المؤسســــــة: ثانوية رقان الجديدة
السنة الدراسية:
التاريـــــــخ:
توقيت الحصة :

المستـــــوى: ج م ع
ميدان التعلم: الهندسة
الوحدة التعلمية: الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية -09-
موضوع الحصة :الأشعة والحساب الشعاعي -01-

المكتسبات القبلية : الأشعة في المستويات دروس تم التطرق اليها في المتوسط
الكفاءات القاعدية المستهدفة : التعرف على تساوي شعاعين
مؤشرات الكفاءات : إقتراح أنشطة للتعرف على تساوي شعاعين ، مجموع شعاعين .

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســـــــير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها:

1) النشاط:
نشاط1:
1/ عين نقطتين: A، B من المستوي ومثل الشعاع $\overrightarrow{AB}$. وأنكر عناصره.
2/ مثل شعاعا آخر $\overrightarrow{AD}$ يساوي $\overrightarrow{AB}$ ثم شعاعا $\overrightarrow{EF}$ يعاكس $\overrightarrow{AB}$ ثم شعاعا $\overrightarrow{GH}$ لا يساوي ولا يعاكس $\overrightarrow{AB}$.
3/ مثل المجموع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GH}$ فيما مضى ثم: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GH}$.
4/ نضع: $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$، مثل كلا من: $2\vec{v}$، $-\frac{3}{2}\vec{v}$.

مفهوم شعاع
طويلته
منحاه
* تساوي شعاعين:
تعريف
مثال:
نتيجة
:
* مجموع شعاعين
تعريف:
نتائج:
*الشعاعان المتعاكسان
تعاريف
مثال:
نشاط إستثماري
3 /تطبيق.

التعليمات والتوجيهات:

يمكن اقتراح أنشطة من النوع: "إنشاء النقطة التي تقسم قطعة مستقيم وفق نسبة معطاة "

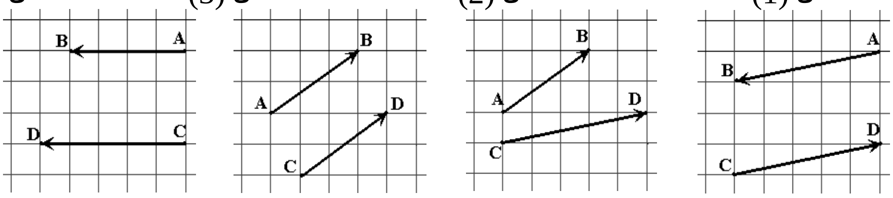
الإنجاز:

النشاط: 1 ، 2،ص 152

نشاط: تساوي شعاعين

أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ثمّ أكمل الجدول أدناه بوضع (✓)علامة الصحة و (✗) علامة الخطأ في المكان المناسب.

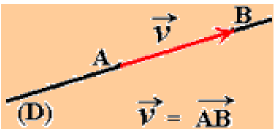
الشّكل (1) الشّكل (2) الشّكل (3) الشّكل



للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$	الشّكل (1)	الشّكل (2)	الشّكل (3)	الشّكل (4)
نفس المنحى				
نفس الإتجاه				
نفس الطّول				

الدرس:

1./الأشعّة والحساب الشعاعي



1.1 مفهوم الشّعاع

تعريف1 A ، B نقطتان من المستوي نقول أنّ الثنائية (A ; B) تعيّن شعاعا نرمز له بالرّمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$

إذا كانت النّقطة A منطبقة على النّقطة B فإنّ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما ونكتب $\vec{v} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

طويلة الشعاع:يسمّى طول قطعة المستقيم [AB] **طويلة** الشعاع AB ، ونكتب: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

منحى الشعاع: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإنّ **منحى** الشعاع AB هو منحى المستقيم (AB)

ملاحظة: إذا كان لشعاعين $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ نفس المنحى، وبوضع $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v'} = \overrightarrow{AC}$ فإنّه:

- يكون للشعاعين $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ نفس الاتجاه إذا كانت النّقطة C تنتمي إلى نصف المستقيم [AB) .
- يكون لشعاعين $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ اتجاهان متعاكسان إذا كان النّقطة A تنتمي إلى قطعة المستقيم [AB]

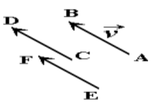
$\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ لهما نفس الاتجاه $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ لهما اتجاهان متعاكسان

ملاحظة: ليس للشعاع المعدوم منحى

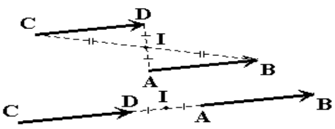
2,1 تساوي شعاعين

تعريف2
نقول عن شعاعين أنّهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى، ونفس الاتجاه، ونفس الطويلة.

