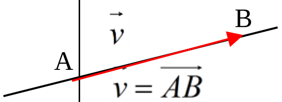
الميدان : هندسة
الوحدة التعليمية : الهندسة التحليلية
الموضوع : **الأشعة و الحساب الشعاعي**
الكفاءات المستهدفة :
الكفاءات القاعدية : . .
الوسائل التعليمية المستخدمة : .الكتاب المدرسي، السبورة، الأقلام، المسطرة و الممسحة

المستوى : 1 ج م ع ت
التاريخ : / / 2018
الزمن :

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن

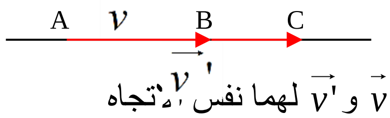
1 - مفهوم الشعاع :



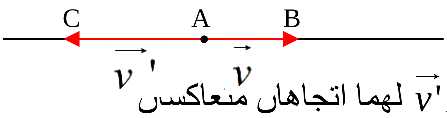
تعريف : A ، B نقطتان من المستوي. نقول أن الثنائية (A , B) تعين **شعاعا** نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$.

- إذا كانت النقطة A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما ونكتب $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
- يسمى طول القطعة المستقيمة [AB] **طويلة** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإن **منحى** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB).
- إذا كان للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ نفس المنحى ، وبوضع $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}\,'=\overrightarrow{AC}$ فإنه :

✓ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ **نفس الاتجاه** إذا كانت النقطة C تنتمي إلى نصف المستقيم [AB).
✓ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ **اتجاهان متعاكسان** إذا كانت النقطة A تنتمي إلى القطعة المستقيمة [BC].



$\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ لهما نفس الاتجاه



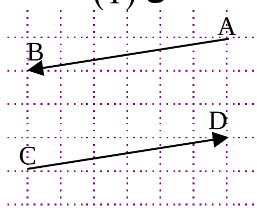
$\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ لهما اتجاهان متعاكسان

ليس للشعاع المعدوم منحى.

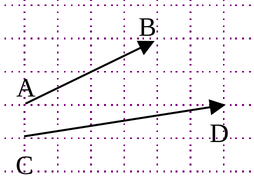
نشاط 1 : (تساوي شعاعين)

أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

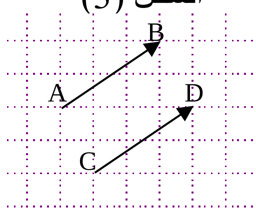
الشكل (1)



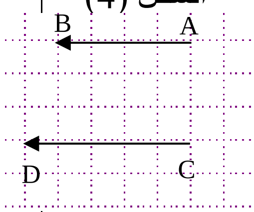
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



هل للشعاعين $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى				
نفس الاتجاه				
نفس الطويلة				

ب) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

حل النشاط :

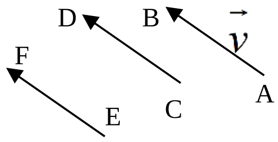
أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

هل للشعاعين $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى	نعم	لا	نعم	نعم
نفس الاتجاه	لا	لا	نعم	نعم
نفس الطويلة	نعم	لا	نعم	لا

ب) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (الجواب الشكل 3)

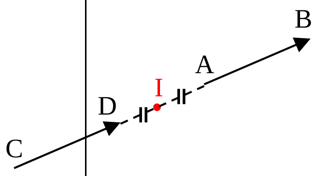
2 - تساوي شعاعين :

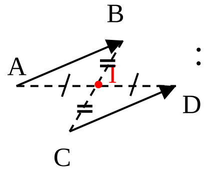
تعريف : نقول عن شعاعين أنهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه و نفس الطويلة.



مثال :

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$





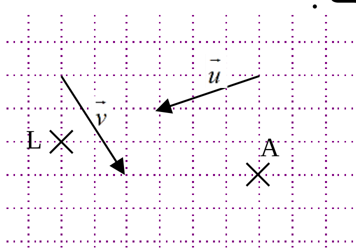
نتيجة : من أجل كل أربع نقط A ، B ، C ، D من المستوي لدينا :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **معناه** [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف.

نشاط 2 : (مجموع شعاعين)

أ) أنقل الشكل المجاور على ورقة مسطرة ، وعلم النقطتين B ، C حيث :

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.



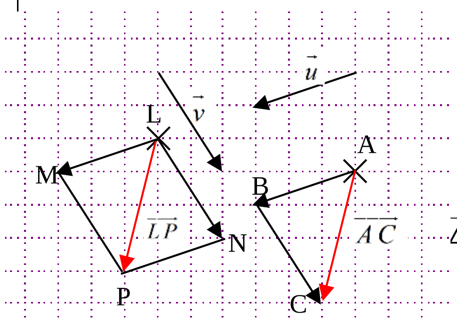
ب) ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{AC}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟

ج) علم النقطتين M ، N حيث : $\overrightarrow{LM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{LN}=\vec{v}$ ،

ثم أنشئ النقطة P بحيث يكون الرباعي LMPN متوازي أضلاع.

د) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{LP}$.

ه) ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{LP}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟



حل النشاط :

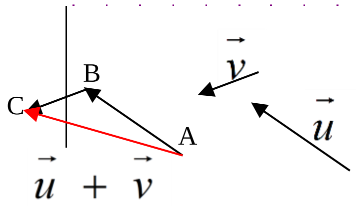
لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{NP}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LN}=\vec{v}$

ومنه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LP}$

إذن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{LP}$

3 - مجموع شعاعين :



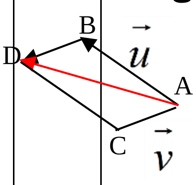
تعريف : مجموع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}+\vec{v}$

والمعرف كما يأتي :إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي حيث :

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ فإن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

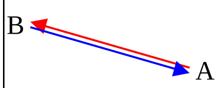
نتائج :

- من أجل كل ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (هذه العلاقة تسمى علاقة شال).



- إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ حيث : ABDC متوازي أضلاع
- إذا كان الرباعي ABDC متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

4 - الشعاعان المتعاكسان :

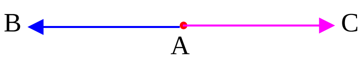


من أجل كل نقطتين A ، B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

تعريف : نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان ونكتب : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

نتائج :

- $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BA}\|$



- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **تعني** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعاكسان
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **تعني** A منتصف [BC].
- إذا كان AB = AC و A ، B ، C ليست في استقامية فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ (أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متعاكسين)

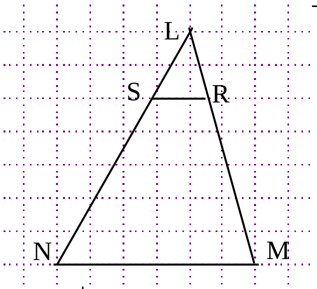
نشاط 3 : (جداء شعاع بعدد حقيقي)

1) علم نقطتين متمايزتين A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة [AC].

أ) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

ب) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ج) عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ثم عبر عن $\overrightarrow{AB}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$.



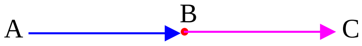
2) في الشكل المقابل ، المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

أ) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ب) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{SR}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MN}$.

حل النشاط :

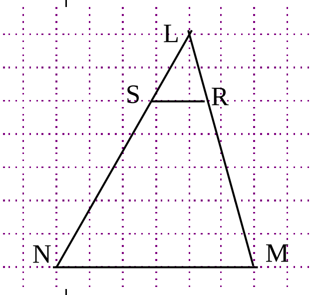
1) A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة [AC].



إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ولكن طويلتيهما مختلفتين . ولدينا AC = 2 AB.

ومنه : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



2) لدينا : المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

إذن : $\frac{7}{2} = \frac{MN}{SR}$ ومنه $SR = \frac{2}{7}MN$

الشعاعان $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ لهما نفس المنحى واتجاهان متعاكسان وطويلتان مختلفتان.

$\overrightarrow{SR} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$.

5 - جداء شعاع بعدد حقيقي :

تعريف : $\vec{u}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، و k عدد حقيقي غير معدوم.

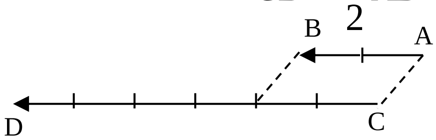
جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد k هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $k.\vec{u}$ والمعرف كما يأتي :

- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس المنحى.
- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان k موجب تماما و لهما اتجاهان متعاكسان إذا كان k سالب تماما.
- طويلة الشعاع $k.\vec{u}$ تساوي جداء طويلة $\vec{u}$ بالعدد | k | أي : $\|k.\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

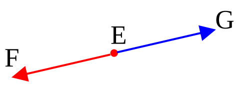
ملاحظة : عندما يكون $\vec{u} = \vec{0}$ أو k = 0 نقبل اصطلاحا أن $k.\vec{u} = \vec{0}$

أمثلة :

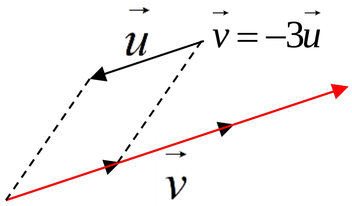
$\overrightarrow{CD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EG}$



$\vec{v} = -3\vec{u}$



خواص :

1. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

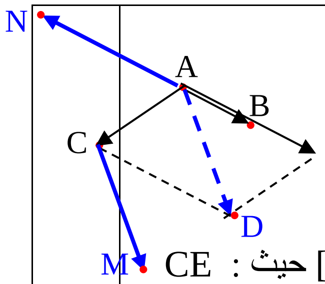
2. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.

3. $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$.

4. $1\vec{u} = \vec{u}$.

5. $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ (يعني) [k = 0 أو $\vec{u} = \vec{0}$].

حل : 34 صفحة 274



أ- نضع $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ وننشئ النقطة M حيث : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}$

ب- لدينا : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ ومنه : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$ وبالتالي : النقطة C منتصف [MN] .

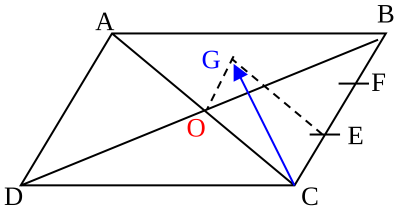
نشاط 4 :

أ) أرسم متوازي أضلاع ABCD مركزه النقطة O ، وعلم النقطتين E ، F من [BC] حيث : CE = EF = FB

ب) أنشئ النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$. ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

حل النشاط :



أ) ABCD متوازي أضلاع مركزه النقطة O ،

لدينا E ، F من [BC] حيث : CE = EF = FB

ب) إنشاء النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$ ومنه $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CE}$ إذن : $\overrightarrow{AF}=2(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})$ أي :

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AG}$

ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AG}$ ومنه $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AG}$ أي : (AG) // (AF) وبالتالي : النقط A ، G ، F في استقامية.

6 - توازي شعاعين :

تعريف : نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما **مرتبطين خطيا** إذا كان أحدهما يساوي **جداء الآخر بعدد حقيقي**.

