المطلوبة ،

نرسم عدة نقط ونستغلها لتخمين النتيجة :

نلاحظ في هذه الحالة أن المسار هو عبارة عن ربع دائرة مركزها O

ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$.نرمز له بالرمز $\overset{\frown}{EF}$

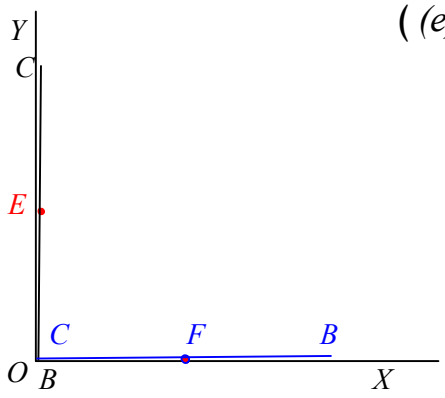
لنبرهن أن $(e) = \overset{\frown}{EF}$:

ولهذا نتبع المراحل التالية :

1)نبين أن (e) مجموعة غير خالية

2)نبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ (أي (e) محتواة في $\overset{\frown}{EF}$)

3)نبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e) (أي $\overset{\frown}{EF}$ محتواة في (e))



- لنبين أن (E) مجموعة غير خالية

إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$

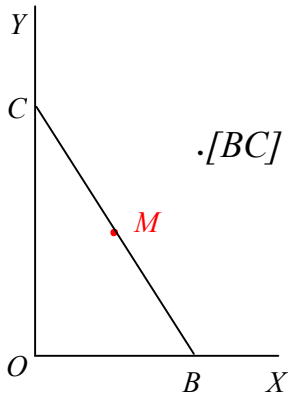
والنقطة E منتصف $[BC]$ توجد في $[OY)$ وهي تنتمي إلى (e)

إذن : $(e) \neq \Phi$

إذا أخذنا C منطبقة على O فإن النقطة B تكون في $[OX)$

والنقطة F منتصف $[BC]$ توجد في $[OX)$ وهي تنتمي إلى (e)

- لنبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$



لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة (e) .

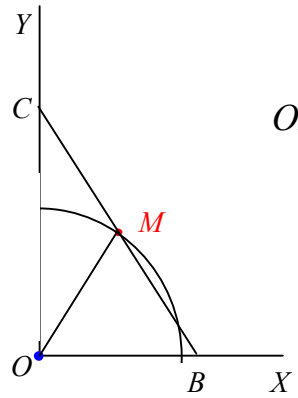
توجد نقطة B من $[OX)$ وتوجد نقطة C من $[OY)$ بحيث : M تكون منتصف القطعة $[BC]$.

المثلث COB قائم في B و النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ ، إذن : $OM = \frac{1}{2}BC$

ومنه النقطة M تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $\frac{BC}{2}$

وبالتالي : $(e) \subset \overset{\frown}{EF}$ . . . (1)

- لنبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e)



لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة $\overset{\frown}{EF}$

نعين نقطة B من $[OX)$ و نعين نقطة C من $[OY)$ حيث : $OB = OC = OM$

لنبرهن أن النقط B ، M ، C في استقامية.

لدينا النقط B ، O ، C تنتمي إلى الدائرة ذات المركز M

ومنه : $B\hat{M}C = 2B\hat{O}C = 180°$ لأن : $B\hat{O}C$ زاوية محيطية

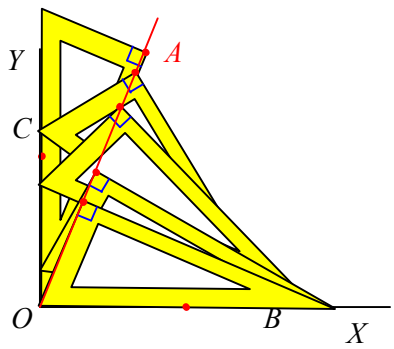
و $B\hat{M}C$ زاوية مركزية وتحصران نفس القوس.

ومنه : النقط B ، M ، C في استقامية.

إذن : النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ وبالتالي : النقطة M تنتمي إلى المجموعة (e) .

أي : $\overset{\frown}{EF} \subset (e)$ . . . (2)

خلاصة : من (1) و (2) نستنتج أن : $(e) = \overset{\frown}{EF}$



ب) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة A :

نسمي (F) المسار المطلوب ، وهي مجموعة النقط A بحيث

تكون النقطة B من $[OX)$ والنقطة C من $[OY)$ و ABC يمثل كوسا

أي مثلثا قائما في A . نضع الزاوية $A\hat{C}B$ للكوس هي α

نلاحظ أن النقطة A هي نقطة من قطعة مستقيمة $[GH]$.

حيث H ، G ، O في استقامية و $G\hat{O}B = A\hat{C}B = \alpha$

• لنبرهن أن (F) غير خالية :

إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$.

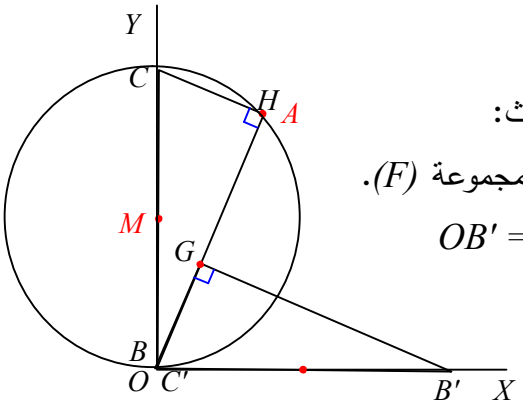
نرسم الدائرة ذات المركز M منتصف $[BC]$ ونعين النقطة H منها حيث: $\widehat{BCH} = \alpha$ ومنه المثلث القائم يعين كوسا إذن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (F).

نأخذ C' منطبقة على B و O ونعين النقطة B' من $[OX)$ حيث $OB' = BC$

نعتبر النقطة G المسقط العمودي للنقطة B' على (OH) .

لدينا : $\widehat{GC'B'} = \widehat{BCH} = \alpha$ إذن المثلث القائم $GB'C'$ يمثل كوسا

إذن النقطة G تنتمي إلى المجموعة (F). وبالتالي المجموعة (F) غير خالية :



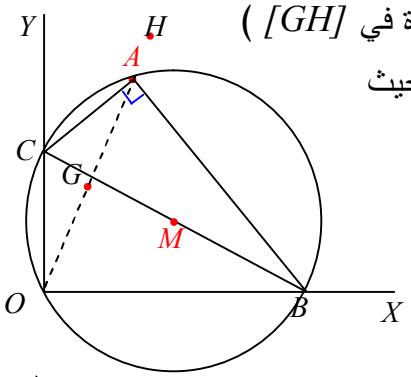
• لنبين أن كل نقطة A من (F) تنتمي إلى $[GH]$ (أي (E) محتواة في $[GH]$)

لتكن A نقطة من (F) أي : توجد النقطة B من $[OX)$ والنقطة C من $[OY)$ حيث ABC مثلثا قائما في A و $\widehat{ACB} = \alpha$

لدينا $ACOB$ رباعي دائري في الدائرة ذات القطر $[AB]$

ومنه $\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \alpha$ تحصران نفس القوس إذن A تنتمي إلى $[GH]$.

ومنه : $(F) \subset [GH]$



• لنبين أن كل نقطة A من $[GH]$ تنتمي إلى (F) (أي $[GH]$ محتواة في (E))

لتكن A نقطة من $[GH]$ ، H' المسقط العمودي للنقطة H على $[OY)$

ولدينا : $OG = HH'$ نعين نقطة C من $[OH']$ حيث $AC = OG$.

نعين نقطة B من $[OX)$ حيث $\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \alpha$

إذن الرباعي $ACOB$ دائري ومنه الزاويتان المتقابلتان $\widehat{COB}$ و $\widehat{CAB}$ متكاملتان

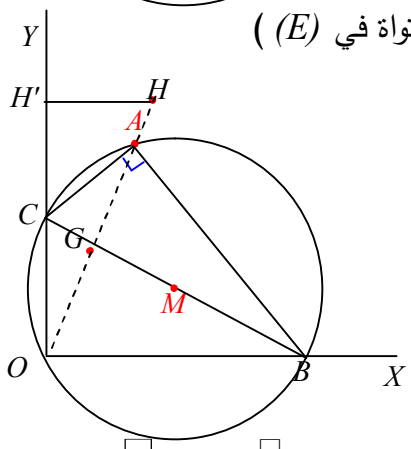
إذن المثلث ACB قائم في A .

لدينا المثلث القائم OHH' يمثل كوسا

وبمقارنته مع المثلث BAC لدينا : $HH' = AC$ و $\widehat{H'HO} = \widehat{ACB} = \alpha$ و $\widehat{HH'O} = \widehat{BAC} = 90°$

إذن المثلثان OHH' و BAC متقايسان ومنه BAC يمثل كذلك كوسا إذن النقطة A تنتمي إلى (F)

وبالتالي : $[GH] \subset (F)$



خلاصة : لدينا $(F) \subset [GH]$ و $[GH] \subset (F)$ إذن : $(F) = [GH]$.

الهندسة المستوية

الكفاءات المستهدفة

1. متوازي الأضلاع ومتوازيات الأضلاع الخاصة : المستطيل ، المربع ، المعين .
2. المثلثات الخاصة ، والمستقيمات الخاصة في مثلث .

3. الزوايا والدائرة .

4. مبرهنتا طاليس و فيثاغورس وعكس كل منهما ، و توظيفهما في حل مسائل هندسية .

5. النسب المثلثية .

6. المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة .

7. التحويلات النقطية .

3. المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

الكفاءات المستهدفة : المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة .

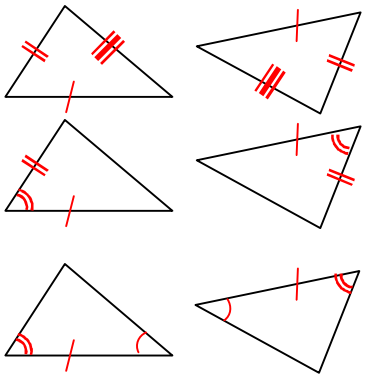
1) تقايس مثلثين :

تعريف : نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

ملاحظة : إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر.

نتيجة : المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.

خواص : (حالات تقايس مثلثين)



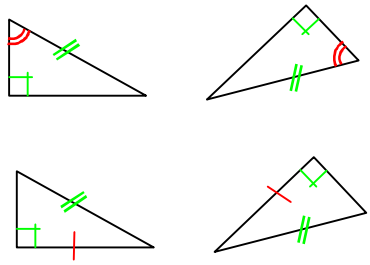
خاصية 1 : يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.

خاصية 2 : يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

خاصية 3 : يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

حالات خاصة : (تقايس مثلثين قائمين)

قائمان وتراهما BC و $B'C'$ متقايسان



خاصية 1 : يتقايس المثلثان ABC و $A'B'C'$ إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.

خاصية 2 : يتقايس المثلثان ABC و $A'B'C'$ إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

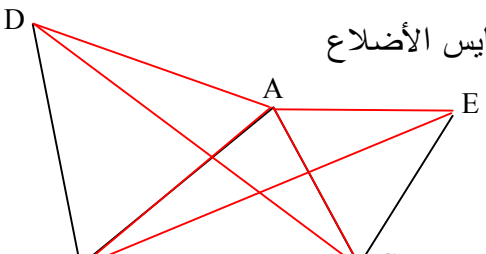
تطبيق 1 : 85 صفحة 245

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : $BE = CD$.

الحل :

لدينا : $\widehat{CAE} = \widehat{BAD} = 60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

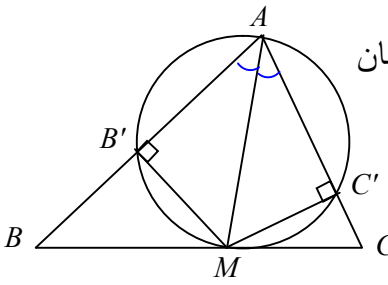


ومنه : $\widehat{CAE}+\widehat{CAB}=\widehat{BAD}+\widehat{CAB}$ إذن : $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$

ولدينا كذلك : $AB=AD$ و $AE=AC$

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : $BE=CD$.

تطبيق 2 : 96 صفحة 247



ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و $[BC]$ ، C' ، B' المسقطان العموديان للنقطة M على $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

الحل :

أ) بين أن المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

لدينا : المثلثان $AB'M$ ، $AC'M$ قائمان ولهما وتر مشترك $[AM]$ و $\widehat{B'AM}=\widehat{C'AM}$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $\widehat{AB'M}$ و $\widehat{AC'M}$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $AB'MC'$ إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر $[AM]$ ومركزها منتصف $[AM]$.

ج) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي $AB'MC'$ ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر $[AM]$ هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي $AB'MC'$ هو مربع.

نشاط :

ADE و $A'B'C'$ مثلثان حيث : $AD=A'B'$ و $AE=A'C'$ و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

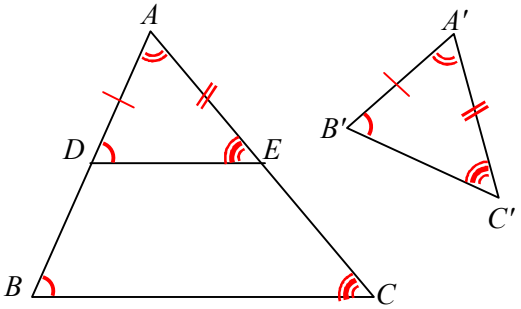
نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث $(DE)\ //\ (BC)$.

1) تحقق من تقايس المثلثين ADE و $A'B'C'$.واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

2) بين أن زوايا المثلثين $A'B'C'$ و ABC متقايسة مثنى ، مثنى.

3) هل المثلثين ADE و ABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

4) برهن أن : $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.



حل النشاط :

1) لدينا : $AD=A'B'$ و $AE=A'C'$ و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

إذن المثلثان ADE و $A'B'C'$ هما متقايسان

وبالتالي : $\widehat{D}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C'}$ و $DE=B'C'$

2) لدينا : $(DE)\ //\ (BC)$ إذن : $\widehat{D}=\widehat{B}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C}$ بالتماثل.

ومنه : $\widehat{B}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{C}=\widehat{C'}$ ولدينا $\widehat{A}=\widehat{A'}$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE و ABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث $A'B'C'$ هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

4) تبيان أن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

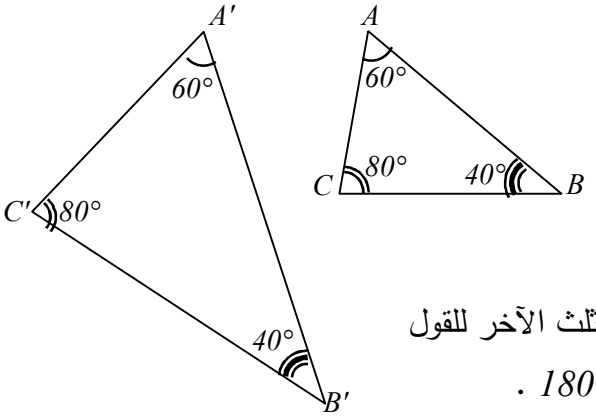
لدينا : $(ED)\ //\ (BC)$ وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

وبما أن : $AD = A'B'$ و $AE = A'C'$ و $DE = B'C'$ فإن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.

2)تشابه مثلثين :

تعريف : نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زاويا الآخر.

مثال : المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.