مثال: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

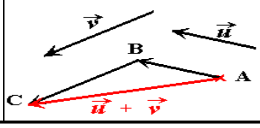


نتيجة
من أجل كلّ أربع نقط A ، B ، C ، D من المستوي لدينا:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف



3.1 مجموع شعاعين

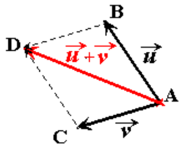
تعريف3
مجموع شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشّعاع الذي نرمز له بالرّمز $\vec{u} + \vec{v}$ والمعرّف كما يأتي:
بفرض A نقطة كيفية، نعلّم نقطة B بحيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ ثمّ نقطة C بحيث $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$
عندئذ يكون $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



نتائج

1: علاقة شال: من أجل كلّ ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإنّ: $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ تسمّى هذه العلاقة **(علاقة شال)**

2: إذا مثّلنا شعاعين $\vec u$ و $\vec v$ من نفس المبدأ A (مثلا $\vec u=\vec{AB}$ و $\vec v=\vec{AC}$) فإنّ مجموعهما $\vec u+\vec v$ يساوي $\vec{AD}$ حيث ABDC متوازي أضلاع

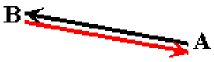


3: إذا كان ABDC متوازي أضلاع فإنّ: $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$

تطبيق: A ، B ، C ، D أربع نقط من المستوي .

بيّن أن $\vec{AB}+\vec{DC}=\vec{AC}+\vec{DB}$

وكذلك $\vec{AC}+\vec{BD}=\vec{AD}+\vec{BC}$



4.1 الشّعاعان المتعاكسان

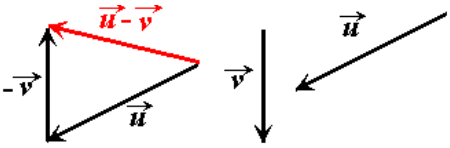
من أجل كلّ نقطتين A ، B من المستوي فإنّ: $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec 0$

تعريف4 نقول عن الشّعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{BA}$ أنّهما متعاكسان. نكتب: $\vec{AB}=-\vec{BA}$

تعريف5 لحساب فرق الشّعاعين $\vec u$ و $\vec v$ بهذا التّرتيب، نضيف إلى الشّعاع $\vec u$ معاكس الشّعاع $\vec v$ نكتب: $\vec u-\vec v=\vec u+(-\vec v)$

مثال: ليكن $\vec u=\vec{AB}$ و $\vec v=\vec{CB}$ لدينا:

$\vec u-\vec v=\vec{AB}-\vec{CB}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$



5.1 جداء شعاع بعدد حقيقي

تعريف6 $\vec u$ شعاع غير معدوم و k عدد غير معدوم.

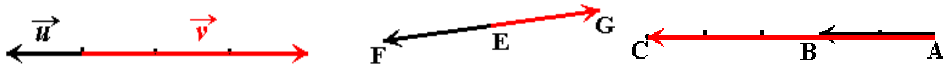
جداء الشّعاع $\vec u$ بالعدد k هو الشّعاع الذي نرمز له بالرّمز $k\vec u$ والمعرّف كما يأتي:

- $\vec u$ و $k\vec u$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه إذا كان $k>0$.
- $\vec u$ و $k\vec u$ لهما نفس المنحى واتجاهان متعاكسان إذا كان $k<0$.
- طويلة الشّعاع $k\vec u$ تساوي جداء طويلة $\vec u$ بالعدد $/k/$ أي $//k\vec u//=/k/\times//\vec v//$

ملاحظة: عندما $\vec u=\vec 0$ أو $k=0$ نصطلح على وضع $k\vec u=\vec 0$

أمثلة:

$\vec{AC}=\frac{5}{2}\vec{AB}$ $\qquad \vec{EF}=-\vec{EG}$ $\qquad \vec v=-3\vec u$



خواص: نقبل الخواص الآتية

$\vec u$ ، $\vec v$ شعاعان، k و k' عددان.

❶ $k(\vec u+\vec v)=k\vec u+k\vec v$ $\qquad$ ❸ $k(k'\vec u)=(kk')\vec u$

❷ $(k+k')\vec u=k\vec u+k'\vec u$ $\qquad$ ❹ $1\vec u=\vec u$

❺ $k\vec u=\vec 0$ يكافئ [$k=0$ أو $\vec u=\vec 0$]

أمثلة:

- $5\vec{AB}+5\vec{BC}=5(\vec{AB}+\vec{BC})=5\vec{AC}$ بتطبيق الخاصة ❶ ثمّ علاقة شال
- $7\vec u-5\vec u=(7-5)\vec u=2\vec u$ بتطبيق الخاصة ❷
- $\frac{4}{7}\times(\frac{7}{4}\vec u)=(\frac{4}{7}\times\frac{7}{4})\vec u=1\vec u=\vec u$ بتطبيق الخاصة ❸ ثمّ الخاصة ❹
- $2\vec{AM}=\vec 0$ يكافئ $\vec{AM}=\vec 0$ ، وبالتالي النقطتان M و A منطبقتان بتطبيق الخاصة ❺

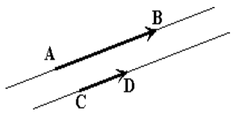
6.1 توازي شعاعين (الارتباط الخطي)

تعريف7 نقول عن شعاعين $\vec u$ و $\vec v$ أنّهما مرتبطان خطيا إذا كان أحدهما يساوي جداء الآخر بعدد حقيقي. أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec v=k\vec u$.

ملاحظة: الشّعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع. لاحظ من أجل كلّ شعاع $\vec u$ لدينا: $\vec 0=0\times\vec u$

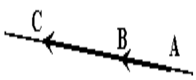
نتيجة مباشرة يكون الشّعاعان غير المعدومين مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان لهما نفس المنحى.

7.1 التوازي والاستقامية



مبرهنة1 يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مرتبطين خطيا.

