مستوى: سنة أولى جدع مشترك علوم — الفصل الأول

الميدان : الأعداد و الحساب — مذكرة

الكفاءات المستهدفة: إختيار معيار لمقارنة عددين.

إيجاد حصر لعدد حقيقي.

حصر عبارة جبرية.

حصر عبارة تتضمن مقلوبا.

حصر مجموع وجداء عددين حقيقيين.

الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي، المنهاج، الوثيقة المرفقة

الموضوع: المتباينات و الحصر — 6ساعات

نشاط — 20دقيقة

☜ a و b عددان حقيقيان حيث: $a=\frac{13}{3}$ ، $b=\frac{25}{6}$

1.احسب الفرق $a-b$ ، ثم استنتج اشارة $a-b$.

2.قارن بين العددين a و b.

☜ a و b عددان حقيقيان حيث: $a=5,61$ ، $b=\frac{562}{101}$.

قارن بين العددين a و b.

☜ a و b عددان حقيقيان حيث: $a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ، $b=\sqrt{2}-1$

1.احسب $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$.

2.احسب $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

3.ما الذي يمكن قوله عن العددين a و b .

I. المتباينات — 3 ساعات

1.الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ — 1ساعة

تعريف 1

a و b عددان حقيقيان.

- القول إنّ a أكبر من b أو يساويه معناه $a-b$ عدد موجب. ونكتب: $a\geq b$ معناه: $a-b\in\mathbb{R}^+$.
- القول أنّ a أصغر من b أو يساويه معناه أنّ $a-b$ عدد سالب ونكتب: $a\leq b$ معناه: $a-b\in\mathbb{R}^-$

ملاحظة: اذا كان a أصغر من b و $a\neq b$ نقول أن: a أصغرتماما من b و نكتب: $a<b$

تعريف 2

مقارنة عددين a و b معناه التصريح بصحة إحدى الحالات الثلاث الآتية:

$a<b$ * — $a>b$ * — $a=b$ *

مثال:

من أجل $a=1+2\sqrt{2}$ و $b=7-\sqrt{11}$

$a-b$ موجب تماما، وبالتالي: $a>b$

تعليق:
يمكن إختبار مقارنة عددين بالحاسبة

مبرهنة 1

من أجل كلّ أعداد حقيقية a ، b ، c: إذا كان $\begin{pmatrix} a \leq b \\ \text{و} \\ b \leq c \end{pmatrix}$ فإنّ $a \leq c$

برهان

إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإنّ $a-b$ و $b-c$ سالبان، وبالتالي يكون مجموعهما سالبا،
أي أنّ $(a-b)+(b-c)$ سالب. لكن $(a-b)+(b-c)=a-b+b-c=a-c$.

منه $a-c \in \mathbb{R}^-$، و هذا معناه $a \leq c$.

تقويم:

تمرين 18 صفحة 43

1. بفرض a عدد حقيقي كيفي، قارن العددين الحقيقيين a^2-8a و -16.
2. استنتج، دون استعمال الحاسبة، مقارنة العددين الحقيقيين $2-8\sqrt{2}$ و -16.

تمرين تطبيقي:

اذا كان $x \geq 1$ ، بين صحة المتباينتين: $2-5x \leq -3$ و $3x+1 \geq 4$.

2.الترتيب والعمليات
2ساعة

أ-الترتيب والجمع

مبرهنة 2

من أجل كلّ أعداد حقيقية a ، b ، c: إذا كان $a \leq b$ فإنّ $a+c \leq b+c$.

برهان

$a \leq b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^-$. لكن $(a+c)-(b+c)=a-b$،

ومنه $(a+c)-(b+c) \in \mathbb{R}^-$، و هذا يعني أنّ $a+c \leq b+c$.

مثال

أستطيع أن أضيف نفس العدد إلى طرفي متباينة:

$a+5 \leq b+2$ $\xrightarrow{\text{أضيف } -5}$ $a \leq b-3$

مبرهنة 3

من أجل كلّ أعداد حقيقية a ، b ، c ، d: إذا كان $\begin{pmatrix} a \leq b \\ \text{و} \\ c \leq d \end{pmatrix}$ فإنّ $a+c \leq b+d$

برهان

إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ ، فيكون، حسب المبرهنة 2: $a+c \leq b+c$ و $b+c \leq b+d$.
وحسب المبرهنة 1: $a+c \leq b+d$.

