الفرض المنزلي رقم 4: تمرين رقم71 ص 142 الجزء01

التصحيح **المستوى : نهائي**

g دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+x+2\ln x$

ا/ دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ حيث : $g'(x)=\dfrac{x+2}{x}$

حيث من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$: $\dfrac{x+2}{x}>0$ أي أن $g'(x)>0$ ومنه فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
g '(x)	‖	+	
g (x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

حيث: $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\right)$

ب - $g(1)=-1+1+2\ln 1=0$ ، من جدول تغيرات الدلة g نستنتج أن :

x	0		1		$+\infty$
إشارة g(x)	‖	−	0	+	

جـ - إذا كان $0<x<1$ فإن $\dfrac{1}{x}>1$ وبماأن الدالة g متزايدة تماما فإن $g\left(\dfrac{1}{x}\right)>g(1)$ أي أن $g\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$

إذا كان $x>1$ فإن $0<\dfrac{1}{x}<1$ وبماأن الدالة g متزايدة تماما فإن $g\left(\dfrac{1}{x}\right)<g(1)$ أي أن $g\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$

2- الدالة f معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-x^2\ln x$ إذا كان $x>0$ و $f(0)=0$

أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ حيث :

$$f'(x)=1-2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}=1-2x\ln x-x=1+2x\ln\left(\frac{1}{x}\right)-x=x\left(\frac{1}{x}+2\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب - جدول تغيرات الدالة f :

لندرس تغيرات الدالة f : $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\right]=-\infty$

لدينا من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$: $f'(x)=xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$, بماأن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

من السؤال (جـ) نستنتج أن : من أجل كل x من المجال $]0\,;1[$, $f'(x)>0$ و من أجل كل x من المجال $]1\,;+\infty[$, $f'(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	1	↘	$-\infty$

جـ - الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1\,;+\infty[$ ومن ثم على المجال $\left[\dfrac{7}{4}\,;2\right]$ و $f\left(\dfrac{7}{4}\right)=0.036$ و $f(2)=-0.77$

إذن $f(2)\times f\left(\dfrac{7}{4}\right)<0$ و منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\dfrac{7}{4}<\alpha<2$

3- معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة O من الشكل : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ مع $x\geq 0$

حيث : $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-x\ln x)=1$ إذن معادلة (Δ) من الشكل : $y=x$ مع $x\geq 0$

ب / دراسة وضعية (C) بالنسبة للمماس (C) : $\left[f(x)-x\right]=-x^2\ln x$

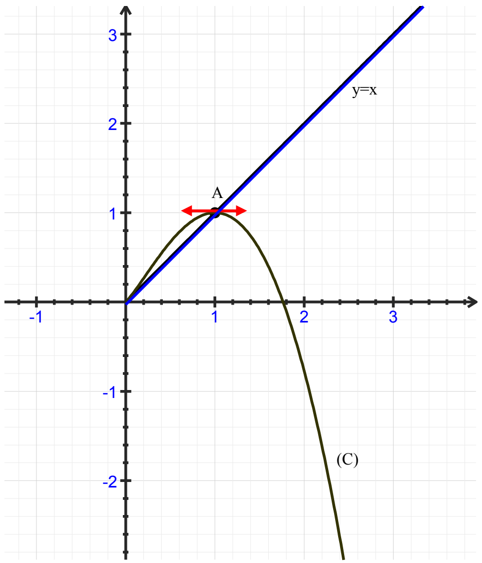
x	0		1		$+\infty$
إشارة $-x^2\ln(x)$		+	0	−	

من أجل $x=1$ يكون $\left[f(x)-x\right]=0$ و بالتالي المنحنى (C) و المماس (Δ) يتقاطعان في النقطة $A(1\,,1)$

ومن أجل كل x من المجالل $]0\,;1[$ يكون $\left[f(x)-x\right]>0$ و بالتالي المنحنى (C) يقع فوق المماس (Δ)

و من أجل كل x من المجالل $]1\,;+\infty[$ يكون $\left[f(x)-x\right]<0$ و بالتالي المنحنى (C) يقع تحت المماس (Δ)

جـ - رسم كل من (Δ) و (C) :



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-x\ln x)=-\infty$$

للمنحنى (C) فرع قطع مكافيء بإتجاه محور التراتيب

4 . المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0\in\,]0\,;1[$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$ أي أن $u_{n+1}=u_n-u_n^2\ln(u_n)$

أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$:

نستعمل الإستدلال بالتراجع , نسمي $p(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ "

المرحلة 01: نتأكد من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n = 0$

لدينا $u_0\in\,]0\,;1[$ أي أن $0<u_0<1$ وبالتالي فإن الخاصية $p(0)$ صحيحة

المرحلة02:

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $0<u_n<1$

ونثبت صحة الخاصية $p(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$ من أجل كل عدد طبيعي n ؟

لدينا $0<u_n<1$ و بماأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0\,;1]$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ ومنه فإن : $0<f(u_n)<1$

أي أن : $0<u_{n+1}<1$, وبالتالي الخاصية $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب - إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=u_n-u_n^2\ln(u_n)-u_n=-u_n^2\ln(u_n)$

بماأن $0<u_n<1$ فإن $-u_n^2\ln(u_n)>0$ ومنه فإن $u_{n+1}-u_n>0$ أي أن **المتتالية** (u_n) متزايدة

جـ - بماأن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=1$