07 التحضير الجيد للبكالوريا 2015
الإختبار رقم 07

التمرين 01 :

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي :

1. مجموعة حلول المعادلة $\ln(x+2)=\ln(x^2-4)$ هي :

أ. $S=\{-2;3\}$. **ب.** $S=\{2;-3\}$. **جـ.** $S=\{3\}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x^2-x)$ تساوي : **أ.** 0. **ب.** $-\infty$. **جـ.** $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x}$ تساوي : **أ.** 0. **ب.** 1 . **جـ.** $+\infty$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln\frac{x+1}{x}$ تساوي : **أ.** 1. **ب.** 0 . **جـ.** $+\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+x+1)}{x}$ تساوي : **أ.** $+\infty$. **ب.** 0 . **جـ.** 1 .

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x}$ تساوي : **أ.** $+\infty$. **ب.** 1 . **جـ.** 0 .

7. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$ هي دالة :

أ. فردية . **ب.** زوجية . **جـ.** لا هي فردية ولا هي زوجية.

8. عبارة التقريب التآلفي للدالة $x\mapsto e^{2x}+x^3$ بجوار الصفر هي :

أ. $x\mapsto x+2$. **ب.** $x\mapsto 2x+1$. **جـ.** $x\mapsto e^{2x}+1$.

9. عبارة التقريب التآلفي للدالة $x\mapsto \ln 3x-\frac{1}{x}$ بجوار 1 هي :

أ. $x\mapsto 2x-3$. **ب.** $x\mapsto x-2$. **جـ.** $x\mapsto 3x-1$.

10. حلول المعادلة التفاضلية : $3y'-2y+5=0$ هي الدوال المعرفة بـ :

أ. $f(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}-\frac{5}{3}$. **ب.** $f(x)=Ke^{-\frac{5}{3}x}+\frac{1}{3}$. **جـ.** $f(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}+\frac{5}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}.\frac{e^{3x}-1}{5x}$ تساوي : **أ.** 1 . **ب.** $\frac{9}{20}$. **جـ.** $\frac{3}{4}$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\ln\left(\frac{x+4}{x}\right)$ تساوي : **أ.** 0 . **ب.** 12. **جـ.** $+\infty$.

13. f الدالة المعرفة بعبارتها : $f(x)=\ln(\ln 3x)^2$.

1. مجموعة تعريف الدالة f هي :

أ. $D=]0;+\infty[$. **ب.** $D=]1;+\infty[$. **جـ.** $D=\left]0;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

2. عبارة الدالة المشتقة للدالة f هي :

أ. $f'(x)=\frac{1}{3x}$. **ب.** $f(x)=\frac{2}{3x}$. **جـ.** $f(x)=\frac{2}{x\ln 3x}$.

14. مجموعة حلول المعادلة $2(\ln x)^2+9\ln x-5=0$ هي :

أ. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **ب.** $S=\left\{\frac{1}{2};-5\right\}$. **جـ.** $S=\left\{\sqrt{2};e^{-5}\right\}$.

15. مجموعة حلول المعادلة $2(\log x)^2+9\log x-5=0$ هي :

أ. $S=\left\{-5;\frac{1}{2}\right\}$. **ب.** $S=\left\{10^{-5};\sqrt{10}\right\}$. **جـ.** $S=\left\{\sqrt{10}\right\}$.

16. f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث :

$f(x)=g\left(\ln\sqrt{x}\right)$ ، $g'(x)=e^{3x}$. عبارة $f'(x)$ هي :

أ. $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$. **ب.** $f'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\ln x}$. **جـ.** $f'(x)=\frac{x}{\ln x}$.

17. الحد الأول والأساس للمتتالية الحسابية (u_n) التي مجموع n حد من حدودها يساوي $6n^2+2n$ هما :

أ. $(u_1;r)=(6;4)$. **ب.** $(u_1;r)=(10;8)$. **جـ.** $(u_1;r)=(8;12)$.

18. إذا كان لدينا : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$، فإن $f\left(e\sqrt{e}\right)$ تساوي :

أ. $f\left(e\sqrt{e}\right)=\ln 1=0$. **ب.** $f\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{3}{2e\sqrt{e}}$. **جـ.** $f\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}$.

19. الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ هي :

أ. $x\mapsto\ln x+C$. **ب.** $x\mapsto\ln x^2+C$. **جـ.** $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

20. الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ هي :

أ. $x\mapsto 2\ln\left|e^{2x}+1\right|+C$. **ب.** $x\mapsto 2x+\ln e^{2x}+C$. **جـ.** $x\mapsto\ln\sqrt{(e^{2x}+1)}+C$.