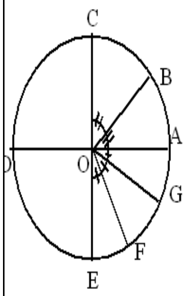
ملاحظة: هذه المبرهنة هي نتيجة مباشرة للتّعريف والنتيجة السّابقة.



مبرهنة2 تكون النّقط A ، B ، C في استقامية إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطين خطيا.

تمرين منزلي: 8. 11. 13

II/ تطبيق: في الشكل الموالي أذكر شعاعين:
- متساويين ، - متعاكسين،
- مرتبطين خطيا.
ثم مثل مجموع اثنين منهما، ثم اضرب أحدهما في 3- ومثله.



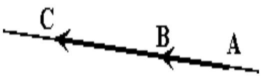
جداء شعاعين
تعريف
امثلة
توازي شعاعين
تعريف
ملاحظة
التوازي والاستقامية

نشاط1: (التوازي والاستقامية)
* أنشئ نقطتين A، B مختلفتين وأنشئ كذلك C، D بحيث يكون الشعاعان $\vec{CD}$، $\vec{AB}$ مرتبطين خطيا.
ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (AB)، (CD)؟

يمكن اقتراح أنشطة من النوع: "إنشاء النقطة التي تقسم قطعة مستقيم وفق نسبة معطاة

8.1 التوازي والاستقامية ثلاث نقط

تكون النّقط A ، B ، C في استقامية إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.



نشاط 04 ص253 الارتباط الخطي لشعاعين - التوازي - الاستقامية

أ) ارسم متوازي أضلاع ABCD مركزه النّقطة O، وعلّم النّقطتين E ، F من [BC] حيث $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

ب) انشئ النقطة G $\quad \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$

ج) عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{AG}$ ، ماذا يمكنك أن تقول عن النّقط A ، G ، F ؟

تمرين 8 ص273 النّقطة M تنتمي إلى [AB] معناه $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

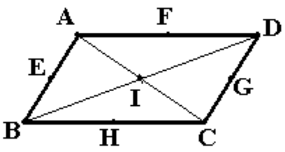
تمرين 11 إذا كان $\|\vec{u}\| = 7$ فإنّ $\|-3\vec{u}\| = 21$

تمرين 13 في متوازي الأضلاع ABCD الذي مركزه I ، والنّقط E ، F ، G ، H منتصفات أضلاعه كما في الشّكل. لدينا :

أ) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ ، ب) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$

ج) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{HI}$

د) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$



ملاحظة:
كل هاته التمارين يجب البرهنة عليها انطلاقا من مكتسبات التلميذ في الطور المتوسط

❖ جداء شعاع بعدد حقيقي – الارتباط الخطي لشعاعين

تمرين 39 ABCDمتوازي أضلاع مركزه النّقطة O. M منتصف [AB]، المستقيم الذي يشمل النّقطة D ويوازي (AC) يقطع المستقيم الذي يشمل النّقطة C ويوازي (BD) في النّقطة N.
بيّن أنّ النّقط M ، O ، N في استقامية.

تمرين 40 ص 275 ارسم مثلّثا ABC ، وعلّم النّقطتين M و N بحيث $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$. بيّن أن المستقيمين (CM) و (BN) متوازيان.

❖ التّعليم على مستقيم، وفي المستوي

تمرين 49 ليكن A(3 ;1) ، $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i}-\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
علّم النّقط A، B، C، D .

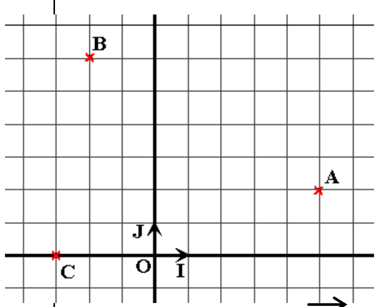
تمرين 55 ص 276
بيّن فيما يأتي أنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا، ثمّ عبّر عن أحدهما بدلالة الآخر.

أ) $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ و $\vec{v} = (\vec{i} + 5\vec{j}) + \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j})$

ب) $\vec{u} = (2-\sqrt{3})\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{v} = \vec{i} + (2+\sqrt{3})\vec{j}$

نشاط 5 لتكن A ، B ، C ثلاث نقط في معلم (O ;I ,J) كما في الشّكل المقابل.

أ) أنجز على ورقة مسطّرة مثيلا لهذا الشّكل.
ب) اكتب إحداثيي كلّ من النّقط A ، B ، C.
ج) علّم منتصف [AB] وعيّن إحداثييها بطريقتين.
د) اكتب مركبتي كلّ من الشّعاعين $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{BC}$.
ه) علّم النّقطة D التي إحداثييها (4 ; –4) ، وعيّن مركبتي كلّ من الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{DC}$، ثمّ استنتج نوع الرّباعي ABCD.
و) نضع $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$



- علّم النّقطة M المعرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{OM}= 2\vec{i} - 3\vec{j}$
- عبّر عن الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OC}$ ، $\overrightarrow{AB}$ بدلالة الشّعاعين $\vec{i}$ ، $\vec{j}$

نشاط1: (التوازي والاستقامية)
* أنشئ نقطتين A، B مختلفتين، وأنشئ كذلك C، D بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.
ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (AB)، (CD)؟

التطبيق: تمرين 38 و32 ص274

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة
السنة الدراسية:
التاريـــــــخ:
توقيت الحصة :