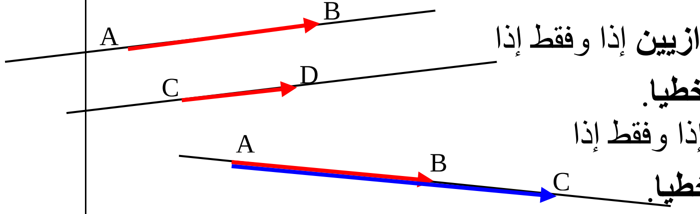
أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k.\vec{u}$.

ملاحظة : الشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع . لأنه من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من المستوي لدينا :

$\vec{0}=0.\vec{u}$

نتيجة : يكون الشعاعان غير المعدومين **مرتبطين خطيا** إذا وفقط إذا كان لهما **نفس المنحى**.

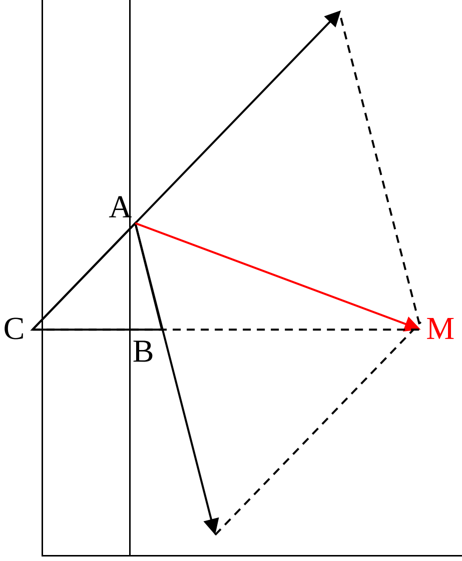
7 - التوازي والاستقامية :



مبرهنة 1 : يكون المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيين** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ **مرتبطين خطيا**.

مبرهنة 2 : تكون النقط A ، B ، C في **استقامية** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ **مرتبطين خطيا**.

حل :تمرين 45 صفحة 275



أ- أنشئ النقطةM المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ب- بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ومعناه $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

أي : $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CB}$

وبالتالي (CB) // (CM)

وبما أن للمستقيمين نقطة مشتركة C فإن النقط C ، B ، M في استقامية .

الميدان : هندسة	**المستوى :** 1 ج م ع ت
الوحدة التعليمية : الهندسة التحليلية	**التاريخ :** / /2018
الموضوع : المعلم للمستوى	**الزمن :**
الكفاءات المستهدفة :	
الكفاءات القاعدية : .	
الوسائل التعليمية المستخدمة : .الكتاب المدرسي، السبورة، الأقلام، المسطرة و الممسحة	

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن

نشاط :

O ، I ، J ثلاث نقط متمايزة من المستوي وليست في استقامية.

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعان من المستوي حيث $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$

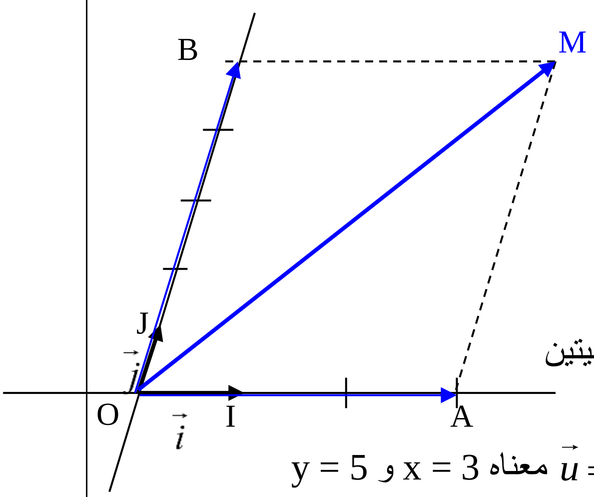
أ) بين أن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا.ماذا تسمى الثلاثية $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ؟

ب) A نقطة من المستقيم (OI) و B نقطة من المستقيم (OJ) حيث $\overrightarrow{OA}=3\,\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=5\,\vec{j}$

أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. ماذا تمثل الثنائية (3 ; 5) بالنسبة إلى النقطة M وبالنسبة إلى الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ؟

ج) $\vec{u}$ شعاع من المستوي حيث $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ عين العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

حل النشاط :



أ) لدينا النقط O ، I ، J متمايزة إذن الشعاعان $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ غير معدومين .

وبما أن هذه النقط ليست في استقامية فإن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا

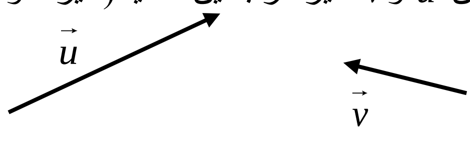
الثلاثية $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ تسمى معلما للمستوي.

ب) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ومنه : $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$

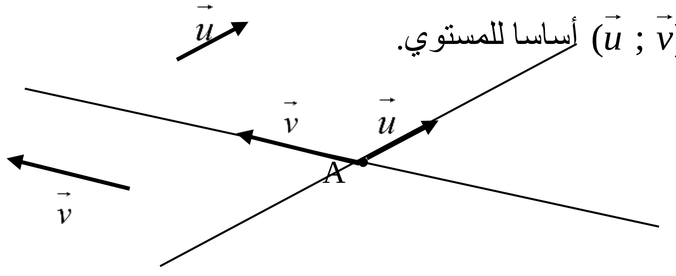
الثنائية (3 ; 5) هي إحداثيتي النقطة M وتمثل المركبتين السلميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$

ج) $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ إذن $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ معناه x = 3 و y = 5

تعريف 1 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي. نقول عن الثنائية $(\vec{u}\,;\vec{v})$ أنها أساس للمستوي إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا (غير متوازيين و غير معدومين)

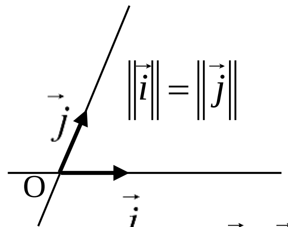


تعريف 2 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي و A نقطة منه . نقول عن الثلاثية $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ أنها معلما للمستوي إذا كانت $(\vec{u}\,;\vec{v})$ أساسا للمستوي.

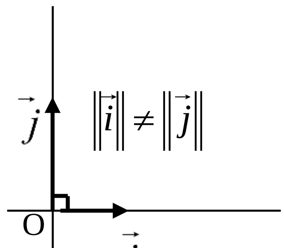


- النقطة A تسمى مبدأ المعلم
- المحور $(A\,;\vec{u})$ يسمى محور الفواصل ؛ المحور $(A\,;\vec{v})$ يسمى محور التراتيب .

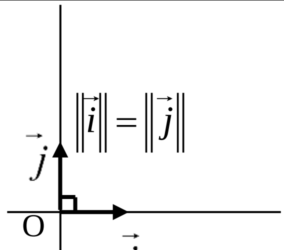
ملاحظة : توجد ثلاث أنواع خاصة للمعالم :



معلم متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$



معلم متعامد $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$



معلم متعامد $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ ومتجانس

مبرهنة 1 : $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ معلم للمستوي.

من أجل كل نقطة M من المستوي توجد ثنائية وحيدة (x ; y) من الأعداد الحقيقية بحيث

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

ملاحظة :

إذا كانت $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ فإن الثنائية (x ; y) تسمى إحداثيا النقطة M في المعلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ ونكتب M(x ; y) ، العدد الحقيقي x يسمى فاصلة النقطة M والعدد الحقيقي y يسمى ترتيبها.

ونكتب كذلك $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ والثنائية $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تسمى المركبتين السلّميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$ في الأساس $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$

العدد الحقيقي x يسمى المركبة الأولى للشعاع $\overrightarrow{OM}$ العدد الحقيقي x يسمى المركبة الثانية له.

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **تعني** M(x ; y) في المعلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ **ومعناه** $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ في الأساس $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$

تمرين 61 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. ABCD متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة M منتصف [CD] .

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

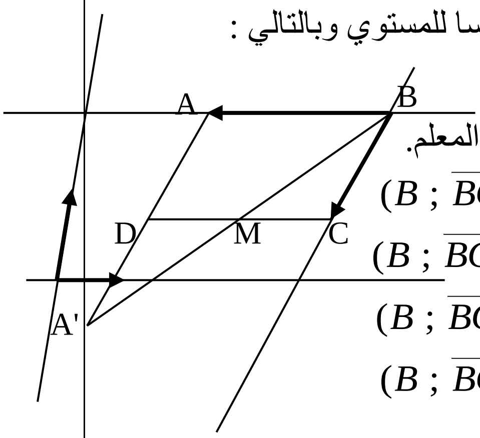
ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف [BA'].

الحل :

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

لدينا ABCD متوازي أضلاع إذن النقط الأربعة متمايزة و (BC) لا يوازي (BA) ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا أي الثنائية $(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$ تشكل أساسا للمستوي وبالتالي :

$(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي



ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

لدينا : $\overrightarrow{BA} = 0\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : A(0 ; 1) في المعلم $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BB} = 0\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : B(0 ; 0) في المعلم $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : C(1 ; 0) في المعلم $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BD} = 1\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : D(1 ; 1) في المعلم $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $M(1\,;\,\frac{1}{2})$ في المعلم $(B\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ومنه : A'(2 ; 1) في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف [BA'].

نفرض أن : 'M منتصف [BA'] إذن : $M'(\frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2})$ ومنه : $M'(1\ ;\ \frac{1}{2})$

إذن 'M منطبقة على M ومنه النقطة M هي منتصف [BA'].

نتائج : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي و k عدد حقيقي.

1. $\vec{u} = \vec{v}$ يكافئ x = x' و y = y'
2. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
3. $k.\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

مبرهنة 2 : (إحداثيي منتصف قطعة)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

إحداثيا النقطة M منتصف [AB] هما $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

مبرهنة 3 : (مركبتا شعاع)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي . و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

مبرهنة 4 : (شرط الارتباط الخطي لشعاعين)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي ، $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي

يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان x y' – x' y = 0 .

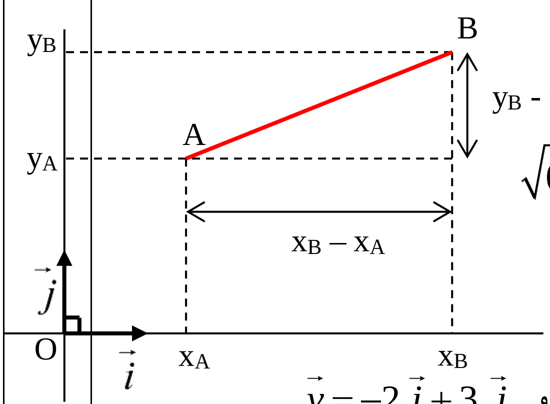
مبرهنة 5 : (المسافة بين نقطتين)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

المسافة بين النقطتين A و B هي : $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



تمرين : 50 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. ليكن $\vec{u} = 4\,\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{v} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية : $\vec{u} + \vec{v}$ ؛ $\vec{u} + 2\,\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .

الحل :

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية :

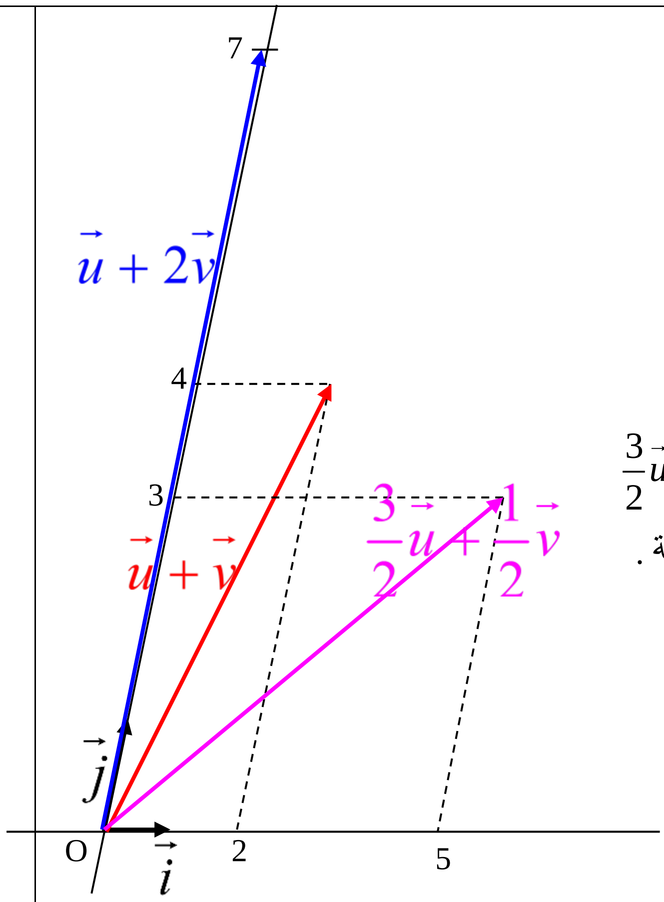
$\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\vec{v}=7\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ ومنه : $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .



تمرين 56 : صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

عين في كل مما يأتي العدد x بحيث يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

الحل :

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $1\times6-2(x+1)=0$ معناه $x = 2$

ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x-(-5)(2-x)=0$ معناه $x=\frac{5}{2}$

ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x^2 = 81$ يكافئ أن $x = -9$ أو $x = 9$.

الميدان : هندسة	**المستوى** : 1 ج م ع ت
الوحدة التعليمية : الهندسة التحليلية	**التاريخ** : / / 2018
الموضوع : معادلة مستقيم	**الزمن** :
الكفاءات المستهدفة :	
الكفاءات القاعدية : .	
الوسائل التعليمية المستخدمة : الكتاب المدرسي، السبورة، الأقلام، المسطرة و الممسحة	

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن
	نشاط 1 :ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. لنعلم النقطتين $A(-2\ ;\ 3)$ ، $B(3\ ;\ -4)$. 1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) 2) $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا. 3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا. باعتبار $(x\ ;\ y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x . 4) $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x\ ;\ y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطين خطيا. **حل النشاط :** 1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) . لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\-4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}$ إذن : $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا. $\vec{u}$ هو شعاع التوجيه المستقيم (AB) . 2) $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا. لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا معناه : $-7(x+2)=5(y-3)$ ويكافئ أن : $7x+5y-1=0$. تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) . 3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا. مجموعة النقط N هي المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي منحى الشعاع $\vec{v}$. باعتبار $(x\ ;\ y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x لدينا : $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $3(x+2)=2(y-3)$ ويكافئ أن : $3x-2y+12=0$ أي : $2y=3x+12$ ومعناه أن : $y=\frac{3}{2}x+4$	

4) $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط L(x ; y)

بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}x-3\\ y+4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطان خطيا معناه أن :

$$\beta(x-3)=\alpha(y+4)$$

ويكافئ $\beta x-\alpha y-4\alpha-3\beta=0$

1. التعريف :

$\vec{v}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا ، هي مستقيم (Δ) يوازي منحى $\vec{v}$.

كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (Δ) يسمى شعاع التوجيه للمستقيم (Δ).

ملاحظات :

- إذا كان $\vec{v}$ شعاع التوجيه المستقيم (Δ) فإن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم k ، $k.\vec{v}$ هو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (Δ). (لمستقيم عدد غير منته من أشعة التوجيه)
- يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

مثال : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي ، مجموعة النقط M بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا هي المستقيم (AB) شعاع توجيهه كل شعاع $k.\overrightarrow{AB}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

2. معادلة مستقيم :

مبرهنة : ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

- كل مستقيم له معادلة من الشكل a x + b y + c = 0 حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة و x و y ، متغيرين حقيقيين ؛ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$
- a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة حيث : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$. مجموعة النقط M(x ; y) التي إحداثياتها (x ; y) تحقق المعادلة : a x + b y + c = 0 هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$

تعريف : العلاقة a x + b y + c = 0 حيث : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم.

إذا كان $b\neq 0$ فالمعادلة تصبح من الشكل $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ وتسمى المعادلة المبسطة ،

العدد $-\frac{a}{b}$ يسمى معامل التوجيه للمستقيم.

ملاحظات :

01.إذا كان b = 0 فإن $a\neq 0$ والمعادلة الديكارتية للمستقيم تكون من الشكل : a x + c = 0 أي $x=-\frac{c}{a}$

شعاع التوجيه لهذا المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ a\end{pmatrix}$ ولدينا : $\vec{u}=a.\vec{i}$ معناه أن هذا المستقيم يوازي حامل محور التراتيب.

نتيجة : يكون مستقيم موازيا لحامل محور التراتيب إذا وفقط إذا كانت له معادلة من الشكل x = a حيث a ثابت حقيقي.

02.إذا كان $b\neq 0$ لدينا شعاع توجيهه المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ و ولدينا : $\vec{u}=-b\vec{v}$ حيث $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

نتيجة : $y=\alpha x+\beta$ معادلة للمستقيم (Δ) معناه أن $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (Δ)

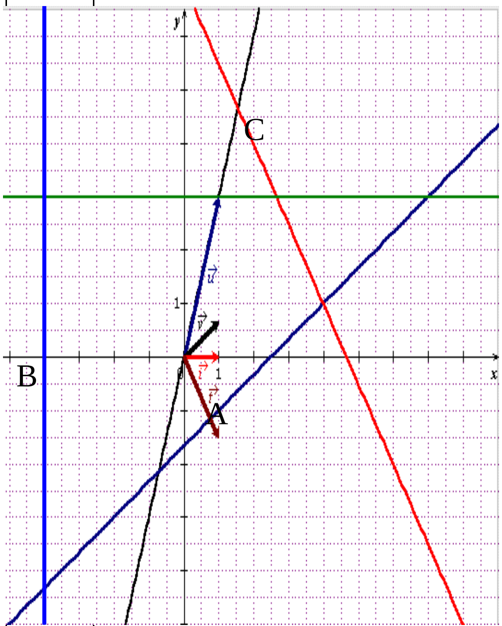
.03إذا كان المعلم متعامد ومتجانس معامل التوجيه لمستقيم يدعى كذلك ميل هذا المستقيم

حل : تمرين 68 صفحة 277

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

حل : تمرين 70 صفحة 277

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .



المستقيم (D) يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

حل :تمرين 71 صفحة 277

(D_1) : y = 3 x

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة O(0 ; 0)

(D_2) : $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة A(1 ; - 1)

(D_3) : x = - 4 شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة B(-4 ; 0)

(D_4) : $y=-\frac{3}{2}x+7$ شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة C(2 ; 4)

(D_5) : $y=3$ شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة D(0 ; 3)

حل : تمرين 73 صفحة 277

الطريقة 1 : لتكن M(x ; y) نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\ y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ معناه أن : - (x – 3) = 2(y + 2) ومعناه أن : x + 2 y + 1 = 0 .

الطريقة 2 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم ومنه : معادلته

هي : $y=-\frac{1}{2}x+b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2=-\frac{1}{2}\times3+b$ أي : $b=-\frac{1}{2}$ ومنه :

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

الطريقة 3 : معادلة المستقيم هي من الشكل a x + b y + c = 0 شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$

ومنه : b = - 2 و a = - 1 إذن : - x – 2 y + c = 0 بما أن المستقيم يشمل A فإن : - 3 + 4 + c = 0

ومنه : c = - 1 إذن : المعادلة هي : - x – 2 y - 1 = 0

حل : تمرين 76 صفحة 277

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة A(-2 ; -3) .

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : b = - 6

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: (0 ; 4 -) و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: (0 ; -6)

3. شرط توازي مستقيمين

نشاط 2 :

1) (D) : a x + b y + c = 0 و(D') : a' x + b' y + c' = 0 . بين أن (D) // (D') يكافئ : ab' = a'b

2) (D) : $y=\alpha x+\beta$ و(D') : $y=\alpha' x+\beta'$. بين أن (D) // (D') يكافئ : ($\alpha=\alpha'$)

حل النشاط :

1) (D) // (D') معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن : - ab' = - a'b أي : ab' = a'b

2) (D) // (D') معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\alpha'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن ($\alpha=\alpha'$)

مبرهنة 1 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما a x + b y + c = 0 و a' x + b' y + c' = 0 على الترتيب. يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان ab' = a'b

مبرهنة 2 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $y=\alpha x+\beta$ و $y=\alpha' x+\beta'$ على الترتيب. يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه (أي : $\alpha=\alpha'$)

حل : تمرين 75 صفحة 277

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x+b$

إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : (4 ; 0) إذن : $0=\sqrt{2}\times 4+b$ أي : $b=-4\sqrt{2}$

ومنه معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$

حل : تمرين 77 صفحة 277

أ) (D) : $2x-3y=1$ (D') : $-x+\frac{3}{2}y=0$

(D') // (D) يكافئ : $2\times\frac{3}{2}=(-1)\times(-3)$ أي : 3 = 3 و هذا صحيح

ب) (D) : $-3x+7=0$ (D') : $x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

لدينا : ab' = (-3)×0 = 0 و ba' = 0 × 1 = 0 إذن : ab' = a'b معناه : (D) // (D')

الميدان : هندسة	**المستوى :** 1 ج م ع ت
الوحدة التعليمية : الهندسة التحليلية	**التاريخ :** / / 2018
الموضوع : جملة معادلتين خطيتين لمجهولين	**الزمن :**
الكفاءات المستهدفة :	
الكفاءات القاعدية :	
الوسائل التعليمية المستخدمة : .الكتاب المدرسي، السبورة، الأقلام، المسطرة و الممسحة	

مراحل الدرس	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$

نعتبر المعادلات : $(E_1)\ :\ x+2y=4$ ، $(E_2)\ :\ x-y=1$ ، $(E_3)\ :\ x+2y=-1$

(D_1) ، (D_2) ، (D_3) مستقيمات معادلاتها (E_1) ، (E_2) ، (E_3) على الترتيب .

أ) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

ب) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

ج)من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية $(2\ ,1)$ ؟

د) ماذا تعتبر النقطة $A(2\ ,1)$ بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

هـ)أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

حل النشاط :

أ) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

الحرفان x و y هما مجهولان حقيقيان بالنسبة للمعادلات المعطاة .

ب) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

لدينا : $(D_1)\ :\ x+2y=4$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

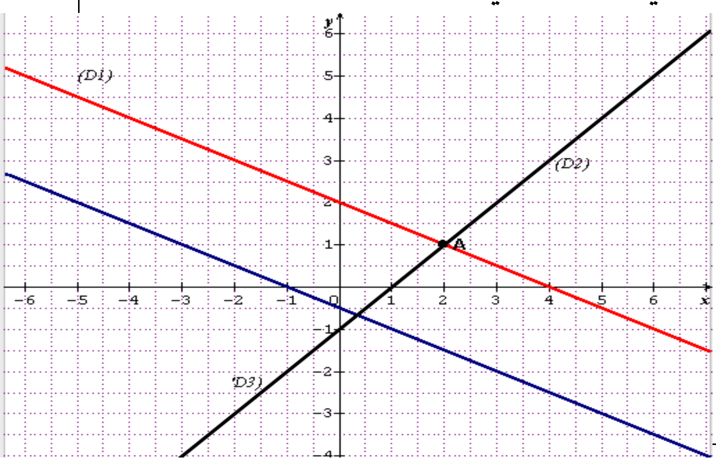
$(D_2)\ :\ x-y=1$ شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$(D_3)\ :\ x+2y=-1$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(D_1) و (D_3) متوازيان لأن لهما نفس شعاع التوجيه

ولدينا : $(-2)\times1\neq1\times1$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي : (D_2) لا يوازي (D_1) ولا يوازي (D_3)

ج) من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية $(2\ ,1)$ ؟



$(E_1)\ :\ x+2y=4$ ولدينا : $2+2\times1=4$

$(E_2)\ :\ x-y=1$ ولدينا : $2-1=1$

$(E_3)\ :\ x+2y=-1$ ولدينا : $2+2\times1=4$

إذن الثنائية $(2\ ,1)$ تحقق كل من المعادلتين

(E_1) و (E_2) ولا تحقق المعادلة (E_3).

د) ماذا تعتبر النقطة $A(2\ ,1)$ بالنسبة إلى

المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2).

هـ)رسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

تعريف 1 : نسمي معادلة خطية ذات مجهولين كل معادلة من الشكل $ax+by=c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

ملاحظات :

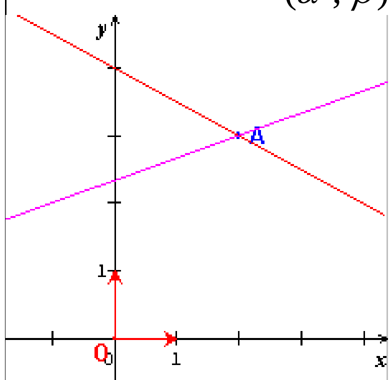
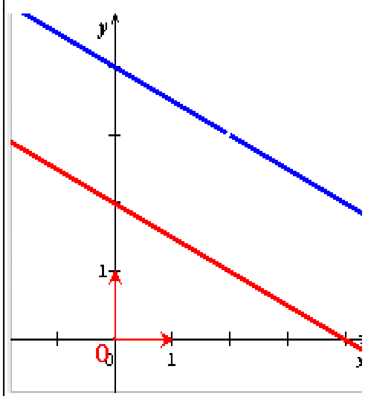
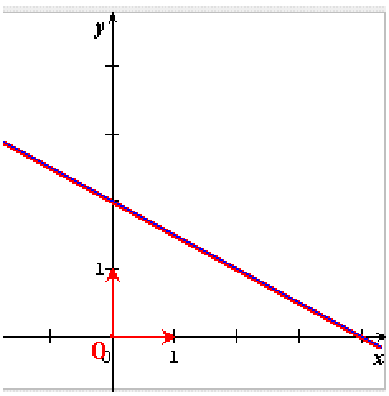
- كل معادلة مستقيم هي معادلة خطية ذات مجهولين حقيقيين
- نرمز إلى $\mathbb{R}^2$ مجموعة الثنائيات من الأعداد الحقيقية . الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلة خطية تسمى حلولها.
- إذا كانت $(a\ ;\ b) = (0\ ;\ 0)$ فإن : $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c = 0$ و Φ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c \neq 0$
- في كل معادلة خطية نعتبر أن $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ وتعتبر معادلة مستقيم.

تعريف 2 : نسمي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة من الشكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a ، b ، c ، a' ، b' ، c' أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين معناه إيجاد كل الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من المجموعة $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلتي الجملة في آن واحد.

ملاحظة : الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$ حل للجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ معناه أن النقطة $A(\alpha\ ;\ \beta)$ هي نقطة من تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) الذين معادلتاها $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ على الترتيب.

ثلاث حالات ممكنة لحل الجملة (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

(D) و (D') متقاطعان في النقطة $A(\alpha\ ;\ \beta)$ إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا وهو الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$ 	(D) و (D') متوازيان تماما إذن الجملة (S) لا تقبل حلول . 	(D) و (D') منطبقان إذن للجملة (S) ما لا نهاية من حلول . 
في هذه الحالة : $ab'-ba' \neq 0$	في هاتين الحالتين لدينا : $ab'-ba'=0$	
$s=\{(\alpha\ ;\ \beta)\}$	$s=\Phi$	$s=\{(x\ ;\ y)/\,ax+by=c\}$

مبرهنة : (S) هي الجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

$ab'-ba'\neq 0$ معناه أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا

$ab'-ba'=0$ معناه إما الجملة (S) لا تقبل حلول و إما الجملة (S) تقبل ما لانهاية من الحلول.

تعريف 3 : العدد الحقيقي $ab'-ba'$ يسمى محدد الجملة (S) ونرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

ونكتب : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-ba'$

حل : تطبيق : 79 صفحة 278

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1-(-1)k = k+3$$

للجملة (S) حل وحيد يكافئ أن : $k+3\neq 0$ معناه أن : $k\neq -3$ أي : $k\in\mathbb{R}-\{-3\}$

طرق حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

حل : تمرين 78 صفحة 278

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases} \ldots (S)$

- **طريقة التعويض :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بما أن $-1\neq 2$ فللجملة (s) حل وحيد .

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2x=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases} 3x=6 \\ y=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ وبالتالي : $s=\{(2\,;\,4)\}$

- **طريقة الجمع:** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بطرح طرف من طرف للمعادلتين نجد $3x-6=0$

معناه $x=2$ و(S) تكافئ : $\begin{cases} 2y=-2x+12 \\ y=2x \end{cases}$ بجمع طرف من طرف للمعادلتين نجد

$3y=12$ معناه أن : $y=4$ وبالتالي : $s=\{(2\,;\,4)\}$

- **طريقة المحدد :** $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases} \ldots (S)$

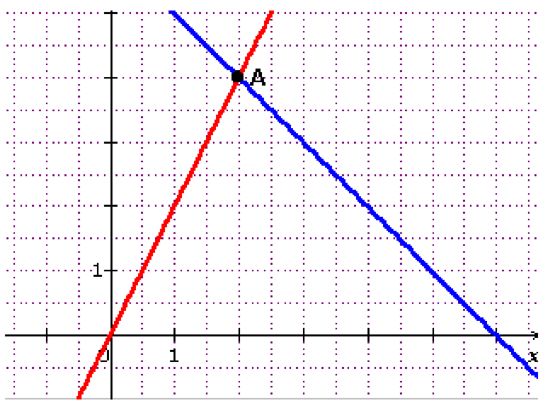
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1-1(-2)=3$ ومنه : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ فللجملة (S) حل وحيد $(x\,;\,y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{6}{3}=2 \quad \text{و} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{3}=\frac{12}{3}=4$$

وبالتالي : $s=\{(2\,;\,4)\}$

نضع : (D) : $x+y=6$

و(D') : $-2x+y=0$



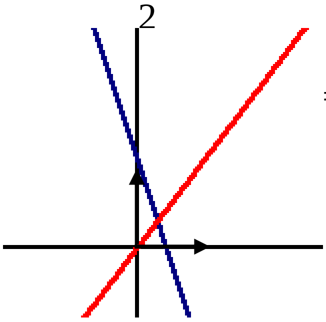
ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}$

المحدد غير معدوم ومنه الجملة تقبل حلا وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}} = \frac{2(-4+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{2}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{-(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

$$x=\frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}$$

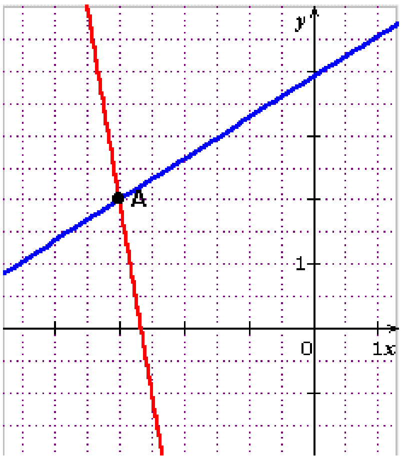
$$y=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}} = \frac{-2(2\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{2})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$



$y=\frac{19\sqrt{3}-24}{13}$ وبالتالي : $=\left\{\left(\frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}\ ;\ \frac{19\sqrt{3}-24}{13}\right)\right\}$

نضع : (D) : $x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و(D') : $x\sqrt{6}-2y=0$



ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -7-66=-73$

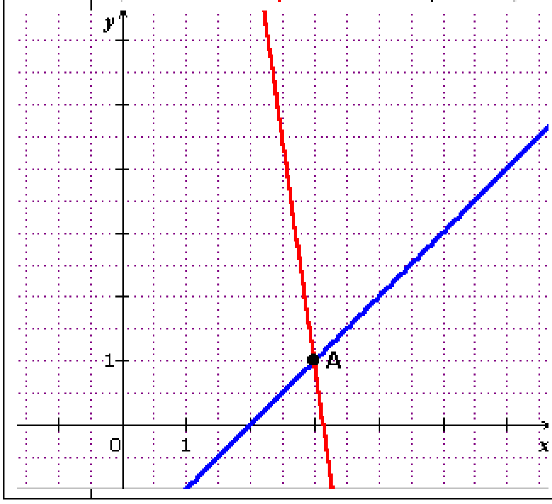
إذن للجملة حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$x=\frac{\begin{vmatrix} 43 & 11 \\ -16 & 1 \end{vmatrix}}{-73}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} -7 & 43 \\ 6 & -16 \end{vmatrix}}{-73}$ أي :

$x=\frac{43+176}{-73}=-\frac{219}{73}=-3$ و $y=\frac{112-258}{-73}=\frac{146}{73}=2$

وبالتالي : $s=\{(-3\ ;\ 2)\}$

نضع : (D) : $-7x+11y=43$ و(D') : $6x+y=-16$



د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-7x+22 \end{cases}$

بما أن : $-7\neq 1$ فإن للجملة حل وحيد .

$\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y=x-2 \\ x-2=-7x+22 \end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases} y=x-2 \\ 8x=24 \end{cases}$ وتكافئ أن : $\begin{cases} x=3 \\ y=3-2 \end{cases}$

وبالتالي : $s=\{(3\,;1)\}$

حل :تمرين 80 صفحة 278

أ) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=3 \\ -6x+3y=k \end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases} y=2x-6 \\ y=2x+\frac{1}{3}k \end{cases}$ بما أن للمعدلتين المختصرين نفس معامل x فإن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

- طريقة أخرى : $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -6 & 3 \end{vmatrix}=3-3=0$ إذن الجملة (S) إما لا تقبل حلا وإما لها ما لانهاية من الحلول.

ب) للجملة (S) ما لانهاية من الحلول معناه أن : $\frac{1}{3}k=-6$ أي : $k = -18$.