الهندسة

مذكرة رقم 9 : ملخص لدرس: الحساب المثلثي 1 مع تمارين وأمثلة محلولة

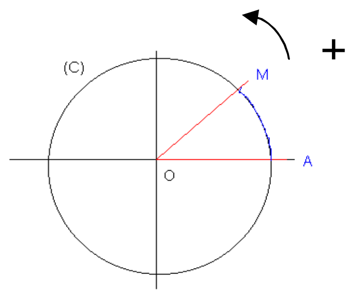
الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
الجزء الأول: - الدائرة المثلثية، الأفاصيل المنحنية لنقطة، الأفصول المنحنى الرئيسي؛ - الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل؛ - قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل، القياس الرئيسي، علاقة شال؛ - العلاقة بين الدرجة و الراديان و الغراد؛ - الزاوية الموجهة لمتجهتين وقياسها؛ - النسب المثلثية لعدد حقيقي و النسب المثلثية لزاوية متجهتين؛ - العلاقات: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ، $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ ، $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ - النسب المثلثية لزاوية قياسها: 0 ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ؛ - العلاقات بين النسب المثلثية لزاويتين مجموع أو فرق قياسيهما يساوي: 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π بترديد 2π.	- استعمال الآلة الحاسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة لزاوية محددة بأحد نسبها المثلثية و العكس. - التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات	- تحدد نقطة من الدائرة المثلثية بأفصولها المنحنى الرئيسي أو بإحداثيتها بالنسبة للمعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية.

لتكن (C) دائرة من المستوى (P) مركزها O , و لتكن I و M نقطتين من (C). لدينا منحنيين للوصول إلى النقطة M انطلاقا من I . أحدهما موجب و الآخر سالب.
لقد تم اختيار المنحى الموجب هو المنحى المضاد لحركة عقربي الساعة (المنحى + المشار إليه في الشكل) و يسمى المنحى المثلثي.

1. الدائرة المثلثية:

الدائرة المثلثية هي كل دائرة شعاعها 1 مزودة بأصل و موجهة توجيها موجبا.



2. تعريف الراديان :

(C) دائرة مثلثية مركزها O
الراديان هو قياس الزاوية المركزية التي تحصر على الدائرة (C) قوسا طوله 1 ونرمز له بالرمز : rad ملاحظة : قياس زاوية مستقيمة بالدرجة $180°$ و الغراد 200 و بالراديان π
اذن وجدنا ثلاث وحدات لقياس الزوايا (الدرجة و الغراد والراديان) ويمكن استعمال الطريقة الثلاثية للتحويل من وحدة الى أخرى أو استعمال النتيجة التالية : نتيجة : اذا كانت α و β و γ قياسات زاوية بالدرجة و الغراد والراديان على التوالي فان : $\frac{\alpha}{180°}=\frac{\beta}{200}=\frac{\gamma}{\pi}$

تمرين1:

1. لتكن زاوية قياسها بالدرجة $135°$ حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد
2. لتكن زاوية قياسها بالدرجة $120°$ حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد

أجوبة :(1 أ)حساب القياس بالراديان: $\frac{\gamma}{\pi}=\frac{135}{180°}$ يعني $135\times\pi=\gamma\times180$

يعني $\gamma=\frac{135\times\pi}{180}=\frac{27\times\pi}{36}=\frac{3\pi}{4}rad$

ب)حساب القياس بالغراد: $\frac{\beta}{200}=\frac{135}{180°}$ يعني $135\times200=\beta\times180$

يعني $\beta=\frac{135\times200}{180}$ يعني $\beta=150grad$

2) أ)حساب القياس بالراديان: $\frac{\gamma}{\pi}=\frac{120}{180°}$ يعني $120\times\pi=\gamma\times180$

يعني $\gamma=\frac{120\times\pi}{180}=\frac{12\times\pi}{18}=\frac{2\pi}{3}rad$

ب)حساب القياس بالغراد: $\frac{\beta}{200}=\frac{120}{180°}$ يعني $120\times200=\beta\times180$

يعني $\beta=\frac{120\times200}{180}$ يعني $\beta=133,33grad$

3. الأفاصيل المنحنية لنقطة والأفصول المنحنى الرئيسي:

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها A و مركزها O , و M نقطة من (C).

ليكن α طول القوس الهندسية $\left[\widehat{IM}\right]$ $0\leq\alpha\leq2\pi$.

