⌖ المتتاليات ⌖

◁ المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية

	المتتالية الحسابية ذات الأساس r	**المتتالية الهندسية** ذات الأساس q
التعبير بعلاقة تراجعية	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
التعبير بالعبارة الصريحة	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
العلاقة بين الحدود	$u_m - u_p = (m-p)r$	$u_m = u_p \times q^{m-p}$
مجموع p حد متتابعة	$\mathrm{S} = \underbrace{a + \cdots + l}_{p \text{ حد}}$ $= \frac{p(a+l)}{2}$ حالة خاصة: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$\mathrm{S} = \underbrace{a + \cdots + l}_{p \text{ حد}}$ $= a \times \frac{1-q^p}{1-q}$ حالة خاصة: $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

ملاحظة: عدد حدود المجموع: $S = u_m + \cdots + u_p$ هو: $p - m + 1$

◁ اتجاه تغيّر متتالية

- القول أنّ المتتالية (u_n) متزايدة يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geqslant u_n$
- القول أنّ المتتالية (u_n) متناقصة يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leqslant u_n$
- القول أنّ المتتالية (u_n) متناقصة يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n$
- القول أنّ المتتالية (u_n) رتيبة يعني أنّها إما متزايدة و إما متناقصة

◁ نهاية متتالية

- **نهاية حقيقية** (أو محدودة): القول أنّ العدد الحقيقي ℓ هو نهاية المتتالية (u_n) يعني أنّ كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل حدود المتتالية ابتداءً من رتبة معيّنة. و نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة و نهايتها ℓ.
- **نهاية غير محدودة**: القول أنّ $+\infty$ هي نهاية المتتالية (u_n) يعني أنّ كل مجال مفتوح من الشكل $]A; +\infty[$ يشمل كل حدود المتتالية ابتداءً من رتبة معيّنة.
- **المتتالية الهندسية**: $u_n = q^n$. q عدد حقيقي.

إذا كان $-1 < q < 1$ فإنّ $\lim\ ^{n} = 0$

إذا كان $q > 1$ فإنّ $\lim q^n = +\infty$

إذا كان $q \leq -1$ فإنّ المتتالية ليست لها نهاية.

◁ المتتاليات المحدودة

- القول أنّ المتتالية (u_n) **محدودة من الأعلى** يعني وُجود عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $\boldsymbol{u_n \leq M}$. هذا العدد M يُسمّى العنصر الحاد من الأعلى للمتتالية (u_n).
- القول أنّ المتتالية (u_n) **محدودة من الأسفل** يعني وُجود عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $\boldsymbol{u_n \geq m}$. هذا العدد m يُسمّى العنصر الحاد من الأسفل للمتتالية (u_n).

◁ تقارب المتتاليات الرتيبة

- نهاية متتالية **متزايدة و غير محدودة من الأعلى** هي $+\infty$.

نهاية متتالية **متناقصة و غير محدودة من الأسفل** هي $-\infty$.

- كل متتالية **متزايدة و محدودة من الأعلى: متقاربة**.

كل متتالية **متناقصة و محدودة من الأسفل: متقاربة**.

◁ المتتاليتان المتجاورتان

- القول أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) **متجاورتان** يعني أنّ إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و أنّ المتتالية $(v_n - u_n)$ تؤول إلى 0.

إذا كانت المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين:

- فإنّهما **متقاربتان**
- لهما **نفس النهاية**

التمرين الأول

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1. أحسب u_1 و u_2
2. (أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq n$
(ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n)
3. أثبت أن المتتالية (u_n) هي متزايدة
4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n - n + 1$
(أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هي هندسية
(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي:
$u_n = 3^n + n - 1$
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n،
$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
(أ) عبّر عن S_n بدلالة n
(ب) ما هو اتجاه تغيّر المتتالية (S_n) و نهايتها ؟