مثال

أستطيع أن أجمع طرفا بطرف متباينتين من نفس الاتجاه.

$a \leq 2$ و $b \leq -3$ $\xrightarrow{\text{اجمع طرفا بطرف}}$ $a+b \leq -1$

ب-الترتيب والضرب

مبرهنة 4

a ، b ، c أعداد حقيقية.

من أجل $c>0$ لدينا: $a\le b$ يكافئ $ac\le bc$.

من أجل $c<0$ لدينا: $a\le b$ يكافئ $ac\ge bc$.

برهان: لدينا $ac-bc=(a-b)c$

- من أجل $c>0$.

يكون للعددين $a-b$ و $ac-bc$ نفس الإشارة.
وحيث أنّ $a\le b$ يكافئ $a-b\in\mathbb{R}^-$.
ينتج عنه $a-b\in\mathbb{R}^-$ يكافئ $ac-bc\in\mathbb{R}^-$ وبالتالي $a\le b$ يكافئ $ac\le bc$

- من أجل $c<0$.

يكون للعددين $a-b$ و $ac-bc$ إشارتين مختلفتين.
وحيث أنّ $a\le b$ يكافئ $a-b\in\mathbb{R}^-$.
ينتج عنه $a-b\in\mathbb{R}^-$ يكافئ $ac-bc\in\mathbb{R}^+$ وبالتالي $a\le b$ يكافئ $ac\ge bc$

مثال: أستطيع أن أضرب طرفي متباينة في نفس العدد الموجب :

$0,1a\le 0,3b$ أضرب في 10 ← $a\le 3b$

أستطيع أن أضرب طرفي متباينة في نفس العدد السالب بشرط أن أغيّر اتجاه المتباينة:

$-\frac{1}{2}a\le 5$ أضرب في -2 ← $a\ge -10$

مبرهنة 5

من أجل كل أعداد حقيقية موجبة a ، b ، c ، d.

إذا كان $a\le b$ و $c\le d$ **فإنّ** $ac\le bd$.

برهان

نفرض a ، b ، c ، d أعدادا حقيقية موجبة حيث $a\le b$ و $c\le d$.

- إذا كان $b=0$ أو $c=0$ فإنّ $ac\le bd$.
- إذا كان $b\ne 0$ و $c\ne 0$ فإنّ $ac\le bc$ و $bc\le bd$ (حسب المبرهنة 4)، وبالتالي $ac\le bd$ (حسب المبرهنة 1).

مثال

أستطيع أن أضرب طرفي متباينتين من نفس الاتجاه، طرفا بطرف، عندما يتعلق الأمر بأعداد موجبة:

$a\le \frac{1}{2}$ و $b\le 10$ أضرب طرفا بطرف ← $ab\le 5$

ج- ترتيب مربعين عددين

مبرهنة 6

a ، b **عددان حقيقيان.**

- **من أجل** $a\ge 0$ **و** $b\ge 0$ **لدينا :** $a\le b$ **يكافئ** $a^2\le b^2$
- **من أجل** $a\le 0$ **و** $b\le 0$ **لدينا :** $a\le b$ **يكافئ** $a^2\ge b^2$

حذار ! من تطبيق قواعد المقارنة بين الأعداد دون أخذ إشاراتها بالاعتبار.

برهان

نعلم أنّ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

- من أجل $a\ge 0$ و $b\ge 0$

لدينا $a+b\in\mathbb{R}^+$ ومنه العددان a^2-b^2 ، $a-b$ من نفس الاشارة.

وحيث أنّ $a \le b$ يكافئ $a-b \in \mathbb{R}^-$

ينتج أنّ $a-b \in \mathbb{R}^-$ يكافي $a^2-b^2 \in \mathbb{R}^-$ وبالتالي $a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$

- من أجل $a \le 0$ و $b \le 0$

لدينا $a+b \in \mathbb{R}^-$ ومنه العددان a^2-b^2 ، $a-b$ من إشارتين مختلفتين.