العدد α يسمى أفصول منحنى للنقطة M. الأعداد الحقيقية $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هي أفاصيل منحنية للنقطة M. يوجد أفصول منحنى وحيد للنقطة M ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M.

تمرين2: أو مثال :مثل على الدائرة المثلثية النقط التالية : $A(0)$ و $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ و $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ و $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ و $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

أجوبة: $\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}$ وبما أن : $-\pi<-\frac{\pi}{2}\leq\pi$

فان : $-\frac{\pi}{2}$ هو أفصول منحنى رئيسي للنقطة M_0

الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

طريقة1:نقسم العدد 2007 على 4 فنجد $501,75$
ونأخذ أقرب عدد صحيح له أي 502

$\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

يعني $\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times251\pi$

وبما أن : $-\pi<-\frac{\pi}{4}\leq\pi$ فان : $-\frac{\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة I

طريقة2: $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{2007}{4}+2k\leq1$

يعني $-1-\frac{2007}{4}<2k\leq1-\frac{2007}{4}$ يعني $-\frac{2011}{4}<2k\leq-\frac{2003}{4}$

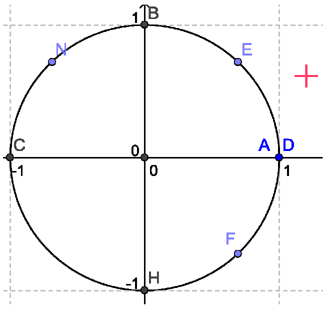
يعني $-\frac{2011}{8}<k\le-\frac{2003}{8}$

يعني $-251,3\simeq-\frac{2011}{8}<k\le-\frac{2003}{8}\simeq-250,3$

اذن : $k=-251$ ومنه

$\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$

ومنه : $-\frac{\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة I



تمرين3: حدد الأفصول المنحنى الرئيسي للنقط التالية ومثلهم على الدائرة المثلثية : $M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$ و $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ و $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$ و $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

أجوبة:1) الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_0

طريقة1: $\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times2\pi+\frac{\pi}{2}$ وبما أن : $-\pi<\frac{\pi}{2}\le\pi$

فان : $\frac{\pi}{2}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_0

طريقة2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{9}{2}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\le1-\frac{9}{2}$ يعني $-\frac{11}{2}<2k\le-\frac{7}{2}$

يعني $-\frac{11}{2}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le-\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{11}{4}<k\le-\frac{7}{4}$

يعني $-2,7\simeq-\frac{11}{4}<k\le-\frac{7}{4}\simeq-1,7$

اذن : $k=-2$ ومنه $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

ومنه : $\frac{\pi}{2}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_0

2) الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_1

طريقة1: $\frac{67\pi}{4}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times8\pi+\frac{3\pi}{4}$ وبما أن :

$-\pi<-\frac{\pi}{3}\le\pi$ فان : $-\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_1

طريقة2: $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{11}{3}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\le1-\frac{11}{3}$ يعني $-\frac{14}{3}<2k\le-\frac{8}{3}$

يعني $-\frac{14}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le-\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{7}{3}<k\le-\frac{4}{3}$ يعني $-2,3\simeq-\frac{7}{3}<k\le-\frac{4}{3}\simeq-1,3$

اذن : $k=-2$ ومنه $\alpha=\frac{11\pi}{3}+2(-2)\pi=\frac{11\pi}{3}-4\pi=\frac{11\pi-12\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

ومنه : $-\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_1

3) الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_2

طريقة1: $\frac{67\pi}{3}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times8\pi+\frac{3\pi}{4}$ وبما أن : $-\pi<\frac{3\pi}{4}\le\pi$

فان : $\frac{3\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_2

طريقة2: $-\pi<\frac{67\pi}{4}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{67}{4}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{67}{4}<-\frac{67}{4}+\frac{67}{4}+2k\le1-\frac{67}{4}$ يعني $-\frac{71}{4}<2k\le-\frac{63}{4}$

يعني $-\frac{71}{4}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le-\frac{63}{4}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{71}{8}<k\le-\frac{63}{8}$

يعني $-8,8\simeq-\frac{71}{8}<k\le-\frac{63}{8}\simeq-7,8$

اذن : $k=-8$ ومنه $\alpha=\frac{67\pi}{4}+2(-8)\pi=\frac{67\pi}{4}-16\pi=\frac{67\pi-64\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