المستـــــوى: ج م ع
ميدان التعلم: الهندسة
الوحدة التعلمية: الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية -09-
موضوع الحصة :الأشعة والحساب الشعاعي -02-

المكتسبات القبلية : الأشعة في المستوي +المعلم في المستوي
الكفاءات القاعدية المستهدفة : التعرف على استقامية ثلاث نقط –التعرف على المعلم في المستوي-التعبير عن توازي شعاعين في معلم
مؤشرات الكفاءات : المعالم للمستوي

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســــــير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

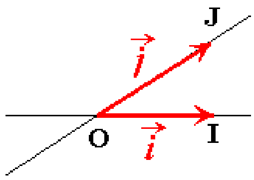
الأنشطة المقترحة وطبيعتها:

1/ النشاط:5 ص 248
2
نشاط2: (المعالم)
- أنشئ معلما $(O;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي.
- ماذا نسمي هذا المعلم في حالة مما يلي:
أ/ $\vec{j} \perp \vec{i}$.
ب/ $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\|$.
جـ/ تحقق أ وب م...

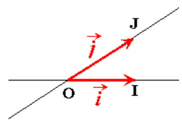
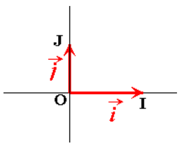
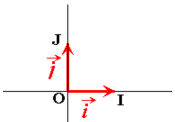
الإنجاز:

2/المعالم للمستوي:

O ، I ، J ثلاث نقط متمايزة من المستوي وليست في استقامية. نقول إنّ النّقط O ، I ، J بهذا التّرتيب تعيّن معلما للمستوي **مبدؤه** النّقطة O.
نضع $\vec{OI} = \vec{i}$ ، $\vec{OJ} = \vec{j}$. إنّ الشّعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا
نسمّيهما أشعة **الأساس** ، ونرمز للمعلم بالرّمز $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ ونسمّي (OI)
محور الفواصل، و (OJ) محور التّراتيب.



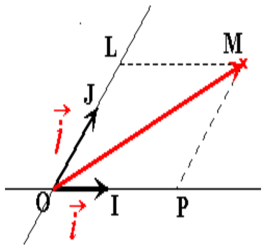
ملاحظة: توجد ثلاثة أنواع من المعالم للمستوي

معلم كيفي	معلم متعامد	معلم متعامد ومتجانس
		
OI=OJ=1u و (u وحدة طول)	(OI)⊥(OJ)	(OI)⊥(OJ)

1.2إحداثيات نقطة – مركبتا شعاع

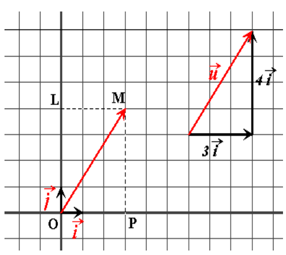
مبرهنة3
ليكن $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ معلما للمستوي .
1) من أجل كلّ نقطة M من المستوي ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقيّة (xy):
بحيث $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
2) من أجل كلّ شعاع $\vec{u}$ ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقيّة (x ;y)
بحيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

برهان:
$(O ; \vec{i} , \vec{j})$ معلم للمستوي، نضع $\vec{i} = \vec{OI}$ و $\vec{j} = \vec{OJ}$
1) لتكن M نقطة كيفية من المستوي.
المستقيم الذي يشمل النّقطة M ويوازي (OI) يقطع (OJ) في النّقطة L
والمستقيم الذي يشمل النّقطة M ويوازي (OJ) يقطع (OI) في النّقطة P
الشّعاعان $\vec{OP}$ و $\vec{i}$ مرتبطان خطيا، ومنه يوجد عدد حقيقي x حيث $\vec{OP} = x\vec{i}$
الشّعاعان $\vec{OL}$ و $\vec{j}$ مرتبطان خطيا، ومنه يوجد عدد حقيقي y حيث $\vec{OL} = y\vec{j}$
وبما أنّ $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OL}$ (كون الرّباعي OPML متوازي أضلاع)
وبالتّالي نستنتج أنّه توجد ثنائية من الأعداد الحقيقيّة (x ;y) بحيث $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



2) ليكن $\vec{u}$ شعاعا كيفيا من المستوي.
نرمز بالرّمز M للنّقطة المعرّفة بالعلاقة $\vec{u} = \vec{OM}$. حسب البرهان السابق توجد
ثنائية من الأعداد الحقيقيّة (x ;y) بحيث $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ أي $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
• في كلّ من (1) و (2) ثنائية من الأعداد الحقيقيّة (x ;y) وحيدة ، لأنه:
إذا كان $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ فإنّ $x = x'$ و $y = y'$

مثال
$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OL} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
النّقطة M إحداثياها $(3 ; 4)$
الشّعاع $\vec{OM}$ مركّبتاه $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



لدينا $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ومنه الشّعاع $\vec{u}$ مركّباته $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

التعليمات والتوجيهات:

يمكن إدراج مسائل يتم فيها حساب إحداثي نقطة في معلم، أو إحداثياها في معلم معطى

التعبير عن توازي شعاعين و استقامية ثلاث نقط في معلم

نتائج: $(O; i, j)$ معلم للمستوي ، و $\vec{u}$ شعاع مركّبتاه $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}$ شعاع مركّبتاه $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ، و k عدد حقيقي.

1.) تساوي شعاعين: $\vec{u} = \vec{v}$ يكافئ $[\ y = y'$ و $x = x'\ ]$

2) مجموع شعاعين: مركبتا المجموع $\vec{u} + \vec{v}$ هما $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ 3) مركبتا الشّعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

برهان النتائج السابقة:

1) نضع M ، M' حيث $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$. لدينا $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ يكافئ $M = M'$.
وبالتالي $[\ y = y'$ و $x = x'\ ]$

2) لدينا : $\vec{u} + \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j})$
$= x\vec{i} + x'\vec{i} + y\vec{j} + y'\vec{j}$
$= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$

3) لدينا : $k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = kx\vec{i} + ky\vec{j}$

مثال: لدينا في الشكل المقابل: $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، ومنه $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 3+(-5) \\ 1+2 \end{pmatrix}$ أي $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

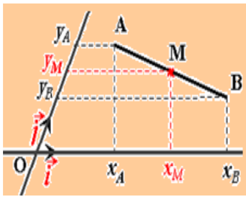
$-2(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} -2\times(-2) \\ -2\times 3 \end{pmatrix}$ ، ومنه $-2(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

2.2 حساب مركبتي شعاع وإحداثيي منتصف قطعة مستقيم

مبرهنة4: لتكن $A(x_A ; y_A)$ ، $B(x_B ; y_B)$ في معلم $(O; i, j)$.

1) مركبتا الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ 2) إحداثيا M منتصف [AB] هما $\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

برهان:



(1 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
$= (x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j})$
$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

(2 لدينا $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (أنظر طرائق وتمارين محلولة (1))
من تساوي شعاعين نجد: $2x_M = x_A + x_B$ و $2y_M = y_A + y_B$ ومنه المطلوب.

3.2 شرط الارتباط الخطي لشعاعين

مبرهنة5: ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان $xy' - x'y = 0$.

برهان إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا ، فإنّ أحدهما يساوي جداء الآخر بعدد حقيقي: نفرض أنّ $\vec{v} = k\vec{u}$
(وبنفس الطريقة نبرهن في حالة $\vec{u} = k\vec{v}$) أنّ $x' = kx$ و $y' = ky$ ، ومنه $xy' - x'y = x(ky) - (kx)y = 0$

وبالتّالي: إذا كان الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا فإنّ $xy' - x'y = 0$

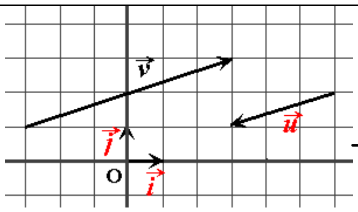
- إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ حيث $xy' - x'y = 0$ لنبيّن أنهما مرتبطان خطيا نميّز حالتين:

الحالة (1): الشّعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ معدومان ، وبالتّالي فهما مرتبطان خطيا.
الحالة (2): أحد الشّعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير معدوم وليكن u ، وبالتّالي فإنّ إحدى مركّباته x أو y غير معدومة،
ولتكن $y \neq 0$ (بنفس الطريقة نبرهن x)

بما أنّ $xy' - x'y = 0$ فإنّ $x' = \frac{y'}{y}x$

وبوضع $\frac{y'}{y} = k$ نجد $y' = ky$ و $x' = kx$ وبالتّالي $v\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

ومنه $\vec{v} = k\vec{u}$ وبالتّالي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.
وبالتّالي: إذا كان $xy' - x'y = 0$ فإنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.



مثال:

في الشّكل لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

نستطيع التّحقّق من أن $6\times(-1)-2(-3)=0$ وكذلك $\vec{v}=-2\vec{u}$

ملاحظة:

تسمّى المساواة $x\,y' - x'y = 0$ شرط الارتباط الخطي لشعاعين ويمكن أن تكتب $x\,y' = x'y$ وهي تترجم في جدول تناسبية كالآتي:

مركبتا الشّعاع $\vec{u}$	x	y
مركبتا الشّعاع $\vec{v}$	x'	y'

$\times k$

تمرين 39 ABCD متوازي أضلاع مركزه النّقطة O. M منتصف [AB]، المستقيم الذي يشمل النّقطة D ويوازي (AC) يقطع المستقيم الذي يشمل النّقطة C ويوازي (BD) في النّقطة N.
بيّن أنّ النّقط M ، O ، N في استقامية.

تطبيق ABCD متوازي أضلاع ، النّقطة N منتصف [CD] ، والنّقطة M معرّفة $\vec{DM} = 2\,\vec{AD}$. بيّن أنّ المستقيمين (BN) و (CM) متوازيان. انطلاقا من CM

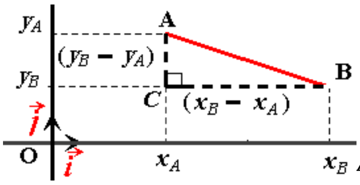
4.2 المسافة بين نقطتين

مبرهنة6 ليكن $A(x_A\,;\,y_A)$ ، $B(x_B\,;\,y_B)$ في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

المسافة بين النّقطتين A و B تساوي $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

يمكن البرهان على أنّ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلّث ABC.

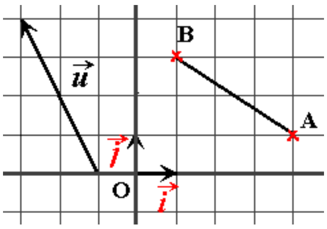
مثال:



في الشّكل A(4 ;1) و B(1 ;3) و $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

لدينا $AB=\sqrt{(1-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

و $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$



III) التطبيق: تمرين 40 ص275

المؤسســـــــة: ثانوية رقان الجديدة
السنة الدراسية:
التاريــــــــخ:
توقيت الحصة :

المستـــــوى: ج م ع
ميدان التعلم: الهندسة
الوحدة التعلمية: الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية -09-
موضوع الحصة :معادلة مستقيم و إنشاؤه+معامل توجيه مستقيم

المكتسبات القبلية : معادلة مستقيم،
الكفاءات القاعدية المستهدفة : التعرف على معامل توجيه مستقيم، انشاء مستقيم علمت معادلته.
مؤشرات الكفاءات : إقتراح أنشطة للتعرف على معادلة ومعامل مستقيم.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

النشاط

نشاط1: (التأكد من انتماء نقطة إلى مستقيم)
نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المستقيمين:
$(\Delta): 2x+y-4=0.$
$(L): y=+x+1.$
1/ تأكد من انتماء النقطتين A(1;2)، B(-1;0) إلى كل من: (Δ)، (L) أم لا؟
2/ أنشئ النقطتين A، B ثم (L).

نشاط2: (معامل توجيه مستقيم)
نعتبر في المستوى السابق المستقيم:
$(\Delta): ax+by+c=0.$
1/ ما هو الشرط الذي يحقق b حتى يكون: $(\Delta)//\vec{j}$.
2/ نفرض الآن أن $\vec{j}$ لا يوازي (Δ). أكتب معادلة (Δ) على الشكل: $y=\alpha x+\beta$.

نشاط3: (إنشاء مستقيم علمت له معادلة)
نعتبر في المستوي السابق المستقيم:
$(k): x+3y-6=0.$
أنشئ المستقيم (k) في المستوي.

الإنجاز(ســـــــير الحصة)

نشاط 1. معادلة مستقيم

المستوي مزوّد بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر مجموعة النّقط M(x ;y) بحث $y=\frac{1}{3}x+2$

النقط	A	B	C	D
فاصلتها x	0		3	-3
ترتيبها y		0		

أ) أكمل الجدول الآتي بنقط من هذه المجموعة.
ب) علّم النّقط A ، B ، C ، D ، وماذا تلاحظ ؟
ج) باستعمال الشّعاعين AB و $\overrightarrow{AC}$ بيّن أنّ النّقط A ، B ، C في استقامية.
د) هل مركبتي النّقطة E(3 ;2) تحقّق المعادلة $y=\frac{1}{3}x+2$ ؟ علّم النّقطة E ، وهل هي في استقامية مع النّقط A ، B ، C ، D ؟

علّم النقطتين A(-2 ;1) ، B(2 ;3) ، وارسم المستقيم (AB)، ولتكن M(x ;y) نقطة من (AB)
أ) عبّر بدلالة x و y عن الشّعاع $\overrightarrow{AM}$
ب) استنتج علاقة بين x و y تترجم استقامية النّقط A ، B ، M .

الحل:

1)ا-اكمال الجدول

النقط	A	B	C	D
فاصلتها x	0		3	-3
ترتيبها y		0		

التعليمات والتوجيهات

تعالج أمثلة يتم فيها استخدام الحاسبة البيانية لرسم المستقيمات و تعيين نقطة تقاطع مستقيمين

تعطى أنشطة يوظف فيها معامل التوجيه ويفسر بيانيا.

- يبرهن ان لكل مستقيم معادلة من الشكل: $y=ax+b$ أو $x=c$ و يتم الربط بين كل من هذين الشكلين و الشكل $ax+by+c=0$
- تعلق الأمر بمستقيم علمت منه نقطتان منه أو نقطة و منحاه.

نشاط1: (التأكد من انتماء نقطة إلى مستقيم)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المستقيمين:

$(\Delta): 2x + y - 4 = 0$.

$(L): y = +x + 1$.

1/ تأكد من انتماء النقطتين $A(1;2)$، $B(-1;0)$ إلى كل من: (Δ)، (L) أم لا؟

2/ أنشئ النقطتين A، B ثم (L).

نشاط2: (معامل توجيه مستقيم)

نعتبر في المستوي السابق المستقيم:

$(\Delta): ax + by + c = 0$.

1/ ما هو الشرط الذي يحقق b حتى يكون: $(\Delta) // \vec{j}$.

2/ نفرض الآن أن $\vec{j}$ لا يوازي (Δ). أكتب معادلة (Δ) على الشكل: $y = \alpha x + \beta$.

نشاط3: (إنشاء مستقيم علمت له معادلة)

نعتبر في المستوي السابق المستقيم:

$(k): x + 3y - 6 = 0$.

أنشئ المستقيم (k) في المستوي.

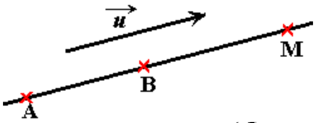
3.معادلة مستقيم

في مستوي مزوّد بمعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

❖ 1.3 شعاع توجيه مستقيم

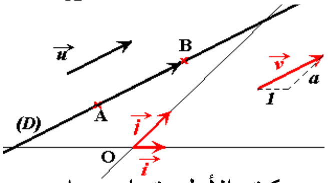
كلّ نقطتين A و B متمايزتين تعينان مستقيما (AB) ، ومن أجل كلّ نقطة M من (AB) فإنّ $\vec{AB}$ و $\vec{AM}$ مرتبطان خطيا. نقول أنّ $\vec{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB).

تعريف8



يسمّى كلّ شعاع له منحى مستقيم، شعاع توجيه لهذا المستقيم.

ملاحظة:



إذا كان AB شعاع توجيه للمستقيم (D) ، فكلّ شعاع غير معدوم ومرتبط خطيا بالشعاع $\vec{AB}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (D)

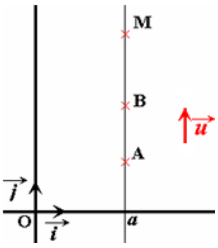
مثال: كلّ من AB ، $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D).

تعريف9

معامل توجيه مستقيم هو المركبة الثانية لشعاع توجيه لهذا المستقيم مركبته الأولى تساوي واحد.

في الشّكل السابق معامل توجيه (D) هو العدد a.

❖ 2.3 معادلة مستقيم يوازي محور التّراتيب



A و B نقطتان لهما نفس الفاصلة a أي $x_A = x_B = a$. كلّ نقطة M من المستقيم (AB) فاصلتها $x_M = a$. إنّ المستقيم (AB) يوازي محور التّراتيب.

الشّعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\vec{AB})$

مبرهنة7

1) كلّ مستقيم يوازي محور التّراتيب له معادلة من الشّكل $x = a$ و a عدد حقيقي.

2) مجموعة النّقط $M(x ;y)$ بحيث $x = a$ و a عدد حقيقي هي مستقيم يوازي محور التّراتيب.

تطبيق:تمرين 68 (D) مستقيم معادلته $3x - 5y = 7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعيّن معامل توجيهه.

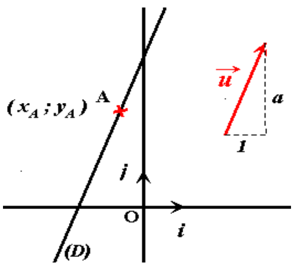
❖ 3.3 معادلة مستقيم لا يوازي محور التّراتيب

إذا كان للنّقطتين A و B فاصلتان مختلفتان أي $x_A \neq x_B$ فإنّ المستقيم (AB) لا يوازي محور التّراتيب

مبرهنة8

كلّ مستقيم لا يوازي محور التّراتيب له معادلة من الشّكل $y = a x + b$.

برهان:



ليكن (D) مستقيم لا يوازي محور التّراتيب ويشمل النّقطة $A(x_A ; y_A)$، أنّ (D) له شعاع توجيه من الشّكل $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.

لتكن M نقطة إحداثياها $(x ;y)$، أنّ $\vec{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix}$

لدينا: M تنتمي إلى (D) يكافئ $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا.

ومنه M تنتمي إلى (D) يكافئ $1\times(y - y_A) = a\times(x - x_A)$

أي : $y = ax - ax_A + y_A$

وبوضع $-ax_A + y_A = b$ تصبح المعادلة من الشّكل $y = ax + b$

مثال تطبيقي :

تمرين 73 لتكن $A(3 ;-2)$ و $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$. جدْ معادلة للمستقيم الذي يشمل النّقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.

تعالج

أمثلة يتم فيها استخدام الحاسبة البيانية لرسم المستقيمات و تعيين نقطة تقاطع مستقيمين

–تعطى أنشطة يوظف فيها معامل التوجيه ويفسر بيانيا.

- يبرهن ان لكل مستقيم معادلة من الشكل: $y = ax + b$ أو $x = c$ و يتم الربط بين كل من هذين الشكلين والشكل $ax + by + c = 0$

- تعلق الأمر بمستقيم علمت منه نقطتان منه أو نقطة و منحاه.

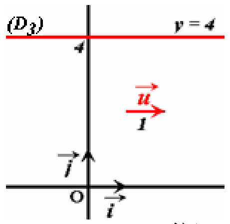
في معادلة المستقيم يتم التطرق اليها مباشرة انطلاقا من مكتسبات التلميذ في محور الدوال وتتم الأشارة الى معادلة المستقيم الموازي لمحور التراتيب

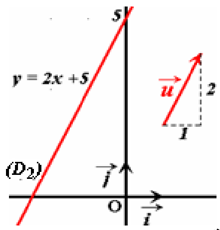
مبرهنة9

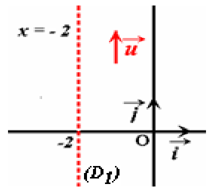
a ، b عددان حقيقيان. مجموعة النّقط M(x ;y) حيث $y = ax + b$ هي معادلة مستقيم (D) لا يوازي محور التّراتيب. المستقيم (D) هو التمثيل البياني للدّالة التآلفيّة $x \mapsto ax + b$

الشّعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، والعدد a هو معامل توجيهه.

مثال1:

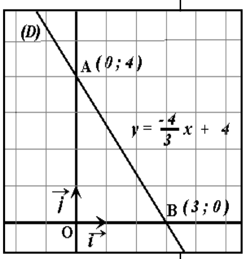






معادلة (D1): x = - 2	معادلة (D2): y = 2 x +5	معادلة (D3): y = 4
شعاع توجيه لـ (D1) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	شعاع توجيه لـ (D2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	شعاع توجيه لـ (D3) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
لا يوجد معامل التوجيه	**معامل توجيهه هو 2**	**معامل توجيهه هو 0**

مثال2: المعادلة $4x + 3y = 12$ تكتب على الشّكل $y = -4/3\ x + 4$ ، فهي معادلة مستقيم (D) معامل توجيهه هو $-4/3$ كلّ من (0 ;4) و(3 ;0) تحقّق المعادلة: $4x + 3y = 12$ ، ومنه النّقطتين A(0 ;4) ، B(3 ;0) تنتميان إلى (D) .



❖ 4.3 حساب معامل توجيه مستقيم

مبرهنة10

من أجل كلّ نقطتين $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ في معلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ حيث $x_A \neq x_B$ ، معامل توجيه المستقيم (AB) يساوي $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

برهان:

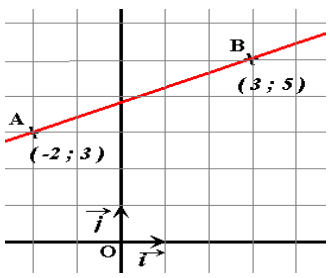
بما أنّ $x_A \neq x_B$ فالمستقيم (AB) لا يوازي محور التّراتيب ،

وبالتّالي فله معادلة من الشّكل y = a x+b

وبما أنّ كلّ من النّقطتين A ، B تنتمي إلى (AB) فإنّ $y_A = a\,x_A + b$ و $y_B = a\,x_B + b$

ومنه $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$ ، وبالتّالي $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

مثال: معامل توجيه المستقيم (AB) في الشّكل المقابل يساوي



$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{3-(-2)} = \frac{2}{5}$$

(AB) له معادلة من الشّكل $y = \dfrac{2}{5}x + b$

(يمكن حساب b بسهولة)

❖ 5.3 شرط توازي مستقيمين

مبرهنة11

يكون المستقيمان (D) و (D') اللذان معادلتاهما y = a x+b ، y = a' x+b' على التّرتيب ، متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه. أي: (D') // (D) يكافئ a = a' .

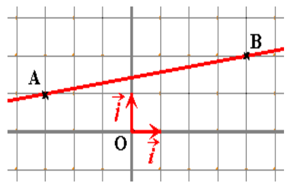
برهان:

لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D')

المستقيمان(D) و(D') متوازيان إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا،

أي $1\times a' = 1\times a$ وبالتّالي a = a'.

❖ 6.3 البحث عن معادلة مستقيم معرّف بنقطتين



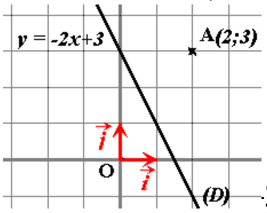
$(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ معلما للمستوي . A ، B نقطتان حيث
$A(-3\,;1)$ ، $B(4\,;2)$ جد معادلة للمستقيم (AB) .

بما أنّ النّقطتين A ، B ليس لهما نفس الفاصلة فإنّ للمستقيم (AB) معادلة من الشّكل $y=ax+b$.
إحداثيات النّقطة A تحقّق المعادلة $y=ax+b$ ومنه $1 = a(-3) + b$ ومنه $b = 3a + 1$
إحداثيات النّقطة B تحقّق المعادلة $y=ax+b$ ومنه $2 = a(4) + b$ ومنه $b = -4a + 2$
وبالتّالي: $3a + 1 = -4a + 2$ ومنه $7a = 1$ أي $a = \frac{1}{7}$ ومنه $b = 3\times\frac{1}{7} + 1 = \frac{10}{7}$
والنتيجة: المعادلة التّي نبحث عنها هي: $y = 1/7\,x + 10/7$
☜يمكن إيجاد معادلة للمستقيم (AB) باستعمال الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ حيث النّقطة $M(x\,;y)$ تنتمي إلى (AB).
احسب مركبتي $\overrightarrow{AB}$ ومركبتي $\overrightarrow{AM}$ ، ثمّ طبّق شرط الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$

إذن لإيجاد معادلة مستقيم معرّف بنقطتين يمكن إتباع إحدى الطرائق الآتية:
(1) البحث عن a،b في المعادلة $y=ax+b$ إذا كان هذا المستقيم لا يوازي محور التّراتيب

تمرين 81: لتكن النّقط $A(0\,;5)$ ، $B(6\,;2)$ ، $C(7\,;4)$ ، $D(-2\,;1)$
أ) بيّن أنّ المستقيمين (AB) و(CD) متقاطعان
ب) احسب إحداثيي نقطة تقاطعهما ، وتحقق من ذلك بيانيا

❖ 7.3البحث عن معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما



تطبيق: $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ معلما للمستوي . (D) مستقيم معادلته
$y = -2x + 3$ و A نقطة حيث $A(2\,;3)$.
جد معادلة للمستقيم (D') الذي يشمل النّقطة A ويوازي (D)

بما أنّ المستقيمين (D) و (D') متوازيان فإنّ لهما نفس معامل التوجيه 2-
للمستقيم (D') معادلة من الشّكل $y = -2x + b$
إحداثيا النّقطة A تحقّق المعادلة $y = -2x + b$ ومنه
$3 = -2(2) + b$ ومنه $b = 7$
والنتيجة: معادلة (D') هي: $y = -2x + 7$
لإيجاد معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما يمكن استغلال ما يأتي:
(1) للمستقيمين نفس المعامل التوجيه a ، وتوظيفه في معادلة من الشكل $y=ax+b$.
(2) للمستقيمين نفس شعاع التوجيه ، واستعمال شرط الارتباط الخطي لشعاعين.