⌖ الدوال الأصلية ⌖

◁ **الدوال الأصلية لدوال مألوفة:** C عدد حقيقي

الدالة f	الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I	المجال I، حيث f و F معرفتان عليه
$x \mapsto k$ ، (k ثابت حقيقي)		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$		▪ $I = \mathbb{R}$ من أجل $n > 0$ ▪ $I =]-\infty; 0[$ أو $I =]0; +\infty[$ من أجل $n \leq -2$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$		$I =]0; + +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		$I =]0; + +\infty[$
$x \mapsto \cos x$		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$ $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$ $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto e^{ax}$		$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		$I = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

◁ **البحث عن الدوال الأصلية:**

C ثابت حقيقي، I مجال من $\mathbb{R}$ و u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على I.

الدالة f	الدالة الأصلية F لـ f على I	ملاحظات	أمثلة
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$		$u(x) \neq 0$ على I في حالة $n < 0$	$f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^5$ $f(x) = x^2(x^3-1)^3$ $f(x) = \frac{2x-3}{(x^2-3x+10)^4}$ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
$\frac{u'}{u}$		يمكن كتابة: $\ln\lvert u\rvert + C$	$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$		من أجل $x \in I$: $u(x) > 0$	$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$
$u'e^u$			$f(x) = xe^{x^2}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
$u' \cos u$			$f(x) = \cos 2x$
$u' \sin u$			$f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

⌖ الدوال الأصلية ⌖

◁ أمثلة أخرى

الدالة f	نضع: $u = \cdots$	إذن: $u' = \cdots$	عبارة f بدلالة u و u'	دالة أصلية للدالة f :
$(3x-1)^6$				
$\frac{1}{(2x-1)^4}$				
$x\cos(x^2)$				
$\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$				
$\frac{\cos(2x)}{(3+\sin(2x))^3}$				
$\frac{(\ln x)^2}{x}$				
$x\sqrt{x^2-1}$				
$16\,\frac{e^x}{1+2e^x}$				
$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$				
$\frac{1}{x\ln x}$				
$x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$				
$\frac{e^x}{(2+e^x)^3}$				
$\cos(x)\sin^5(x)$				
$\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$				
$\frac{2}{\sqrt{1-3x}}$				

كيف نحسب تكامل ؟

الطريقة الأولى (تطبيق 01)

1. نبحث عن دالة أصلية F للدالة f على المجال $[a;b]$
2. نحسب $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

الطريقة الثانية (تطبيق 02)

استعمال المكاملة بالتجزئة في حالة عدم التمكن من تعيين دالة أصلية. لذلك نحلل الدالة f على شكل جداء من الشكل $f = uv'$

1. نتحقق أنّ الدوال u، u'، v و v' هي دوال مستمرة على مجال التكامل.
2. نحسب $u'(x)$ و $v(x)$
3. نطبق صيغة المكاملة بالتجزئة

ملاحظات لتحليل f إلى الجداء uv'. ليكن P كثير حدود

إذا كانت من الشكل:	نضع:
$P(x)\ln x$	$v'(x) = P(x)$ و $u(x) = \ln x$
$P(x)\mathrm{e}^x$	$v'(x) = \mathrm{e}^x$ و $u(x) = P(x)$
$P(x)\cos x$	$v'(x) = \cos x$ و $u(x) = P(x)$
$P(x)\sin x$	$v'(x) = \sin x$ و $u(x) = P(x)$

تطبيقات:

01 أحسب:

$\int_0^1 \left(5(3x-1)^2 - \frac{1}{2x-5}\right)\mathrm{d}x$ ، $\int_1^{-1} x^2\mathrm{e}^{-2x^3+1}\,\mathrm{d}x$

و $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

02 أحسب التكاملات التالية

1. $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ، $J = \int_2^4 (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$

$K = \int_0^{\pi} 2t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ ، $L = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$

2. $I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ ، $J = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$

$K = \int_0^3 x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$ ، $L = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

$M = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

كيف نحسب مساحة حيّز مستوي ؟

الطريقة

إذا كان الحيّز محصور بين...	نتحقق أن ...	يُمكن كتابة:
المستقيمات ذات المعادلات $x = a$ و $x = b$، منحنى الدالة و محور الفواصل	f موجبة على $[a;b]$	$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
	f سالبة على $[a;b]$	$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
المستقيمات ذات المعادلات $x = a$ و $x = b$، منحنى الدالة f و منحنى الدالة g	من أجل كل $x \in [a;b]$، $f(x) < g(x)$	$A = \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$

تطبيقات:

03 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = (x-1)(2-\mathrm{e}^{-x})$$

1. أثبت أنّه من أجل كل $x \in [1;3]$، $f(x) \geqslant 0$
2. استنتج مساحة حيّز المستوي المحدد بالمستقيمات ذات المعادلات $x = 1$ و $x = 3$، المنحنى الممثل للدالة f و محور الفواصل.

04 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \ln(x+1)$$

1. تحقق أنّ $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$
2. أثبت أنّه من أجل كل $x \geqslant 0$، $f(x) \geqslant 0$
3. استنتج مساحة حيّز المستوي المحدد بالمستقيمات ذات المعادلات $x = 0$ و $x = a$ مع $a > 0$ ، المنحنى الممثل للدالة f و محور الفواصل.

التمرين الأول

لتكن الدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. بيّن أنّ g فردية ثمّ أدرس تغيّراتها.
2. بيّن أنّ المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.
3. أرسم المنحنى $\mathcal{C}$.
4. أحسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل $x \neq -a$ حيث $h(x) = (x+a)\ln|x+a| - x$، a عدد حقيقي.
5. استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]2; +\infty[$.

التمرين الثاني

◁ **الجزء الأول**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1. بيّن أنّ الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.
2. نفرض أنّ $F(0) = 0$. عيّن معادلة للماس d للمنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة F عند النقطة O التي فاصلتها 0
3. أدرس اتجاه تغيّر الدالة F على $\mathbb{R}$
4. أدرس إشارة الدالة F على $\mathbb{R}$
5. أدرس إشارة F'' و استنتج وضعية المنحنى $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى d.

◁ **الجزء الثاني**

لتكن الدالة G المعرفة كما يلي: $G(x) = (ax+b)\ln x$

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b لكي تكون الدالة G أصلية على المجال $]0; +\infty[$ للدالة g المعرفة بـ:
$$g(x) = \frac{2x - 3 + 2x\ln x}{x}$$
2. استنتج دالة أصلية للدالة g التي تنعدم من أجل e

التمرين الثالث (شعبة رياضيات)

1. ليكن التكامل $K = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين، أثبت أنّ: $K = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{5}$

2. ليكن
$$J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{و} \quad I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$
أحسب $I+J$ و $I-J$. استنتج قيمتي I و J.

التمرين الرابع (شعبة رياضيات)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي:
$$f(x) = 1 - \frac{\ln(x^2)}{x}$$

1. أدرس تغيّرات الدالة f.
2. أدرس وضعية المنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$.
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$
4. أحسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز المحدد بالمنحنى $\mathcal{C}$ و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$، $x = \alpha$ و $y = 1$.
5. بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}$ ثمّ استنتج حصرا لـ $\mathcal{A}(\alpha)$

التمرين الخامس (شعبة رياضيات)

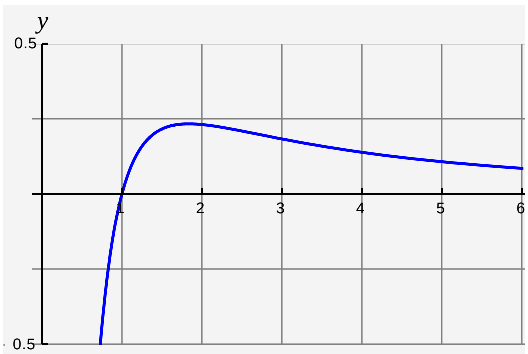
نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:
$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$$

1. بيّن أنّه من أجل كل $x > 1$، $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$
2. (أ) أحسب $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ و $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(يُمكن استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب J)

(ب) استنتج حصرا لـ $K = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

3. الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس حيث الوحدة هي 1 cm على محور الفواصل و 4 cm على محور التراتيب. نعتبر مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $2 \leqslant x \leqslant 4$ و $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ و نرمز بـ $\mathcal{A}$ إلى مساحتها.



باستعمال الحصر الموجود في السؤال 2. (ب) أعط حصرا لـ $\mathcal{A}$ بـ cm^2.