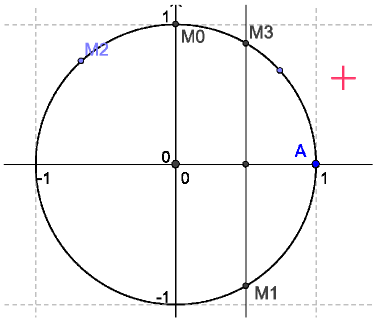
ومنه : $\frac{3\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_2

الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_3

$\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=2\times3\pi+\frac{\pi}{3}$

وبما أن : $-\pi<\frac{\pi}{3}\le\pi$

فان : $\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_3



4. الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم:

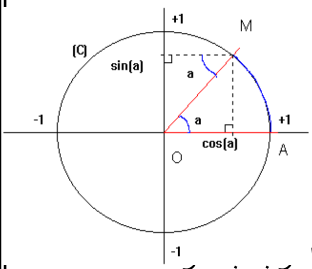
كل زوج $([OA),[OB))$ من نصفي مستقيم يحدد الزاوية الموجهة المرموز اليها ب: $(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}})$ أنظر الشكل.

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي. الأعداد الحقيقية $\beta-\alpha+2k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$ هي قياسات للزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}})$

و نكتب: $(\overline{OA},\overline{OB})\equiv\beta-\alpha[2\pi]$.

للزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}})$ قياس وحيد في المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية.



5. النسب المثلثية لعدد حقيقي:

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها A و مركزها O ولتكن B نقطة من (C) حيث: $(\overline{OA},\overline{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$(0,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ هو المعلم المتعامد الممنظم ا ... المثلثية (C). لتكن $M\in(C)$ حيث $(\overline{OA},\overline{OM})\equiv a[2\pi]$

أفصول النقطة M يسمى جيب تمام a و يكتب $\cos a$.

أرتوب النقطة M يسمى جيب a و يكتب $\sin a$.

إذا كان $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. AT أو $-AT$: ظل a و يكتب $\tan a$.

خاصيات:

لكل x من $\mathbb{R}$	$-1\le\sin x\le1$, $-1\le\cos x\le1$
لكل x من $\mathbb{R}$ لكل $k\in\mathbb{Z}$	$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\sin(x+2k\pi)=\sin x$
لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ لدينا:	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\tan(x+k\pi)=\tan x$

- اذا كانت $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ فان $\cos x\ge0$
- اذا كانت $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ فان $\cos x\le0$
- اذا كانت $0\le x\le\pi$ فان $\sin x\ge0$
- اذا كانت $\pi\le x\le2\pi$ فان $\sin x\le0$

6. العلاقات بين النسب المثلثية لعدد:

- لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos^2x+\sin^2x=1$

تمرين4: بين أن : لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$

الجواب: $1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

ونعلم أن: $\cos^2x+\sin^2x=1$ اذن ①

$$1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

وتكتب على شكل مبرهنة

تمرين5: علما أن : $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ و $\sin x=-\frac{4}{5}$

أحسب $\cos x$ و $\tan x$

الجواب:1)حساب $\cos x$

نعلم أن: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ يعني $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$

يعني $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ يعني $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$ يعني $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

يعني $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ أو $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$ يعني $\cos x=\frac{3}{5}$ أو $\cos x=-\frac{3}{5}$

ونعلم أن: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ يعني $\cos x\geq 0$ ومنه نأخذ: $\cos x=\frac{3}{5}$

1)حساب $\tan x$ **لدينا:** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

يعني $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$

تمرين6: علما أن : $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ و $\tan x=\frac{1}{3}$ أحسب 1) $\cos x$

2) $\sin x$

الجواب:1) نعلم أن: $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

يعني أن : $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$ يعني $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

يعني $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ يعني $10\cos^2 x=9$ يعني $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

يعني $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ أو $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

ونعلم أن: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ يعني $\cos x\leq 0$ ومنه نأخذ: $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2)نعلم أن: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ يعني: $\sin x=\tan x\times\cos x$ يعني:

$$\sin x=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

ملخص للعلاقات بين النسب المثلثية

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

7. النسب المثلثية للقيم الاعتيادية:

تمرين7: بسط و أحسب التعابير التالية :

$\cos\frac{3\pi}{4}$ و $\sin\frac{3\pi}{4}$ و $\cos\frac{7\pi}{6}$ و $\sin\frac{7\pi}{6}$ و $\cos\frac{10\pi}{3}$