21. f الدالة المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\ln(2x-1)$.

المنحنى (C_f) صورة منحنى الدالة $x\mapsto\ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه :

أ. $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\ln 2\right)$. **ب.** $\vec{u}(-1;2)$. **جـ.** $\vec{u}(2;-1)$.

22. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=e^{\ln 5}+e^{2\ln 5}+e^{3\ln 5}+.....+e^{n\ln 5}$.

المجموع يساوي :

أ. $S_n=\frac{5}{4}\left(1-5^n\right)$. **ب.** $S_n=5^{n+1}-1$. **جـ.** $S_n=\frac{1-5^{n+1}}{4}$.

التمرين 02 :

نعتبر عددا مركبا $L(z)$ حيث : $L(z)=\frac{z+1-i}{z+2i}$. $z\neq-2i$.

1. أكتب $L(1-i)$ على الشكل المثلثي ثم الأسي.

2. نضع $K=L\left(3\sqrt{3}+i\right)$. بين أن $\frac{6K}{1+3\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}+i}$ ، ثم اكتب النتيجة على الشكل المثلثي.

3. أحسب $\left(\frac{6K}{1+3\sqrt{3}}\right)^{2010}$.

4. لتكن النقطة M لاحقتها z. عين مجموعة النقط M بحيث تكون عمدة $L(z)$ تساوي $\frac{\pi}{3}$.

5. عين مجموعة النقط M لاحقتها z، حيث : $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

6. عين مجموعة النقط M لاحقتها z، حيث : $|z+1-i|=|z+2i|$

7. عين مجموعة النقط M لاحقتها z، حتى يكون : $L(z)$ عددا حقيقيا.

التمرين 03 :

نرض المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=2$ و $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^{-n}-2n+1$.

2.أ. أثبت أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+\lambda n-1$ متتالية هنسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

2.ب. أحسب بدلالة $\mathbb{N}$ المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. ليكن في المستوي النقط : A، B، C و D التي تحقق العلاقة : $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}+t\,\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ ....(1)

• عين t حتى تكون النقطة D مركز المسافات المتناسبة للنقط A، B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات : S_0 ; S_1 ; S_2.

التمرين 04 :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $g(x)=x-1+2\ln x$.

1. جد نهاية الدالة g عند حدود مجال تعريفها.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g واحسب $g(1)$ ثم شكل جدول التغيرات.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على مجموعة تعريفها.

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-2+(\ln x)^2-\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أثبت أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث :

$\frac{1}{e}<x_0<1$ و $2<x_1<\frac{9}{4}$.

4. أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ ، واستنتج إحداثيات نقط تقاطعهما.

5. برهن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

6. أوجد نقطة من المنحنى (C_f) يكون المماس (T) عندها موازيا للمستقيم (Δ). أكتب معادلة (T).

7. أرسم (C_f) و (Δ).

8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط λ وجود حلول للمعادلة ذات المجهول x حيث : $(\ln x)^2-\ln x+\lambda-2=0$.

III. 1. بين أن الدالة : $x\mapsto x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$.

III. 2. أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

حلول تمارين الاختبار 07

الحل المفصل للتمرين 01 : ....

1. لدينا المعادلة : $\ln(x+2)=\ln(x^2-4)$ ....(1)

الإجابة الصحيحة هي : **جـ.** $S=\{3\}$.   **التبرير** : المعادلة تكون ممكنة الحل إذا كان :

$(x^2-4>0)$ و $(x+2>0)$ تكافئ : $(|x|>2)$ و $(x>-2)$.

$\Leftrightarrow \big((x>2)$ أو $(x<-2)\big)$ و $(x>-2)$، ومنه : $x>2$، وعندئذ :

(1) تكافئ : $x^2-4=x+2$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-3)=0$، ومنه : $x=3$.   إذن : $S=\{3\}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x^2-x)$ تساوي ؟. **الإجابة الصحيحة هي** : **ب.** $-\infty$.

التبرير : لما x يؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($+\infty-\infty$: ح. ع. ت)، لنتخلص منها :

$f(x)=2\ln|x|-x=2\ln x-x=x\left(2.\frac{\ln x}{x}-1\right)$.   عند $+\infty$: $|x|=x$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(0)-1=-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x}$ تساوي ؟. **الإجابة الصحيحة هي** : **ب.** 1 .

التبرير : لما x يؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($+\infty . 0$: ح. ع. ت)، لنتخلص منها :

$f(x)=x\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$. $\frac{1}{x}=X$.