الرؤوس المتماثلة : A B C

الأضلاع المتماثلة : A' B' C'

$[AB]$ و $[A'B']$ ؛ $[AC]$ و $[A'C']$ ؛ $[BC]$ و $[B'C']$.

ملاحظات :

1 – يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$.

2 – إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 – المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

مبرهنة : المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

نسبة تشابه مثلثين :

تعريف : ليكن ABC و $A'B'C'$ مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k حيث : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

ملاحظات : لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C'$ حيث $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

1 – $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C'$.

2 – إذا كان $0 < k < 1$ فإن المثلث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .

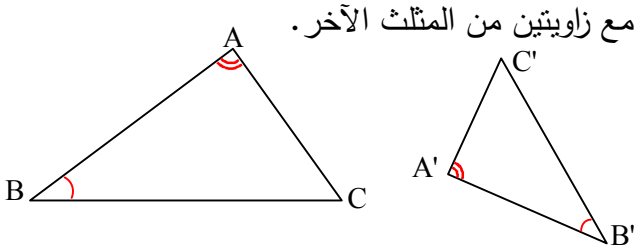
3 – إذا كان $k > 1$ فإن المثلث $A'B'C'$ هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .

4 – إذا كان $k = 1$ فإن المثلث $A'B'C'$ يقايس المثلث ABC .

خواص : (حالات تشابه مثلثين)

خاصية 1: يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.

مثال : بما أن : $\widehat{A} = \widehat{A'}$ و $\widehat{B} = \widehat{B'}$



فإن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهين .

ملاحظة : المثلث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلث ABC

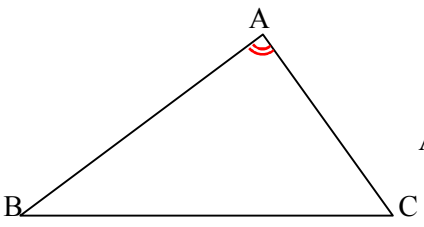
خاصية 2 : يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.

مثال : $\widehat{A} = \widehat{A'}$ و $A'C' = 1,5\ cm$ و $A'B' = 2\ cm$

و $AB = 4\ cm$ و $AC = 3\ cm$

لدينا : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{2} = 2$ و $\frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{1,5} = 2$

إذن : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = 2$ ومنه المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان .



ملاحظة : المثلث ABC هو تكبير للمثلث $A'B'C'$ ونسبة التكبير هي 2 .

خاصية 3: يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

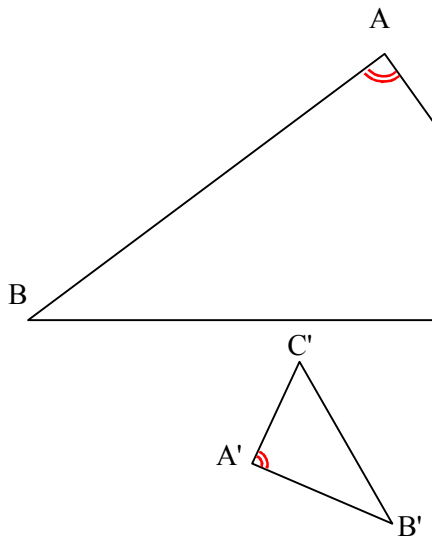
مثال : $A'C' = 1,5\ cm$ و $A'B' = 2\ cm$ و $B'C' = 2,4\ cm$

و $AC = 4,5\ cm$ و $AB = 6\ cm$ و $BC = 7,2\ cm$

لدينا : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{2} = 3$ و $\frac{AC}{A'C'} = \frac{4,5}{1,5} = 3$

و $\frac{BC}{B'C'} = \frac{7,2}{2,4} = 3$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 3$

إذن : المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان .



ملاحظة : المثلث ABC هو تكبير للمثلث $A'B'C'$ ونسبة التكبير هي 3 .

تطبيق : 90 صفحة 246

ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\frac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}$.

الحل :

أ) تبيان أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.

لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

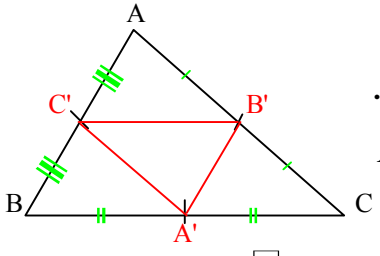
إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : $(A'B') \,//\, (AB)$ و $A'B' = AC' = BC'$

ومنه : الربعان $AB'A'C'$ و $BA'B'C'$ متوازيا أضلاع

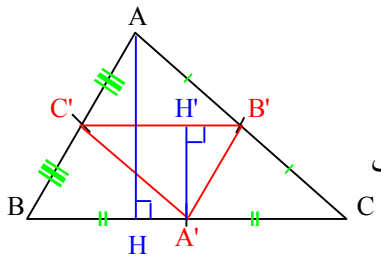
إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $\widehat{AB'C'} = \widehat{A'B'C'}$ و $\widehat{BA'C'} = \widehat{B'A'C'}$

ومنه : $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ إذن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C



C' ، B' ، A' $\quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .



ب) حساب النسبة $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}$.

H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و $(B'C')$ على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و $A'H'B'$ متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ أي : $\widehat{HBA}=\widehat{H'B'A'}$ ومنه $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AH}{A'H'}=\dfrac{BH}{B'H'}=2$ ومنه : $AH=2\,A'H'$.

مساحة$(A'B'C')\times 4=$ مساحة(ABC) $= 2\,AH \times BC = 2\,(2A'H')(2B'C') = 4(2A'H'\times B'C')$

إذن : $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}=4$.

4. المثلثات والمستقيمات الخاصة:

الكفاءات المستهدفة

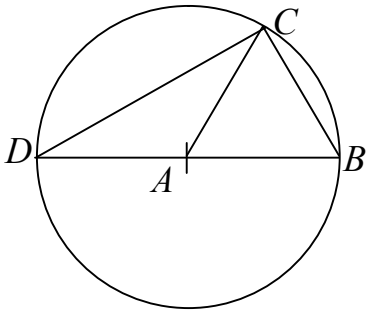
المثلثات الخاصة ، والمستقيمات الخاصة في مثلث .

نشاط 4 : أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط B ، C ، D حيث

$BC = AB$ و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : ACD ، ABC ، BCD

عين القياسين التاليين : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$.



حل النشاط:

المثلث ACD متساوي الساقين ، $AC = AD$ نصفي قطر الدائرة

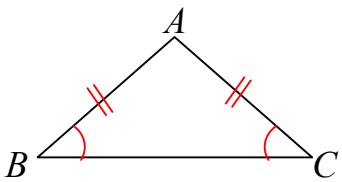
المثلث ABC متقايس الأضلاع ، $AC = AB = BC$.

المثلث BCD قائم في C .

$\widehat{BAC}=60^\circ$ و $\widehat{BCD}=90^\circ$

- **المثلثات الخاصة :**

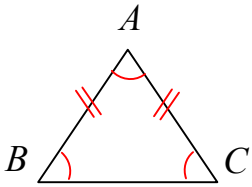
المثلث متساوي الساقين



فيه ضلعان متقايسان

$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$

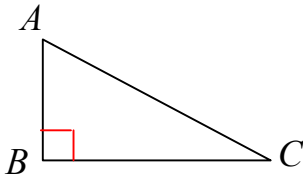
المثلث متقايس الأضلاع



أضلاعه متقايسة

$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\widehat{BAC}=60^\circ$

المثلث القائم



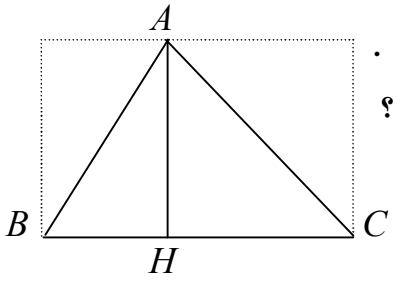
فيه زاوية قائمة

$\widehat{ABC}=90^\circ$

- **المستقيمات الخاصة في مثلث :**

نشاط 5 : ABC مثلث كيفي و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

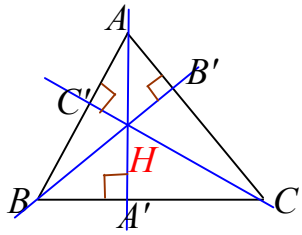
أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟



حل النشاط:

$s(ACH)=\frac{1}{2}AH.HC$ ، $s(ABH)=\frac{1}{2}AH.HB$

لدينا : $BH+CH=BC$ ومنه : $s(ABC)=\frac{1}{2}AH.BC$



- **الارتفاع** في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له
- ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة
- مساحة مثلث : $s(ABC)=\frac{1}{2}AA'.BC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}BB'.AC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}CC'.AB$

نشاط 6 :

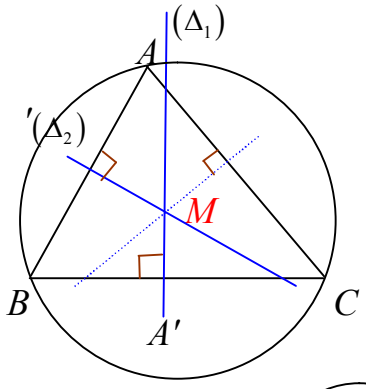
أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضلعين $[BC]$ و $[AB]$ على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

أ) بين أن محور الضلع $[AC]$ يشمل النقطة M .

ب) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C ، وارسمها.

ج) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .

د) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .



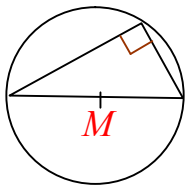
حل النشاط:

لدينا (Δ_1) محور $[BC]$ إذن : $MB=MC$

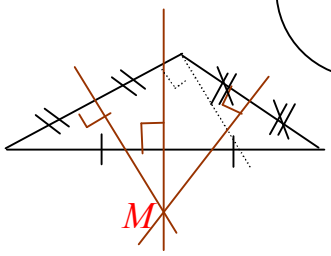
لدينا (Δ_2) محور $[AB]$ إذن : $MA=MB$

ومنه : $MA=MC$ معناه أن M هي نقطة من محور القطعة $[AC]$.

لدينا $MA=MB=MC$ وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C هو النقطة M .



موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A هو منتصف القطعة $[BC]$



تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .

- **المحور** هو محور أحد أضلاعه.
- محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)

نشاط 7 :

ABC مثلث كيفي ، A' ، B' ، C' منتصفات القطع $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين (AA') و (BB') في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان (AA') و (BB') يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى A' .

3. ما هي طبيعة الرباعي $BDCG$ ؟

4. استنتج $DC = 2\,GB'$ وأن النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$ و $(GC') // (BD)$.

5. بين أن النقط C ، G ، C' في استقامية .

6. بين أن $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

حل النشاط:

نسمي المستقيمين (AA') و (BB') المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان $[BC]$ و $[GD]$ متناصفتان إذن الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث ACD ، $(GB') // (DC)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AB'}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{GB'}{DC}$ ولدينا B' منتصف القطعة $[AC]$ إذن : $\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{2}$

إذن $DC = 2\,GB'$ و $AD = 2\,AG$ ومنه النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$.

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة $[AD]$ و C' منتصف القطعة $[AB]$ إذن : $(GC') // (BD)$.

الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع إذن $(BD) // (GC)$ ولدينا $(GC') // (BD)$ إذن $(GC') // (GC)$

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، C' في استقامية .

لدينا : $AG = GD$ و $GD = 2\,GA'$ إذن $AG = 2\,GA'$

لدينا : $BG = DC$ و $DC = 2\,GB'$ إذن $BG = 2\,GB'$

في المثلث ABD ، $(GC') // (BD)$ ومنه $\frac{AC'}{AB} = \frac{AG}{AD} = \frac{GC'}{BD} = \frac{1}{2}$ ، ومنه : $BD = 2\,GC'$

بما أن $BD = GC$ فإن : $GC = 2\,GC'$

- **المتوسط** في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.
- متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .
- (AA') و (BB') و (CC') متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :
- $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

نشاط 8 :

ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

أ) النقط A' ، B' ، C' المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (BC) ، (AC) ، (AB) على الترتيب .

بين $SA' = SB' = SC'$

ب) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

ج) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .

حل النشاط:

أ) نقارن بين المثلثين القائمين ASB' و ASC' لدينا

SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'} = \widehat{SAC'}$ إذن : $SB' = SC'$.

نقارن بين المثلثين القائمين BSA' و BSC' لدينا

SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'} = \widehat{SBC'}$ إذن : $SA' = SC'$.

وبالتالي : $SA' = SB' = SC'$

ب) نقارن بين المثلثين القائمين CSB' و $A'SC$ لدينا SC وتر مشترك ، $SA' = SB'$ إذن $\widehat{SCB'} = \widehat{SCA'}$

وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

ج) لدينا : $SA' = SB' = SC'$ إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط A' ، B' ، C' .

بما أن $(SA') \perp (BC)$ و $(SB') \perp (AC)$ و $(SC') \perp (BA)$

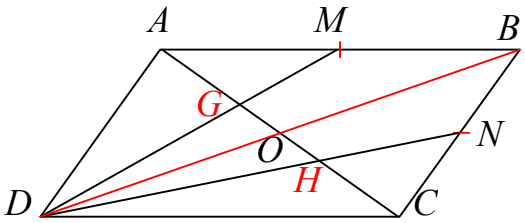
إذن (BC) و (AC) و (BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

- **المنصف** في مثلث هو منصف إحدى زواياه .
- المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

تمرين : رقم 41 صفحة 240

$ABCD$ متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب.

$[DM]$ و $[DN]$ يقطعان $[AC]$ في النقطتين G و H على الترتيب.



بين أن : $AG = GH = HC$.

حل التمرين:

القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه $AG = 2\,GO$.

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه $HC = 2HO$.

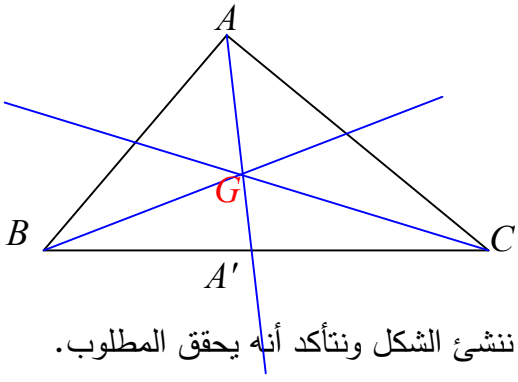
ومنه : $OC = 3\,HO$ و $OA = 3\,OG$ إذن $OG = OH = \frac{1}{2}GH$ ومنه : $AG = GH = HC$

تمرين : رقم 45 صفحة 241 (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

ب) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟

حل التمرين:



- **مرحلة التحليل :**

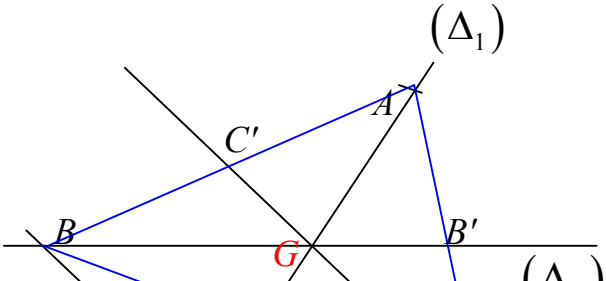
نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.

لدينا القواعد التالية : $A'C = A'B$ و $AG = 2\,A'G$

- **مرحلة التركيب والإنشاء** : انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.

نرسم ثلاث مستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) متقاطعة في نقطة G .

A نقطة من المستقيم (Δ_1) و A'' نظيرتها بالنسبة للنقطة G



A' منتصف القطعة $[A''G]$

الموازي من A'' للمستقيم (Δ_3) يقطع المستقيم (Δ_2) في B

والموازي من A'' للمستقيم (Δ_2) يقطع المستقيم (Δ_3) في C

إذن الرابعي $BGCA''$ متوازي أضلاع

ومنه A' هي منتصف $[BC]$ إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .

(AB) يقطع (Δ_3) في النقطة C' . في المثلث ABA''

لدينا $(BA'') // (GC'')$ و G منتصف $[AA'']$

إذن C'' منتصف $[AB]$ وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .

بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .

ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

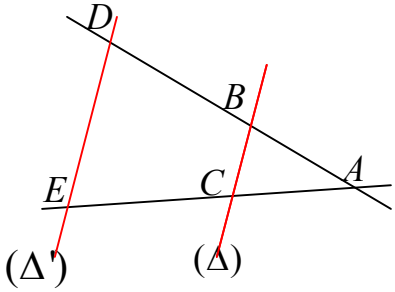
توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم (Δ_1) .

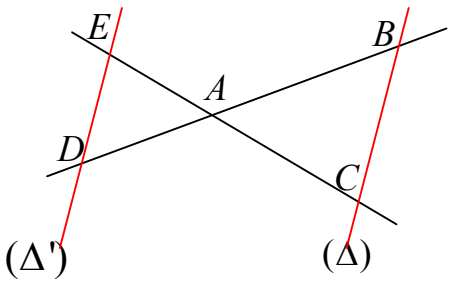
5. مبرهنة طاليس:

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة طاليس وعكسها ، و توظيفها في حل مسائل هندسية .

مبرهنة 1 : مبرهنة طاليس





إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان متوازيان (Δ) و (Δ') في النقط B ، C ، D ، E حسب أحد الشكلين فإن أطوال أضلاع المثلث ABC تكون متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث ADE .

أي : $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$

مبرهنة 2 : عكس مبرهنة طاليس

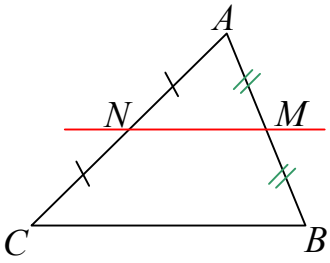
إذا كانت كل من النقط A ، B ، D ، والنقط A ، C ، E على استقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين ،

وإذا كان $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE) يكونا **متوازيين**

حالة خاصة : مستقيم المنتصفين في مثلث

ABC مثلث كيفي.

☒ إذا كانت النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[AC]$



على الترتيب فإن $(MN)\ //\ (BC)$ و $BC = 2\ MN$

☒إذا كانت النقطة M منتصف القطعة $[AB]$ وكان $(MN)\ //\ (BC)$

حيث N نقطة من $[AC]$ فإن N هي منتصف القطعة $[AC]$

تطبيق 1 : 69 صفحة 243

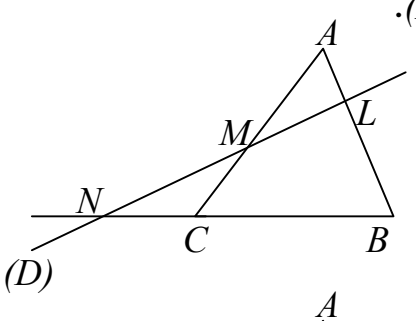
ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

نريد البرهان أن : $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

أ) أرسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، وسم E تقاطعه مع (AB).

ب) بين أن : $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$ و $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

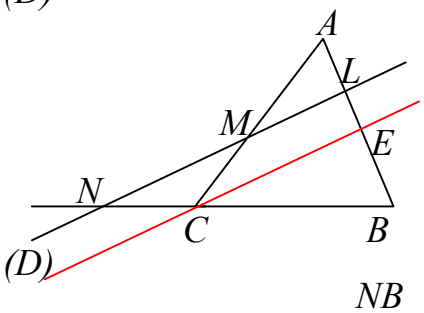
ج) استنتج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$



حل التطبيق 1 :

أ) رسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، يقطع (AB) في E.

ب) تبيان أن $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$



في المثلث BLN لدينا : $(CE)\ //\ (NL)$ إذن حسب مبرهنة طاليس

لدينا : $\frac{BE}{BL}=\frac{BC}{BN}$ معناه $\frac{BN}{BL}=\frac{BC}{BE}$ ومنه : $\frac{NB}{LB}=\frac{BC}{BE}=\frac{NB-BC}{LB-BE}=\frac{NC}{LE}$

إذن : $\frac{NB}{LB}=\frac{NC}{LE}$ معناه $\boxed{\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}}$

تبيان أن $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

في المثلث ACE لدينا : $(CE)\ //\ (ML)$ إذن حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AM}{AL}=\frac{AC}{AE}=\frac{AC-AM}{AE-AL}=\frac{MC}{LE}$ ومنه : $\frac{AM}{AL}=\frac{AC}{AE}$ معناه $\frac{AM}{AC}=\frac{AL}{AE}$

$\boxed{\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}}$ معناه $\frac{MA}{LA}=\frac{MC}{LE}$

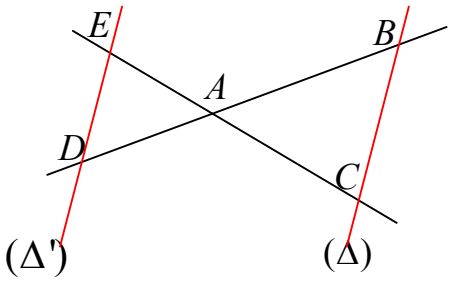
ج) استنتاج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

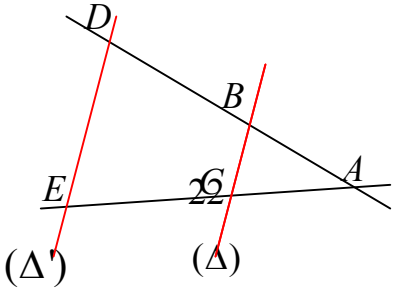
$LE=\frac{LB\times NC}{NB}$ معناه $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$ و $LE=\frac{MC\times LA}{MA}$ معناه $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

ومنه : $\frac{LB\times NC}{NB}=\frac{MC\times LA}{MA}$ معناه $LB\times NC\times MA = MC\times LA\times NB$ معناه $\boxed{\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1}$

نتائج :

إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$

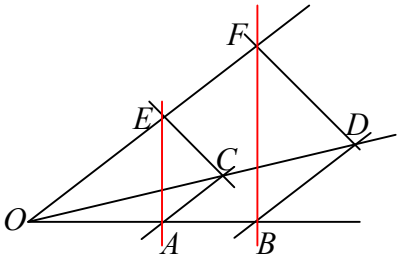




إذا كان $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

تطبيق 2 : 63 صفحة 63

إذا علمت أن في الشكل المرفق (AC) // (BD) و (CE) // (DF) فبين أن (AE) // (BF) .



حل التطبيق 2 :

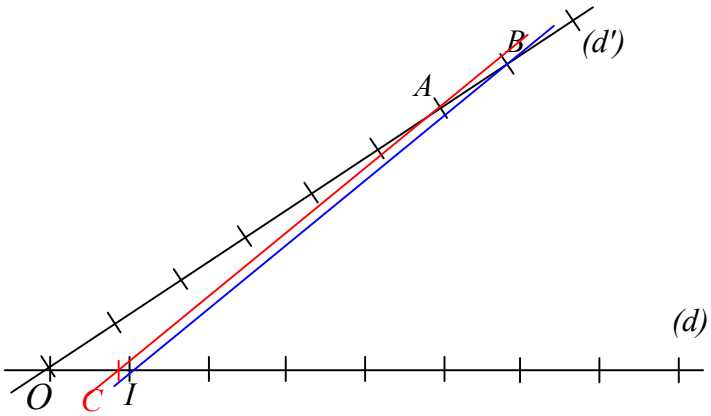
في المثلث ODB لدينا : (AC) // (BD) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$

في المثلث ODF لدينا : (CE) // (DF) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OC}{OD}=\frac{OE}{OF}$

إذن : $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OF}$ وحسب عكس مبرهنة طاليس المطبقة في المثلث OBF لدينا : (AE) // (BF) .

تطبيق 3 : 71 صفحة 243

أنشئ العدد $\frac{6}{7}$



حل التطبيق 3 :

ليكن (O,I) معلما للمستقيم (d) ،

المستقيم (d') يقطع (d) في النقطة O .

نعين النقطتين A و B على المستقيم (d') حيث $OA = 6$ و $OB = 7$ ، نرسم من A المستقيم الموازي للمستقيم (BI) حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OI}=\frac{6}{7}$ إذن : $OC=\frac{6}{7}$

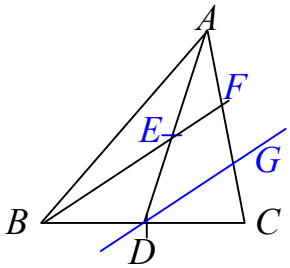
تطبيق 4 : 66 صفحة 243 :

ABC مثلث ، النقطة D منتصف $[BC]$ والنقطة E منتصف $[AD]$ و F نقطة من $[AC]$ حيث $AF=\frac{1}{3}AC$

أ) بين أن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) بين أن $BF = 4\,EF$.

حل التطبيق 4 :



أ) تبيان أن النقط B ، E ، F في استقامية.

نرسم من D الموازي للمستقيم (EF) يقطع (AC) في G

في المثلث ADG لدينا $(DG)//(EF)$ و E منتصف $[AD]$

إذن F هي منتصف $[AG]$ و $DG = 2EF$ ومنه : $AF = FG = GC$

وبالتالي G منتصف $[FC]$ ، وفي المثلث BCF لدينا كذلك D منتصف $[BC]$

إذن : (DG) // (BF) و $BF = 2DG$

ومنه : $(EF) // (BF)$ بما أن للمستقيمين نقطة مشتركة فإن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) تبيان أن $BF = 4\,EF$.

لدينا : $BF = 2DG$ و $DG = 2EF$ إذن : $BF = 4\,EF$.

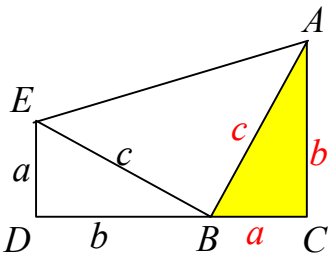
6. مبرهنة فيثاغورس:

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة فيثاغورس وعكسها و توظيفها في حل مسائل هندسية . النسب المثلثية .

نشاط 9 :

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c ، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث C ، B ، D في استقامية و $BD = AC$.



أ) بين أن الزاوية ABE قائمة .

ب) ما نوع الرابعي $ACDE$ ؟

ج) أحسب مساحة الرابعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين .

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 .

حل النشاط 9 :

أ) لدينا في المثلث ABC ، $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}+\widehat{ACB}$ (زاوية خارجية) ولدينا $\widehat{ABD}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

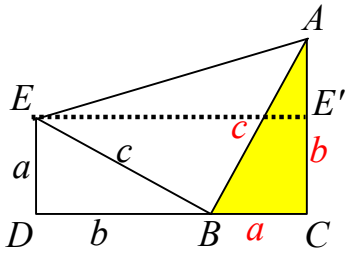
ومنه : $\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $\widehat{EBD}=\widehat{BAC}$ وبالتالي : $\widehat{ACB}=\widehat{ABE}=90°$

ب) نوع الرابعي $ACDE$:

الرابعي $ACDE$ شبه منحرف قائم .

ج) حساب مساحة الرابعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين :



الطريقة الأولى : $s(ACDE) = 2\ s(ABC) + s(ABE)$

ومنه : $\boxed{s(ACDE) = ab + (c^2 / 2)}$

الطريقة الثانية : $s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')$

ومنه : $s(ACDE) = a(b+a) + \frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

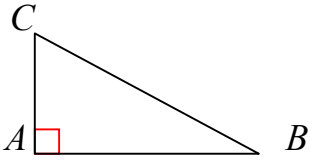
أي : $s(ACDE) = ab + a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$ وبالتالي : $\boxed{s(ACDE) = ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2}$

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ومنه : $c^2 = a^2 + b^2$

☒ **مبرهنة فيثاغورس وعكسها :**

مبرهنة 1 : (مبرهنة فيثاغورس)

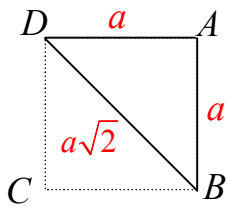


إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

مبرهنة 2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)

إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن : المثلث ABC قائم في A .

مثال 1: $ABCD$ مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .



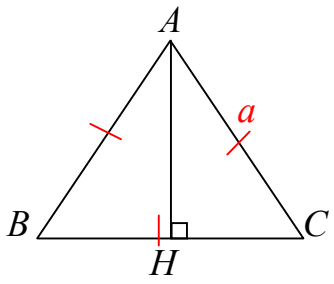
$BD^2 = AB^2 + AD^2$ ومنه : $BD^2 = a^2 + a^2$

ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$

مثال 2:

ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.



أحسب الطول AH .

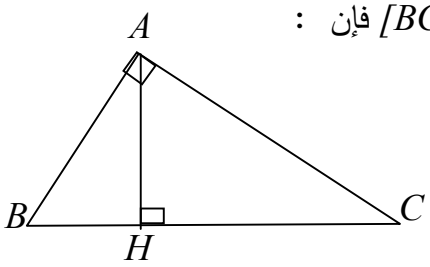
حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

نتائج :

إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ فإن :



أ) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ (من المساحة)

ب) $AH^2 = HC \cdot HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2\,AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$.

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2\,BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. وبالتالي : $AH^2 = BH \times HC$

ج) $AB^2 = BH \cdot BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $AB^2 = BH \times (HC + BH)$

وبالتالي : $AB^2 = BH \cdot BC$

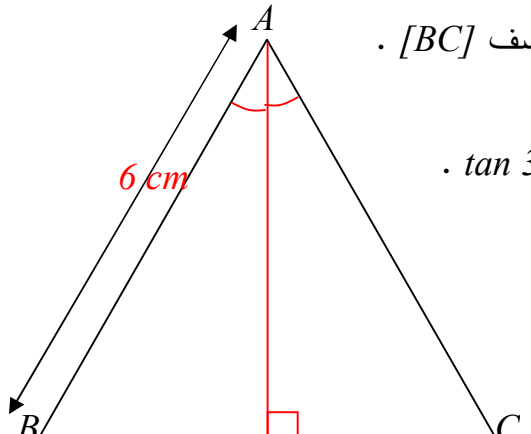
د) $AC^2 = CH \cdot CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)

نشاط 10 :

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $6\ cm$ ، النقطة D منتصف $[BC]$.

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من $\sin 30°$ ، $\cos 30°$ ، $\tan 30°$.



حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ، \quad cos30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad \tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

☒ النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف : ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية α : $\sin\alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية α : $cos\alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{AB}$

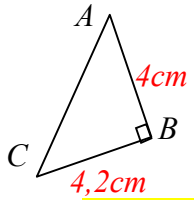
ظل الزاوية α : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{cos\alpha}$ $\qquad (\sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

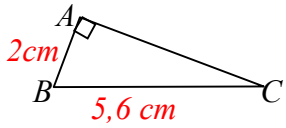
تطبيق 1 : 49 صفحة 241

أحسب كلا من AC و ABC في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 1



الحالة 2



حل التطبيق :

الحالة 1 : حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 = (4^2 + 4,2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33,64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5,8\ cm$. وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$\widehat{ABC} = 90°$

الحالة 2 : حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 = (5,6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35,36\ cm^2$ ومنه $AC = 5,946427499...$

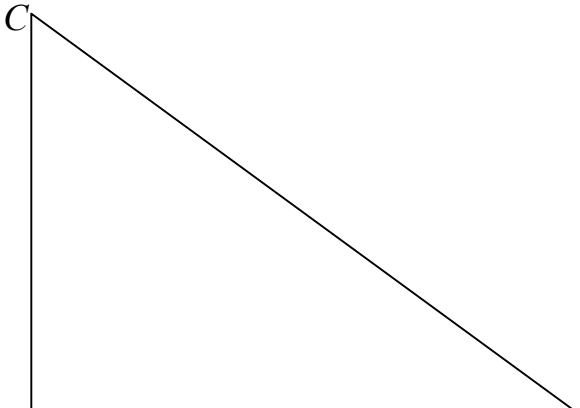
وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5,6} = 0,347142857...$ ومنه : $\widehat{ABC} = 69,07516758...°$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

تطبيق 2 : 50 صفحة 241

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$



أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .

حل التطبيق :

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6,01815023\ldots$.

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7,9863551\ldots$.

نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24,00450533\ldots cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB \times AC)/2$ ومنه : $s = 24,0315424\ldots cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $s = 24\ cm^2$.

تطبيق 3 : 51 صفحة 241

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $5\ cm$ ، $12\ cm$ ، $13\ cm$ ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

حل التطبيق :

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة $[BC]$ ونصف قطرها يساوي $6,5\ cm$.

☒ استعمال تكنلوجية الإعلام والاتصال :

الهدف من النشاط هو البحث عن الثلاثيات من الأعداد الطبيعية التي تكون أطوال أضلاع مثلث قائم .

مثلا الثلاثية (3 ، 4 ، 5) لدينا : $3^2 + 4^2 = 5^2$ تحقق مبرهنة فيثاغورس وتسمى هذه الثلاثية بثلاثية فيثاغورسية .

وللبحث عن الثلاثيات نستعمل برنامج *Excel* .

1. ليكن x و y عددين طبيعيين حيث : $x > y$. بين أن الثلاثية $(x^2 - y^2\ ,\ 2xy\ ,\ x^2 + y^2)$ هي ثلاثية فيثاغورسية .

لدينا : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 - 2(xy)^2 + 4(xy)^2$ ومنه : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 + 2(xy)^2$

إذن : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ وهذا هو المطلوب.

2. نعتبر مثلثا ABC قائما في A ، حيث : $AB = x^2 - y^2$ و $AC = 2xy$ و $x > y$ فيكون : $BC = x^2 + y^2$.

البحث عن ثلاثية فيثاغورسية من الأعداد الطبيعية

x	y	AB	AC	BC	$AB^2 + AC^2$	BC^2
2	1	3	4	5	25	25
3	1	8	6	10	100	100
3	2	5	12	13	169	169
4	1	15	8	17	289	289
4	2	12	16	20	400	400
4	3	7	24	25	625	625
5	1	24	10	26	676	676
5	2	21	20	29	841	841
5	3	16	30	34	1156	1156
5	4	9	40	41	1681	1681
6	1	35	12	37	1369	1369
6	2	32	24	40	1600	1600
6	3	27	36	45	2025	2025
6	4	20	48	52	2704	2704
6	5	11	60	61	3721	3721
7	1	48	14	50	2500	2500
7	2	45	28	53	2809	2809
7	3	40	42	58	3364	3364
7	4	33	56	65	4225	4225
7	5	24	70	74	5476	5476
7	6	13	84	85	7225	7225
8	1	63	16	65	4225	4225
8	2	60	32	68	4624	4624
8	3	55	48	73	5329	5329
8	4	48	64	80	6400	6400
8	5	39	80	89	7921	7921
8	6	28	96	100	10000	10000
8	7	15	112	113	12769	12769
9	1	80	18	82	6724	6724
9	2	77	36	85	7225	7225
9	3	72	54	90	8100	8100
9	4	65	72	97	9409	9409
9	5	56	90	106	11236	11236
9	6	45	108	117	13689	13689
9	7	32	126	130	16900	16900
9	8	17	144	145	21025	21025
10	1	99	20	101	10201	10201
10	2	96	40	104	10816	10816
10	3	91	60	109	11881	11881
10	4	84	80	116	13456	13456
10	5	75	100	125	15625	15625
10	6	64	120	136	18496	18496
10	7	51	140	149	22201	22201
10	8	36	160	164	26896	26896
10	9	19	180	181	32761	32761
11	1	120	22	122	14884	14884
11	2	117	44	125	15625	15625
11	3	112	66	130	16900	16900
11	4	105	88	137	18769	18769
11	5	96	110	146	21316	21316
11	6	85	132	157	24649	24649
11	7	72	154	170	28900	28900
11	8	57	176	185	34225	34225
11	9	40	198	202	40804	40804
11	10	21	220	221	48841	48841
12	1	143	24	145	21025	21025

7. متوازي الأضلاع:

الكفاءات المستهدفة

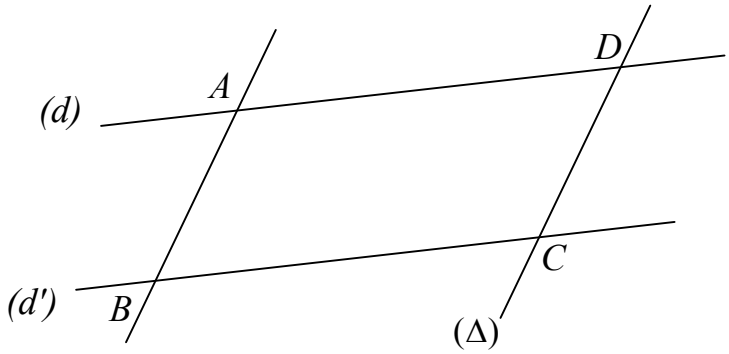
متوازي الأضلاع ومتوازيات الأضلاع الخاصة : المستطيل ، المربع ، المعين .

نشاط 1 :

أرسم مستقيمين متوازيين تماما (d) و (d') ، علم النقطتين A و B على المستقيمين (d) و (d') على الترتيب.

أرسم مستقيم (Δ) يوازي تماما المستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) يقطع (d) و (d') في النقطتين D و C على الترتيب.



ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$

حل النشاط 1 :

لدينا : $(AB) \,//\, (CD)$ و $(AD) \,//\, (BC)$

إذن : الرباعي $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

التعريف : متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه ، متوازيين .

$ABCD$ متوازي الأضلاع معناه [$(AB) \,//\, (CD)$ و $(AD) \,//\, (BC)$]

نشاط 2 :

أ) علم على ورقة غير مسطرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامية.

ب) أنشئ النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

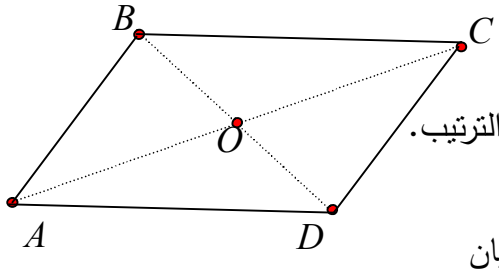
د) تحقق أن :

1. القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين .
2. كل ضلعين متقابلين متقايسان .
3. كل زاويتين متقابلتين متقايستيان .