$\cos\frac{13\pi}{6}$ و $\sin\frac{53\pi}{6}$ و $\cos\frac{34\pi}{3}$ و $\tan\frac{3\pi}{4}$ و $\tan\frac{37\pi}{4}$

أجوبة: $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\frac{33\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{33\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4}=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

$$\tan\frac{37\pi}{4}=\tan\left(\frac{36\pi+\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{36\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

تمرين8: بسط التعابير التالية :

1. $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$
2. $B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$
3. $C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$
5. $E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$
6. $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$
7. $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
8. $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

أجوبة:1) $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

2) $B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

3) $C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

4) $D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times 7\pi-x)$$

$$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$$

$$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$$

5) $E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

6) $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

نلاحظ أنّ: $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ يعني $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

ومنه: $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

(7 $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

نلاحظ أنّ: $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

و أن: $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

و أن: $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

ومنه: $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

يعني: $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

(8 $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

نلاحظ أنّ: $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

و أن: $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

ومنه: $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

نلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

ومنه: $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

تمرين9: بسط التعابير التالية :

(1 $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

(2 $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

(3 $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

الأجوبة :

(1 $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

نلاحظ أنّ: $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$ يعني: $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

(2 $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

نلاحظ أنّ: $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

و أن: $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

ومنه: $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

ونلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

ومنه: $B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

(3 $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$

و أن: $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

و أن: $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

ومنه: $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

ونلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

ومنه: $C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$

تمرين10: أحسب وبسط

$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

أجوبة: $A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x+\cos x-\cos x+\sin x=0$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(2\times3\pi+x)-\cos(2\pi+\pi-x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$B=\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi-6\pi)-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+x\right)+\sin(x+1\pi+10\pi)+\cos\left(\frac{-4\pi+\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(-(\pi-x))-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)+\sin(x)=0$

تمرين11: بين أن :

.1 $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

.2 $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin^4 x=0$

.3 $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\times\sin^2 x$

.4 $\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=1$

.5 $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\times\sin^2 x=1$,

أجوبة

1) $\left(\cos x+\sin x\right)^2+\left(\cos x-\sin x\right)^2=$

$=\cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\times1=2$

2) $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2-\cos^2 x+\sin^2 x$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\cos^2 x+\sin^2 x$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\times1-\cos^2 x+\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

3) $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\times\sin^2 x$

نعلم أن: $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x\times\sin^2 x+\left(\sin^2 x\right)^2$

يعني : $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\times\sin^2 x$

يعني : $(1)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\times\sin^2 x$

يعني : $1-2\cos^2 x\times\sin^2 x=\cos^4 x+\sin^4 x$

4) $\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=1$ ؟؟؟؟

$\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=\left(\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2+2\times\sin^2 x$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+2\times\sin^2 x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x+2\times\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

5) نعلم أن: $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3=\cos^6 x+3\cos^4 x+3\cos^2 x\times\sin^4 x+\sin^6 x$

يعني : $1=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^4 x+3\cos^2 x\times\sin^4 x$

يعني : $1=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

يعني : $\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين1: علما أن : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

1. بين أن $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ثم أحسب : $\sin\frac{\pi}{8}$
2. استنتج : $\cos\frac{7\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$ و $\tan\frac{7\pi}{8}$

تمرين2: نعلم أن : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1. بين أن $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ وأن $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
2. استنتج قيمة $\tan\frac{7\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$

تمرين3: ليكن x عدد حقيقي بحيث $0\prec x\prec\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{2}$ نعتبر التعبير

$A(x)=\frac{\tan x}{\sin^3 x\cos x}$

1. عبر عن $A(\pi-x)$ بدلالة $A(x)$
2. عبر عن $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ بدلالة $A(x)$
3. أكتب $A(x)$ بدلالة cosx
4. بين أن $A(x)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$

أحسب $A(\frac{\pi}{6})$ و $A(\frac{\pi}{3})$ و $A(\frac{\pi}{4})$ و $A(\frac{5\pi}{6})$

تمرين4:

1) علما أن : $\cos x+\sin x=\frac{7}{5}$

أحسب $\cos x$ و $\sin x$

2) علما أن : $2\sin^2 x+5\cos x-4=0$ و $0\leq x<\pi$

أحسب $\cos x$ و $\sin x$

تمرين5: علما أن : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أحسب: $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\tan\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$ و

$\tan\left(\frac{-13\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{145\pi}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{-85\pi}{12}\right)$

انتهى الدرس

ملاحظات عامة حول الدرس :

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien