

## الفرض المحروس الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المدة: 01 ساعة ⌚

الأستاذة: مرواني.ن

اليوم : 2019/10/22

### التمرين الأول:

$x$  عدد حقيقي موجب تماما حيث :  $A = \frac{x}{x+1}$  و  $B = \frac{x-1}{x}$

① أحسب الفرق  $A - B$ .

② استنتج إشارة الفرق  $A - B$  ثم قارن  $A$  و  $B$ .

③ إستنتج مقارنة بين العددين  $\sqrt{\frac{2018}{2019}}$  و  $\sqrt{\frac{2019}{2020}}$

### التمرين الثاني:

① أوجد تحليلا إلى جداء عوامل أولية لكل من  $5^{n+2} - 5^n$  و  $7^{n+2} - 7^n$  ثم أحسب  $\text{PGCD}(5^{n+2} - 5^n, 7^{n+2} - 7^n)$

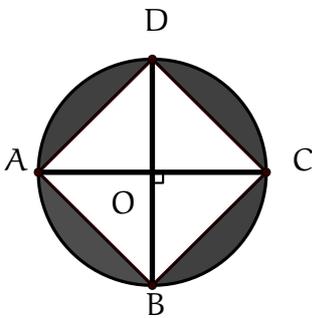
②  $x, y$  و  $z$  أعداد طبيعية حيث :  $x + y = 2z$

(أ) أثبت أن  $2^x \times 2^y = 4^z$

(ب) أثبت أن  $2^{2x} \times 2^{2y+2} \times 2^{2z} = (2^{3z+1})^2$

③  $a, b$  و  $c$  ثلاث أعداد طبيعية، علما أن  $\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$  أثبت أن:  $b = a^2 - c^2$ .

### التمرين الثالث:



(C) دائرة مركزها O و نصف قطرها  $r$  كما هو موضح في الشكل.

علما أن  $3.14 \leq \pi \leq 3.15$  و  $1.1 \leq r \leq 1.21$ .

\* عين حصرا لمساحة الجزء الملون بالأسود.

التمرين (1)

1 حساب الفرق A - B

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

2 إشارة A - B

لدينا x عدد موجب تماما أي  $x > 0$  و عليه  $x+1 > 0$  بما أن جميع الأطراف موجبة فإن  $x(x+1) > 0$  و منه  $\frac{1}{x(x+1)} > 0$  إذا  $A - B > 0$  و منه  $A > B$

3 مقارنة العددين  $\sqrt{\frac{2018}{2019}}$  و  $\sqrt{\frac{2019}{2020}}$

من السؤال (1) من أجل  $x = 2019$  نجد

$$B = \frac{x-1}{x} = \frac{2018}{2019} \quad \text{و} \quad A = \frac{x}{x+1} = \frac{2019}{2020}$$

حيث  $A > B$  و عليه  $\frac{2019}{2020} > \frac{2018}{2019}$  بالمرور إلى الجذر نجد  $\sqrt{\frac{2019}{2020}} > \sqrt{\frac{2018}{2019}}$

التمرين (2)

1 تحليل العددين إلى جداء عوامل أولية :

$$\begin{aligned} 5^n + 2 - 5^n &= 5^n \times 5^2 - 5^n \\ &= 5^n(5^2 - 1) \\ &= 5^n(5 - 1)(5 + 1) \\ &= 5^n(4 \times 6) \\ &= 5^n \times 2^3 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^n + 2 - 7^n &= 7^n \times 7^2 - 7^n \\ &= 7^n(7^2 - 1) \\ &= 7^n(7 - 1)(7 + 1) \\ &= 7^n(6 \times 8) \\ &= 7^n \times 2^4 \times 3 \end{aligned}$$

و منه  $\text{PGCD}(5^n + 2 - 5^n; 7^n + 2 - 7^n) = 3 \times 2^3 = 24$

2 إثبات أن  $2^x \times 2^y = 4^z$

$$2^x \times 2^y = 2^{x+y} = 2^{2z} = 4^z$$

3 إثبات أن  $2^{2x} \times 2^{2y+2} \times 2^{2z} = (2^{3z+1})^2$

$$\begin{aligned} 2^{2x} \times 2^{2y+2} \times 2^{2z} &= 2^{2x+2y+2+2z} \\ &= 2^{6z+2} = 2^{2(3z+1)} = (2^{3z+1})^2 \end{aligned}$$

4 إثبات أن  $b = a^2 - c^2$

لدينا :  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$   
بتربيع الطرفين نجد

$$\begin{aligned} a + \sqrt{b} &= \sqrt{\frac{a+c}{2}}^2 + \sqrt{\frac{a-c}{2}}^2 - 2\sqrt{\frac{(a+c)(a-c)}{4}} \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} - 2\frac{\sqrt{(a-c)(a+c)}}{2} \\ a + \sqrt{b} &= a - \frac{2}{2}\sqrt{a^2 - c^2} \\ \sqrt{b} &= \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{بالتربيع مرة أخرى نجد} \\ b &= a^2 - c^2 \quad \text{و منه} \end{aligned}$$

التمرين (3)

نسمي S مساحة الجزء الملون بالأسود ،  $S_1$  مساحة الدائرة و  $S_2$  مساحة المربع و عليه

$$S = S_1 - S_2$$

إيجاد حصر ل  $S_1$   
 $S_1 = \pi r^2$   
حصر  $r^2$

لدينا  $1.1 \leq r \leq 1.21$  بالمرور إلى التربيع نجد  $1.21 \leq r^2 \leq 1.4641$   
و لدينا  $3.14 \leq \pi \leq 3.15$   
بما أن جميع الأطراف موجبة نجد  $1.21 \times 3.14 \leq \pi r^2 \leq 1.4641 \times 3.15$

$$3.90 \leq S_1 \leq 4.61 \dots (1) \quad \text{و منه}$$

إيجاد حصر ل  $S_2$   
 $S_2 = AD^2$   
حساب  $AD^2$

بما أن AOD مثلث قائم حسب فيثاغورس نجد  
لدينا من قبل  $1.21 \leq r^2 \leq 1.4641$  و عليه  
 $2.42 \leq 2r^2 \leq 2.93$

$$2.42 \leq AD^2 \leq 2.93 \quad \text{أي}$$

$$2.42 \leq S_2 \leq 2.93 \dots (2) \quad \text{و منه}$$

نعلم أن  $S = S_1 - S_2$  أي  $S = S_1 + (-S_2)$   
بضرب طرفي (2) في العدد (-1) نجد

$$-2.93 \leq -S_2 \leq -2.42 \dots (3)$$

بجمع (1) و (3) طرف لطرف نجد

$$-2.93 + 3.90 \leq S_1 + (-S_2) \leq -2.42 + 4.61$$

$$0.97 \leq S \leq 2.19 \quad \text{و عليه}$$