وحيث أنّ $a \le b$ يكافئ $a-b \in \mathbb{R}^-$

ينتج أنّ $a-b \in \mathbb{R}^-$ يكافي $a^2-b^2 \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$

مثال

أرتّب مربعي عددين موجبين والجذرين التربيعيين لهما بنفس ترتيب هذين العددين
وأرتب مربعي عددين سالبين في الاتجاه المعاكس لترتيبهما.
إذا كان $0 \le a \le 2$، فإنّ $a^2 \le 4$ و $\sqrt{a} \le \sqrt{2}$.

تقويم:

تمرين 24 صفحة 44

رتّب تصاعديا الأعداد a و a^2 و a^3 في الحالتين:

$a=\sqrt{2}-1$ ، $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

د- ترتيب جذرين تربيعيين

مبرهنة 7

a ، b عددان حقيقيان موجبان لدينا : $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

☜ **إرشاد للبرهنة:** لإثبات المبرهنة 7 يمكن الاعتماد على المبرهنة 6.

ه- ترتيب مقلوب عددين

مبرهنة 8

a ، b عددان حقيقيان غير معدومين ومن نفس الإشارة لدينا: $a \le b$ يكافئ $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

☜ **إرشاد للبرهنة:** يمكن الاستفادة من $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$

مثال

أرتّب مقلوبي عددين حقيقيين غير معدومين ومن نفس الاشارة في التّرتيب المعاكس لترتيبهما.

إذا كان $0 < a \le 2$، فإنّ $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{2}$.

و- ترتيب قوى عدد حقيقي

مبرهنة 9

a عدد حقيقي لدينا:

- **إذا كان** $0 \le a \le 1$ **فإنّ** $a^3 \le a^2 \le a$
- **إذا كان** $a \ge 1$ **فإنّ** $a^3 \ge a^2 \ge a$

برهان

- إذا كان $0 \le a \le 1$، فإنّ $a^2 \le a$ وبالتالي $a^3 \le a^2$.
ومنه $a^3 \le a^2 \le a$.
- إذا كان $a \ge 1$، فإنّ $a^2 \ge a$ وبالتالي $a^3 \ge a^2$.

ومنه $a^3 \geq a^2 \geq a$.

ملاحظة: يمكن تعميم ترتيب قوى عدد حقيقي موجب a كما يلي:
إذا كان a محصورا بين 0 و 1، فإنّ قوى a ترتب ترتيبا تنازليا.
إذا كان a أكبر من 1، فإنّ قوى a ترتب ترتيبا تصاعديا.

مثال

من أجل $a = 2$ ، لدينا $2^3 \geq 2^2 \geq 2$ ، و من أجل $a = \frac{1}{2}$ ، لدينا $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^2} \geq \frac{1}{2^3}$.

II. الحصر	2 ساعات

نشاط 15 دقيقة

عدد حقيقي حيث: (نقول أن محصور بين العدد و).
-أعط حصرا للأعداد التالية: $-x$ ، $\frac{1}{x}$ ، $x-1$ و x^2+x .

تعليق:
1-طرح الاشكال على التلاميذ.
2-توظيف المبرهنات

تعريف

حصر عدد حقيقي x يعني إيجاد عددين a و b حيث $a \leq x \leq b$.

مثال

باستعمال حاسبة، نحصل على: $\sqrt{5} \approx 2{,}23607$ وهي القيمة المدوّرة للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-5}.
$2 \leq \sqrt{5} \leq 3$ هو حصر العدد $\sqrt{5}$ ، بالتقريب إلى الوحدة.
$2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$ هو حصر العدد $\sqrt{5}$ ، بالتقريب إلى 10^{-2}.

تقويم: 1 ساعة و نصف

تمرين تطبيقي:

a و b عددان حقيقيان حيث: $3 \leq a \leq 8$ و $1 \leq a \leq 7$.
أعط حصرا لكل من : $a+b, a \times b, a-b, \frac{a}{b}, \frac{a+b}{a-b}$.

تمرين 66 صفحة 47

a عدد حقيقي حيث: $-1 < a < 2$.
استنتج من هذا الحصر حصرا لكلّ من الأعداد الآتية: $2a+1$ ؛ $5a-2$ ؛ $7-3a$ ؛ $\frac{1}{2a-5}$

تمرين 67 صفحة 47

1. b عدد حقيقي حيث: $2 < b < 3$.
أعط حصرا للعدد $\frac{2-b^2}{5}$.
2. يعطى أيضا عدد حقيقي a حيث $1 < a < 2$.
أعط حصرا للعدد $b-2a$.