تذكر
إذا كانت : $\star\neq0$
فإن : $\star=\frac{1}{\frac{1}{\star}}$

4. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x\ln\frac{x+1}{x}$ تساوي ؟. **الإجابة الصحيحة هي** : **ب.** 0 .

التبرير : لما x يؤول إلى 0^+ : $f(x)$ تأخذ الشكل ($+\infty . 0$: ح. ع. ت)، لنتخلص منها :

$f(x)=x\left[\ln|x+1|-\ln|x|\right]=x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=x\ln(x+1)-x\ln x$، لأن : $x>0$.

لكن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x\ln x=0^-$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x\ln(x+1)=0^+$.   إذن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=0$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x^2+x+1)}{x}$ تساوي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **جـ.** 1 .

التبرير : لما x يؤول إلى 0^+ : $f(x)$ تأخذ الشكل ($\frac{0}{0}$: ح. ع. ت)، لنتخلص منها :

$f(x)=\frac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}.\frac{x^2+x}{x}=\frac{\ln\left(1+(x^2+x)\right)}{x^2+x}(x+1)$ $x^2+x=X$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}.1=1\times1=1$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x}$ تساوي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** ......: **جـ.** 0 .

التبرير : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $-1\le\cos\ln x\le1$، فيكون : $\frac{-1}{x}\le\frac{\cos(\ln x)}{x}\le\frac{1}{x}$.

لكن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x}=0$ ، وذلك حسب مبرهنة الحصر.

7. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **الإجابة الصحيحة هي** : **أ.** فردية .

التبرير : الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ، وعندئذ : العناصر متناظرة.

$$f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{(x^2)-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+1}}=\ln\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}=-\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$$ مما يبين أن الدالة f فردية.

8. عبارة التقريب التآلفي للدالة $x\mapsto e^{2x}+x^3$ بجوار الصفر هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** ؛ **ب.** $x\mapsto 2x+1$.

التبرير : $f(x)\simeq f(0)+xf'(0)$; $f'(x)=2e^{2x}+3x$ ، $f(0)=1$; $f'(0)=2$

$$\simeq 1+x(2)$$
$$\simeq 2x+1$$

9. عبارة التقريب التآلفي للدالة $x\mapsto \ln 3x-\frac{1}{x}$ بجوار 1 هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** ؛ **أ.** $x\mapsto 2x+\ln 3-3$.

التبرير : لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ ، فيكون : $f'(1)=2$ ، $f(1)=\ln 3-1$ ، وعندئذ :

$$f'(x)\simeq f(1)+(x-1)f'(1)\simeq \ln 3-1+(x-1)(2)\simeq 2x+\ln 3-3$$

10. الإجابة الصحيحة هي : **جـ.** $f(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}+\frac{5}{2}$.

التبرير : $3y'-2y+5=0$ تكافئ : $y'=\frac{2}{3}y-\frac{5}{3}$.

$\Leftrightarrow f(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}-\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}$ ، ومنه : $f(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}+\frac{5}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}.\frac{e^{3x}-1}{5x}$ تساوي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **ب.** $\frac{9}{20}$.

التبرير : لما x يؤول إلى 0 : $f(x)$ تأخذ الشكل ($\frac{0}{0}$: ح. ع. ت)، لنتخلص منها :

لدينا : $f(x)=\frac{3}{4}.\frac{3}{3}.\frac{e^{3x}-1}{5x}=\frac{9}{20}\frac{e^{3x}-1}{3x}$ ، $X=3x$ ، فيكون : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{9}{4}\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=\frac{9}{20}\times 1=\frac{9}{20}$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}3x\ln\left(\frac{x+4}{x}\right)$ تساوي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **ب.** 12.

التبرير : لما x يؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($0.\infty+$: ح. ع. ت)، لنتخلص منها :

$$f(x)=3x\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{4}{x}\right)=3\frac{1}{\frac{1}{x}}.\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=3\times\frac{1}{\frac{1}{x}}.\frac{4}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$$

$$=12.\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\frac{4}{x}}=12.\frac{\ln(1+X)}{X}\qquad X=\frac{1}{x}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=12.\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=12.1=12$.

13. الدالة f المعرفة بعبارتها : $f(x)=\ln(\ln 3x)^2$

1. مجموعة تعريف الدالة f هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **جـ.** $D=\left]0;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

التبرير : (f معرفة) تكافئ : $(3x>0)$ و $|\ln 3x|\neq 0$

$\Leftrightarrow (3x>0)$ و $|\ln 3x|\neq \ln 1$

$\Leftrightarrow (3x>0)$ و $(3x\neq 1)$ ، ومنه : $x\in \left]0;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

2. عبارة الدالة المشتقة للدالة f هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **جـ.** $f(x)=\frac{2}{x\ln 3x}$.