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بما يلي،

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. أحسب u_2، u_3 و u_4
2. (أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$
(ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة
(جـ) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ
$v_n = \dfrac{u_n}{n}$
(أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول v_1
(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي:
$u_n = \dfrac{n}{2^n}$

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[1\,;+\infty[$ بـ
$f(x) = \ln x - x\ln 2$
(أ) عيّن نهاية f عند $+\infty$
(ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الثالث

1. لتكن u المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$
(أ) احسب u_1، u_2 و u_3. عبّر عن كل حد من هذه الحدود على شكل كسر غير قابل للاختزال.
(ب) قارن بين الأربع حدود الأولى من المتتالية u مع الأربع حدود الأولى من المتتالية w المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $w_n = \frac{n}{n+1}$.
(جـ) أثبت بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n،
$u_n = w_n$
2. لتكن v المتتالية ذات الحد العام v_n و المعرفة بـ:
$v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ حيث $\ln$ يدل على اللوغاريتم النيبيري.
(أ) اثبت أنّ $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
(ب) ليكن S_n المجموع المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$
عبّر عن S_n بدلالة n. عيّن نهاية S_n لمّا n يؤول إلى $+\infty$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$

لدراسة هذه المتتالية نرفق لها الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{2}{1+x}$$

1. (أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f و أنشئ تمثيلها البياني
(ب) استعمل هذا الشكل لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل.
(جـ) أعط تخمينا بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n)
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:
$0 \leq u_n \leq 3$
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
(أ) أثبت أنّ (v_n) هي متتالية هندسية
(ب) عبّر عن v_n بدلالة n. استنتج نهاية المتتالية (v_n)
(جـ) عبّر عن u_n بدلالة n. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

التمرين الخامس

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:
$$f(x) = xe^{-x}$$
ندل بـ Γ على التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (وحدة القياس: 10 cm)

1. (أ) عيّن نهاية f عند $+\infty$.
(ب) أدرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيّراتها.
(جـ) أنشئ Γ في المعلم $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$
استعمل $\mathcal{C}$ لإنشاء، على محور الفواصل، النقط A_0، A_1 و A_2 ذات الفواصل u_0، u_1 و u_2 على الترتيب.
3. (أ) أثبت، بالتراجع، أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.
(ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.
(جـ) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ عيّن نهايتها.
4. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \ln u_n$
(أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا $u_n = w_n - w_{n+1}$.
(ب) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
أثبت أنّ $S_n = w_0 - w_{n+1}$
(جـ) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين السادس

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي:
$u_0 = -1$، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n،
$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$
1. أحسب u_2 و استنتج أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية
2. نُعرف المتتالية (v_n) بوضع، من أجل كل عدد طبيعي n،
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$
(أ) أحسب v_0
(ب) عبّر عن v_{n+1} بدلالة v_n و استنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
(جـ) عبّر عن v_n بدلالة n
3. نُعرف المتتالية (w_n) بوضع، من أجل كل عدد طبيعي n،
$$w_n = \frac{u_n}{v_n}$$
(أ) أحسب w_0
(ب) باستعمال المساواة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$، عبّر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n
(جـ) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،
$$w_{n+1} = w_n + 2$$
(د) عبّر عن w_n بدلالة n
4. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،
$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}$$
5. نضع، من أجل كل عدد طبيعي n:
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

التمرين السابع

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ $u_0 = 1$، $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n)$$
1. لتكن (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ
$$w_n = v_n - u_n$$
(أ) أثبت أنّ (w_n) هي متتالية هندسية لحدود موجبة يطلب تحديد أساسها
(ب) عيّن نهاية المتتالية (w_n)
2. (أ) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة
(ب) أثبت أنّ المتتالية (v_n) متناقصة
(جـ) أثبت أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان إلى نهاية نرمز لها ℓ
3. لتكن (t_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:
$$t_n = 4u_n + 15v_n$$
(أ) أثبت أنّ المتتالية (t_n) ثابتة. عيّن هذا الثابت.
(ب) استنتج النهاية ℓ