هـ) علم النقط A' ، B' ، C' ، D' من $[AB]$ و $[BC]$ و $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي $ABCD$ و $BA' = CB' = DC' = AD'$

و) ما نوع الرباعي $A'B'C'D'$ ؟ (إرشاد: يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين $A'CC'A$ و $D'BB'D$).

حل النشاط 2 :



أ. تعليم النقط : A ، B ، O ليست في استقامية.

ب. إنشاء النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج. طبيعة الرباعي $ABCD$

لدينا المستقيمان (AB) و (DC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وكذلك المستقيمان (AD) و (BC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

د. التحقيق

1) بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفين

2) بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن $AB = CD$ و $BC = AD$

3) بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

هـ. تعليم النقط A' ، B' ، C' ، D' من $[AB]$

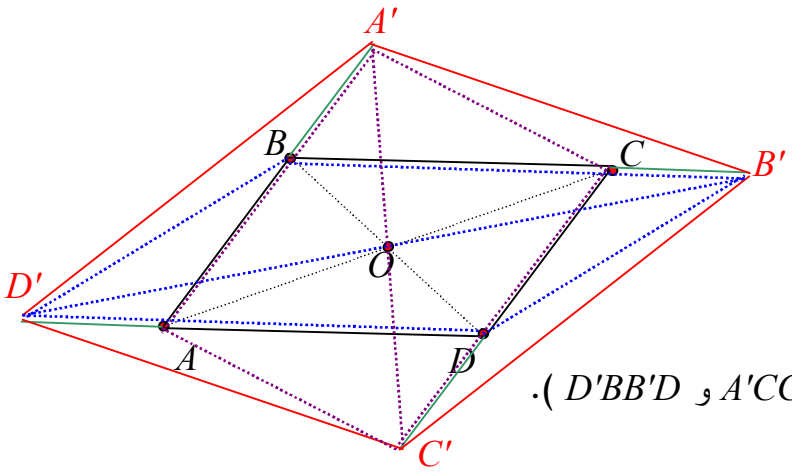
و $[BC]$ و $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب

حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي

إلى أضلاع الرباعي $ABCD$

و $BA' = CB' = DC' = AD'$

و) ما نوع الرباعي $A'B'C'D'$ ؟



(إرشاد: يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين $A'CC'A$ و $D'BB'D$).

لدينا : $(AB) // (CD)$ ومنه $(AA') // (CC')$

ولدينا : $AB = CD$ و $BA' = DC'$ إذن $AA' = CC'$ وبالتالي الرباعي $A'CC'A$ متوازي أضلاع

إذن قطراه $[A'C']$ و $[AC]$ لهما نفس المنتصف O .

لدينا : $(AD) // (BC)$ ومنه $(BB') // (D'D)$

ولدينا : $AD = BC$ و $AD' = CB'$ إذن $DD' = BB'$ وبالتالي الرباعي $D'BB'D$ متوازي أضلاع

إذن قطراه $[D'B']$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف O .

ولدينا : القطران $[AC]$ و $[BD]$ للمتوازي الأضلاع $ABCD$ لهما نفس المنتصف O

إذن : القطعتان $[A'C']$ و $[D'B']$ لهما نفس المنتصف O وبالتالي الرباعي $A'B'C'D'$ هو متوازي أضلاع.

خواص : من أجل كل رباعي $ABCD$:

1) $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

2) [$AB = DC$ و $AD = BC$] معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

3) [$AB = DC$ و $(AB)//(DC)$] معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

4) [$\hat{BAD} = \hat{BCD}$ و $\hat{ABC} = \hat{ADC}$] معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

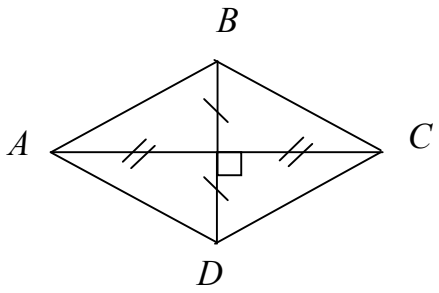
نشاط 3 :

1) أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أن أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟

2) أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ، بين أن كل زواياه قائمة ، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

حل النشاط :

1) إنشاء متوازي أضلاع قطراه متعامدان



$ABCD$ متوازي أضلاع إذن $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان

ولدينا قطراه متعامدان إذن (BD) هو محور القطعة $[AC]$

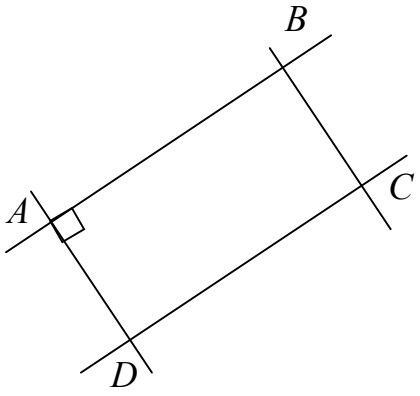
و (AC) هو محور القطعة $[BD]$

وبالتالي المثلث ABD متساوي الساقين $AB = AD$

بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $AB = BC = CD = DA$

متوازي أضلاع $ABCD$ يسمى معين .

2) إنشاء متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



$ABCD$ متوازي أضلاع إذن $(DC) // (AB)$ و $(AD) // (BC)$

متوازي أضلاع $ABCD$ إحدى زواياه قائمة إذن $(AD) \perp (AB)$

ومن التوازي نستنتج أن $(BC) \perp (AB)$ و $(CD) \perp (BC)$

و $(AD) \perp (CD)$

في هذه الحالة متوازي أضلاع $ABCD$ يسمى مستطيل.

وإذا كان ضلعان متتاليان منه متقايسان فإن $ABCD$ يكون مربعا .

متوازيات الأضلاع الخاصة :

المعين : هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان .

1. $ABCD$ معين معناه [$(BD) \perp (AC)$ و $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان]
2. $ABCD$ معين معناه [$AB = BC = CD = DA$]
3. إذا كان $ABCD$ معينا فإن [(AC) ينصف كلا من الزاويتين $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$]

المستطيل : هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .

1. $ABCD$ مستطيل معناه [$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$]
2. $ABCD$ مستطيل معناه [$AC = BD$ و $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان]

المربع : هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

1. $ABCD$ مربع معناه [$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$ و $AB = BC = CD = DA$]
2. $ABCD$ مربع معناه [$AC = BD$ و $(BD) \perp (AC)$ و $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان]

تمرين : رقم 32 صفحة 240 (بعد تصحيحه)

$ABCD$ متوازي أضلاع حيث $AB \neq AD$.

أ) النقطتان A' و C' هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.

بين أن $AA'CC'$ متوازي أضلاع.

ب) M نقطة من $[BC']$ و N نقطة من القطعة $[A'D]$ حيث: $BM = DN$

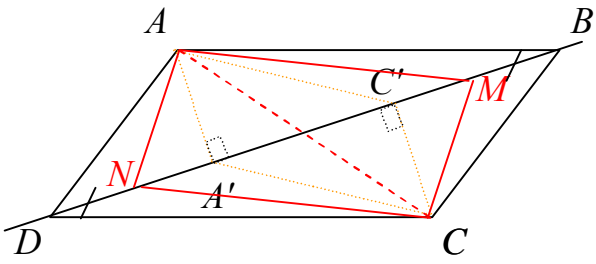
ما هي طبيعة الرباعي $AMCN$.

حل التمرين :

أ) نقارن بين المثلثين القائمين ADA' و BCC' نجد $AA' = CC'$

ولدينا $(AA') // (CC')$ لأنّهما عموديين على نفس المستقيم (BD)

وبالتالي : $AA'CC'$ متوازي أضلاع.



ب) نسمي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$

ولدينا : $BM = DN$ إذن O منتصف كل من $[AC]$ و $[MN]$

إذن الرباعي $AMCN$ متوازي أضلاع .