التبرير : لدينا $f(x)=2\ln|\ln 3x|$

فيكون : $f'(x)=2\frac{\frac{3}{3x}}{\ln 3x}=2.\frac{\frac{1}{x}}{\ln 3x}=\frac{2}{x\ln 3x}$

تـذكر
$(\ln\star)'=\frac{\star'}{\star}$

14. مجموعة حلول المعادلة $2(\ln x)^2+9\ln x-5=0$ هي ؟

الإجابة الصحيحة هي : **جـ.** $S=\left\{\sqrt{2}\ ;e^{-5}\right\}$.

التبرير : المعادلة تكون ممكنة الحل إذا كان $x>0$ ، و عندئذ :

$2(\ln x)^2+9\ln x-5=0$: تكافئ $2X^2+9X-5=0$. $\ln x=X$

$\Leftrightarrow (2X-1)(X+5)=0$

$\Leftrightarrow (X=-5)$ أو $\left(X=\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (\ln x=-5)$ أو $\left(\ln X=\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (\ln x=\ln e^{-5})$ أو $\left(\ln x=e^{\frac{1}{2}}\right)$

$\Leftrightarrow (x=e^{-5})$ أو $\left(x=\sqrt{e}\right)$. إذن : $S=\left\{\sqrt{e}\ ;e^{-5}\right\}$.

15. مجموعة حلول المعادلة $2(\log x)^2+9\log x-5=0$ هي ؟

الإجابة الصحيحة هي : **ب.** $S=\left\{10^{-5}\ ;\sqrt{10}\right\}$.

التبرير : المعادلة تكون ممكنة الحل إذا كان $x>0$ ، و عندئذ :

$2(\log x)^2+9\log x-5=0$: تكافئ $(\log x=-5)$ أو $\left(\ln 9x=\frac{1}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow (\log x=-5.1)$ أو $\left(\ln 9x=\frac{1}{2}.1\right)$.

$\Leftrightarrow (\log x=-5\log 10)$ أو $\left(\ln 9x=\log 10^{\frac{1}{2}}\right)$.

$2(\log x)^2+9\log x-5=0$: تكافئ $(\log x=\log 10^{-5})$ أو $\left(\ln 9x=\frac{1}{2}\log 10\right)$.

$\Leftrightarrow (x=10^{-5})$ أو $\left(x=\sqrt{10}\right)$. إذن : $S=\left\{\sqrt{10};10^{-5}\right\}$.

16. لدينا $f(x)=g\left(\ln\sqrt{x}\right)$ و $g'(x)=e^{3x}$. عبارة $f'(x)$ هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **أ.** $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

التبرير : $f'(x)=\left(\ln\sqrt{x}\right)'.\ g'\left(\ln\sqrt{x}\right)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.e^{3\left(\ln\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2x}.e^{\ln\left(\sqrt{x}\right)^3}$

$=\frac{1}{2x}.\left(\sqrt{x}\right)^3=\frac{1}{2x}.\sqrt{x^3}=\frac{1}{2x}.x\sqrt{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

تـذكر
$h'(\star)=\star' h'(\star)$

17. **الإجابة الصحيحة هي** : **جـ.** $(u_1;r)=(8;12)$.

التبرير : لدينا :

$S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}[u_1+u_1+(n-1)r]=nu_1+\frac{1}{2}n(n-1)r=\frac{r}{2}n^2+\left(u_1-\frac{1}{2}r\right)n=6n^2+2n$ ، فيكون :

$\left(\frac{r}{2}=6\right)$ و $\left(u_1-\frac{1}{2}r=2\right)$ ، ومنه : $(u_1;r)=(8;12)$.

18. إذا كان لدينا : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ، فإن $f\left(e\sqrt{e}\right)$ تساوي ؟

الإجابة الصحيحة هي : **ب.** $f\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{3}{2e\sqrt{e}}$.

التبرير : لدينا $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ، فيكون : $f\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{\ln\left(e\sqrt{e}\right)}{e\sqrt{e}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{e\sqrt{e}}=\frac{3}{2e\sqrt{e}}$.

19. الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **جـ.** $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

التبرير : لدينا $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$.

نضع $u=\ln x$ ، فيكون : $u'=\frac{1}{x}$ ، وعندئذ : $\frac{\ln x}{x}=u'u$. إذن الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ هي :

$x\mapsto u'u+C$ ، $x\mapsto\frac{1}{2}u^2+C$ ، أي أن : $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

20. الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ هي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **جـ.** $x\mapsto\ln\sqrt{(e^{2x}+1)}+C$.

التبرير : لدينا $x\mapsto\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

نضع : $u=e^{2x}+1$ ، فيكون : $u'=2e^{2x}$ ، أي أن : $e^{2x}=\frac{1}{2}u'$ ، وعندئذ :

$$\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{2}\frac{u'}{u}=\frac{1}{2}\ln|u'|=\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)=\ln\sqrt{e^{2x}+1}$$

إذن : الدوال الأصلية هي $x\mapsto\ln\sqrt{(e^{2x}+1)}+C$.

21. f الدالة المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\ln(2x-1)$ ، **الإجابة الصحيحة هي** : **أ.** $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\ln 2\right)$.

التبرير : لدينا $f(x)=\ln(2x-1)$ ، فيكون : $f(x)=\ln\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)=\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$.

نضع : $g(x)=\ln x$ ، فيكون : $g\left(x-\frac{1}{2}\right)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، وعندئذ : $f(x)=g\left(x-\frac{1}{2}\right)+\ln 2$.

إذن : (C_f) صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه : $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\ln 2\right)$.

22. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=e^{\ln 5}+e^{2\ln 5}+e^{3\ln 5}+.....+e^{n\ln 5}$.

المجموع يساوي ؟ **الإجابة الصحيحة هي** : **أ.** $S_n=\frac{5}{4}\left(1-5^n\right)$.

التبرير : لدينا

$$S_n=e^{\ln 5}+e^{2\ln 5}+e^{3\ln 5}+.....+e^{n\ln 5}=1-1+e^{\ln 5}+e^{2\ln 5}+e^{3\ln 5}+.....+e^{n\ln 5}$$
$$=(1+e^{\ln 5}+e^{\ln 5^2}+e^{\ln 5^3}+.....+e^{\ln 5^n})-1=(1+5+5^2+5^3+.....+5^n)-1$$
$$=\frac{1-5^{n+1}}{1-5}-1=\frac{1-5^{n+1}}{-4}-1=-\frac{1}{4}\left[1-5^{n+1}+4\right]=-\frac{1}{4}\left[5-5^{n+1}\right]=-\frac{1}{4}\left[5-5^n.5\right]=\frac{5}{4}(5^n-1)$$

الحل المفصل للتمرين 02 : ....

المعطيات : $L(z)$ عدد مركب حيث : $L(z)=\dfrac{z+1-i}{z+2i}$.

1. كتابة $L(1-i)$ على الشكل المثلثي ثم الأسي :

$L(z)$ يكون له معنى إذا وفقط إذا كان :

$z+2i\neq 0$ تكافئ : $z\neq -2i$. إذن : $(x\,;y)\neq(0;-2)$.

لدينا : $L(1-i)=\dfrac{2(1-i)}{1+i}=2.\dfrac{1}{2}(1-i)^2=-2i=2(-i)=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=2e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

2. تبيان أن $\dfrac{2}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{6K}{1+3\sqrt{3}}$ حيث : $K=L\left(3\sqrt{3}+i\right)$.

لدينا :

$K=L\left(3\sqrt{3}+i\right)=\dfrac{3\sqrt{3}+i+1-i}{3\sqrt{3}+i+2i}=\dfrac{3\sqrt{3}+1}{3\left(\sqrt{3}+i\right)}$ ، فيكون : $\dfrac{6K}{3\sqrt{3}+1}=\dfrac{6}{3\sqrt{3}+1}\times\dfrac{3\sqrt{3}+1}{3\left(\sqrt{3}+i\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+i}$

• كتابة $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ على الشكل المثلثي :

$\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=2.\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$. إذن : $\dfrac{6K}{3\sqrt{3}+1}=\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$.

3. حساب $\left(\dfrac{6K}{1+3\sqrt{3}}\right)^{2015}$:

$$\left(\frac{6K}{1+3\sqrt{3}}\right)^{2015}=\cos 2015\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin 2015\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi\left(\frac{2015}{6}\right)-i\sin\pi\left(\frac{2015}{6}\right)$$

$$=\cos\pi\left(335+\frac{5}{6}\right)-i\sin\pi\left(335+\frac{5}{6}\right)=\cos\left(335\pi+\frac{\pi5}{6}\right)-i\sin\left(335\pi+\frac{\pi5}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

إذن : $\left(\dfrac{6K}{1+3\sqrt{3}}\right)^{2015}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

4. تعيين مجموعة النقط M لاحقتها z بحيث عمدة $L(z)$ تساوي $\dfrac{\pi}{3}$:

لدينا : $L(z)=\dfrac{z+1-i}{z+2i}=\dfrac{z-(-1+i)}{z-(-2i)}$.

نفرض A و B صورتي العددين المركبين $-1+i$ و $-2i$ ، فيكون :

$\arg L(z)=\arg\dfrac{z-(-1+i)}{z-(-2i)}=(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MA})$ ، وعندئذ :

$\arg L(z)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ تكافئ : $(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MA})=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

إذن : مجموعة النقط M هي قوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة باستثناء النقطة B.

5. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث : $\arg(z+1-i)=\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$

$\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{3}$ تكافئ : $\arg\left(z-(-1+i)\right)=\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}$.

إذن : مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $\left[AP\right)$، حيث : A لاحقتها $-1+i$، و P لاحقتها : $-1+i+e^{\frac{\pi}{3}i}$.

6. تعيين مجموعة النقط M حيث : $\left|z+1-i\right|=\left|z+2i\right|$

$\left|z+1-i\right|=\left|z+2i\right|$ تكافئ : $\left|z-(-1+i)\right|=\left|z-(-2i)\right|$

$\Leftrightarrow AM=BM$، ومنه : مجموعة النقط M هي المستقيم (Δ) محور النقطة $\left[AB\right]$.

7. تعيين مجموعة النقط M حتى يكون $L(z)$ حقيقيا :

$L(z)\in\mathbb{R}$ تكافئ : $\operatorname{Im}L(z)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x}\left[L(z)-\overline{L(z)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow L(z)-\overline{L(z)}=0$$

$$\Leftrightarrow L(z)=\overline{L(z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1-i}{z+2i}=\frac{\overline{z}+1+i}{\overline{z}-2i}$$

$\Leftrightarrow (\overline{z}-2i)(z+1-i)=(z+2i)(\overline{z}+1+i)$.

$\Leftrightarrow (6x+2y-4)i=0$، ومنه : $3x+y-2=0$.

إذن مجموعة النقط M هو المستقيم (Δ) الذي معادلته : $3x+y-2=0$، باستثناء النقطة $B(0;-2)$.

الحل المفصل للتمرين 03 : ....

المعطيات : (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ و $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

1. باستعمال البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n=2^{-n}-2n+1$.

نفرض $P(n)$ القضية "$u_n=2^{-n}-2n+1$"، فيكون :

$n=0$: $u_0=2^0-2(0)+1=2$.   إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $u_n=2^{-n}-2n+1$، ثم نبرهن على صحتها من أجل المرتبة $(n+1)$، أي أن :

$u_{n+1}=2^{-(n+1)}-2(n+1)+1$.

لدينا : $u_n-2u_{n+1}=2n+3$، فيكون :

$2u_{n+1}=u_n-2n-3=2^{-n}-2n+1-2n-3=2^{-n}-4n-2$، وعندئذ :

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}.2^{-n}-2n-1$$

$$=2^{-1}.2^{-n}-2n-1+1-1$$

$$=2^{-n-1}-2n-2+1$$

إذن : $u_{n+1}=2^{-(n+1)}-2(n+1)+1$.

وبالتالي $P(n)$ صحيحة من أجل المرتبة $(n+1)$ كذلك.

الخلاصة :

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n=2^{-n}-2n+1$.

2.أ. إثبات أنه يوجد عدد طبيعي λ حيث تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية، علما بأن : $v_n=u_n+\lambda n-1$.

لدينا :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\lambda(n+1)-1=\frac{1}{2}u_n-n-\frac{3}{2}+\lambda(n+1)-1=\frac{1}{2}[v_n-\lambda n+1]-n-\frac{3}{2}+\lambda(n+1)-1$$
$$=\frac{1}{2}v_n-\frac{\lambda}{2}n+\frac{1}{2}-n-\frac{3}{2}+\lambda(n+1)-1=\frac{1}{2}v_n+\left(-\frac{\lambda}{2}+\lambda-1\right)n+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\lambda-1$$
$$=\frac{1}{2}v_n+\left(\frac{1}{2}\lambda-1\right)n+(\lambda-2)$$

وعندئذ: ((v_n) متتالية هندسية) تكافئ: $\left(\frac{1}{2}\lambda-1=0\right)$ و $(\lambda-2=0)$.

$\Leftrightarrow (\lambda-2=0)$ و $(\lambda-2=0)$، ومنه : $\lambda=2$.

الخلاصة : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=u_0+2(0)-1=2-1=1$.

2.ب. حساب المجموع S_n :

$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n=v_0.\dfrac{1-q^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$. إذن: $S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

الاستنتاج :

• لدينا : $0<\frac{1}{2}<1$، فيكون : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n=2$.

3. لدينا العلاقة الشعاعية : $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}+t\,\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ ....(1)

تعيين العدد الحقيقي t حتى تكون النقطة D مرجح الجملة : $\{(C;S_2),(B;S_1),(A;S_0)\}$.

لدينا : $S_0=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$; $S_1=2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$; $S_2=2\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{7}{4}$.

لنكتب العلاقة الشعاعية : $S_0\overrightarrow{DA}+S_1\overrightarrow{DB}+S_2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$..................(2)

فيكون :

(1) تكافئ : $\overrightarrow{DA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{7}{4}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}+\frac{7}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$، لكن $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}+t\,\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$. بالمطابقة نجد : $\lambda=\frac{7}{2}$.

الحل المفصل للتمرين 04 : ....

I. المعطيات : g الدالة المعرفة على $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-1+2\ln x$.

1. تعيين النهايات :

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x-1)=-1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(2\ln x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x)=+\infty$.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g وحساب $g(1)$ ثم تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة g تقبل الاشتقاق على D، فيكون : $g'(x)=1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}$.

• إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x+2)$ فقط :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$

إذن :

$x\in]0;+\infty[$: الدالة g متزايدة تماما.

• جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

$x \in]0;1]$: $g(x) \leq 0$; $x \in [1;+\infty[$: $g(x) \geq 0$.

.II لدينا الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$.

.1.II إثبات أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، فيكون :

$$f'(x) = 1 + 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 1 + \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{x} + \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x + 2\ln x - 1)$$

$$= \frac{1}{x}(x - 1 + 2\ln x)$$

إذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

.2.II دراسة تغيرات الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-\ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$.

لما x تؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($\infty - \infty +$: ح. ع. ت). لنتخلص منها.

لدينا : $f(x) = x - 2 + (\ln x - 1)\ln x$، فيكون :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$.

• جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

.3.II إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث :

$\frac{1}{e} < x_0 < 1$ و $2 < x_1 < \frac{9}{4}$.

على المجال $\left[\frac{1}{e};1\right]$، الدالة f تحقق ما يلي :

• الدالة f مستمرة.

• $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 2 + 2 = \frac{1}{e}$ و $f(1) = -1$، أي أن : $f\left(\frac{1}{e}\right).f\left(\frac{9}{3}\right) < 0$.

• الدالة f متناقصة تماما.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث : $f(x_0) = 0$ و $\frac{1}{e} < x_0 < 1$.

وبالمثل، على المجال $\left[2;\frac{9}{2}\right]$ الدالة f تحقق ما يلي :

• الدالة f مستمرة.

• $f(2) \simeq -0,25$; $f\left(\frac{9}{2}\right) \simeq 0,09$، أي أن : $f(2).f\left(\frac{9}{2}\right) < 0$.

• الدالة f متزايدة تماما.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث : $f(x_1) = 0$ و $2 < x_1 < \frac{9}{2}$.

النتيجة : $(C_f) \cap (x'x) = \{A(x_0;0)\}$; $(C_f) \cap (x'x) = \{B(x_1;0)\}$.

.4.II دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)، الذي معادلته : $y = x$.

لدينا :

$$f(x)-x=-2+(\ln x)^2-\ln x$$
$$=(\ln x)^2-\ln x-2=X^2-X-2 \qquad X=\ln x$$
$$=(X+1)(X-2)$$
فيكـــــون : $$=(\ln x+1)(\ln x-2)$$

$f(x)-x=0$ تكافئ : $(\ln x=2)$ أو $(\ln x=-1)$

$\Leftrightarrow (\ln x=\ln e^2)$ أو $(\ln x=\ln e^{-1})$

$\Leftrightarrow (x=e^2)$ أو $\left(x=\frac{1}{e}\right)$

لنشكل جدول الإشارة :

x	0		$\frac{1}{e}$		e^2		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضـــعية							

إذن :

$x\in\left\{\frac{1}{e};e^2\right\}$: (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين $E(e^2;e^2)$ و $F\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$.

$x\in\left]\frac{1}{e};e^2\right[$: (C_f) تحت (Δ).

$x\in\left]0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[$: (C_f) فوق (Δ).

5.II البرهان على أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها:

لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$، فيكون :

$$f'(x)=\frac{g'(x)\,.\,x-g(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(x\,g'(x)-g(x)\right)=\frac{1}{x^2}\left[x\left(\frac{x+2}{x}\right)-x+1-2\ln x\right]$$
$$=\frac{1}{x^2}(x+2-x+1-2\ln x)=\frac{1}{x^2}(3-2\ln x)$$

وعندئذ :

$f'(x)\geq 0$ تكافئ : $3-2\ln x\geq 0$، لأن : $x^2>0$.

$\Leftrightarrow -2\ln x\geq -3$

$\Leftrightarrow \ln x\leq\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e^{\frac{3}{2}}$، ومنه : $0<x\leq e\sqrt{e}$.

$f''(x)\leq 0$ تكافئ : $x\geq e\sqrt{e}$.   إذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف : $\omega\left(e\sqrt{e};e\sqrt{e}-\frac{5}{4}\right)$.

6.II تعيين نقطة من (C_f) يكون عندها المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :

$f'(x)=1$ تكافئ : $\frac{g(x)}{x}=1$

$\Leftrightarrow g(x)=x$

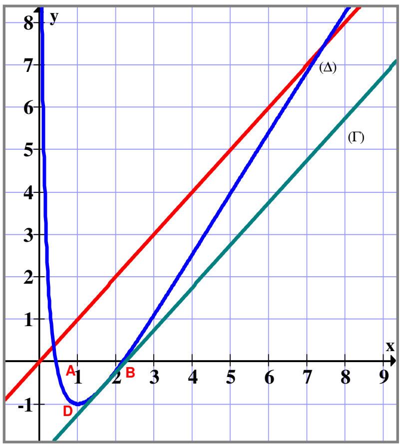
$\Leftrightarrow x-1+2\ln x=x$

$\Leftrightarrow 2\ln x=1$

$\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{1}{2}}$، ومنه : $x=\sqrt{e}$.

إذن نقطة التماس D إحداثياتها $\left(\sqrt{e};\sqrt{e}-\frac{9}{4}\right)$، وتكون معادلة (T) هي :



$. y = f'\left(\sqrt{e}\right)\left(x-\sqrt{e}\right)+\sqrt{e}-\frac{9}{4} = 1\left(x-\sqrt{e}\right)+\sqrt{e}-\frac{9}{4} = x-\frac{9}{4}$

.7.II رسم (C_f) ، (Δ) و (T):

.8.II مناقشة وجود حلول المعادلة $(\ln x)^2 - \ln x + \lambda - 2 = 0$ .....(1)

(1) تكافئ: $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = -\lambda$

$\Leftrightarrow x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x = x - \lambda$

$\Leftrightarrow f(x) = x - \lambda$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (C_f) \text{ معادلتها: } y = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x \\ (\Delta_\lambda) \text{ معادلتها: } y = x - \lambda \end{cases}$

إذن المعادلة المفروضة هي معادلة فواصل النقط المشتركة بين (C_f) و (Δ_λ) .

$(\Delta_\lambda)\cap(y'y) = \{A'(0;-\lambda)\}$

$(T)\cap(y'y) = \left\{B'\left(0;-\frac{9}{4}\right)\right\}$ ، وعندئذ، وبالاعتماد على التمثيل البياني نجد :

- $-\lambda < -\frac{9}{4}$ تكافئ: $\lambda > \frac{9}{4}$ ، لا توجد حلول.
- $-\lambda = -\frac{9}{4}$ تكافئ: $\lambda = \frac{9}{4}$ ، يوجد حل واحد.
- $-\frac{9}{4} < -\lambda \le 0$ ، يوجد حلان.
- $-\lambda > 0$ ، يوجد حلان.

.1.III بتبيان أن الدالة $x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$:

نضع : $H(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$ ، فيكون :

$$H'(x) = (\ln x)^2 - \left(2\ln x.\frac{1}{x}\right)x - 2(\ln x + 1) + 2$$
$$= (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2$$
$$= (\ln x)^2$$

إذن الدالة H هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$.

.2.III حساب المساحة :

حسب المعطيات نكتب :

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2}\left[x - f(x) = \right)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2}\left(-2 + (\ln x)^2 + \ln x\right)dx$$
$$= \left[-2x + \left(x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right) + x\ln x - x\right]_{\frac{1}{e}}^{e^2}$$
$$= \left[3x\ln x - x(\ln x)^2 - x\right]_{\frac{1}{e}}^{e^2}$$
$$= G(e^2) - G\left(\frac{1}{e}\right) = \left(e^2 + \frac{5}{e}\right)n.s$$