التمرين الأول : 04 نقط

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 3}{4 - U_n}$

/1 إثبات أن من أجل $n\in\mathbb{N}$: $-1 < U_n < 3$. نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

*.1 من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = 2$ و $-1 < 2 < 3$ إذن $P(0)$ صحيحة

.2* نفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي k أي $-1 < U_k < 3$ و نبرهن صحة $P(k+1)$ أي $-1 < U_{k+1} < 3$

يمكن كتابة U_{n+1} على الشكل $U_{n+1} = -2 + \dfrac{5}{4 - U_n}$ إذن

$-1 < U_k < 3$ و منه $1 < 4 - U_k < 5$ و منه $1 < \dfrac{1}{4-U_k} < \dfrac{1}{5}$ و منه $1 < \dfrac{5}{4 - U_k} < 5$ إذن $-1 < U_{k+1} < 3$. $\boxed{0.5}$

أي $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي n

/2 دراسة رتابة (U_n) :

لدينا $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n + 1)(U_n - 3)}{4 - U_n}$ و هو عدد سالب أي (U_n) متناقصة من أجل $n\in\mathbb{N}$ .... $\boxed{0.5}$

/3 نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$

أ) إثبات أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية : لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \dfrac{5U_n - 15}{U_n + 1} = 5V_n$ .... $\boxed{0.5}$

أي $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول $V_0 = -\dfrac{1}{3}$ .... $\boxed{0.5}$

ب) $V_n = -\dfrac{1}{3}5^n$ ؛ $U_n = \dfrac{3 + V_n}{1 - V_n}$ أي $U_n = \dfrac{9 - 5^n}{3 + 5^n}$ .... $\boxed{0.25}$+ $\boxed{0.25}$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1$ .... $\boxed{0.25}$+ $\boxed{0.25}$

جـ) حساب المجموع S_n: $S_n = \dfrac{1}{12}\left[1 - 5^{n+1}\right]$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ .... $\boxed{0.25}$+ $\boxed{0.25}$

د) حساب الجداء P_n : $P_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \times 5^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .... $\boxed{0.5}$

التمرين الثاني :04نقط

الجزء أ) .1 بعد النشر نجد : $(x-3)(x^2 + 6x + 18) = x^3 + 3x^2 - 54$ .... $\boxed{0.5}$

.2 إشارة $p(x)$: من أجل $x = 3$ ، $P(x) = 0$. من أجل $x<3$ ، $p(x) < 0$ و من أجل $x>3$ فأن $p(x)>0$ $\boxed{0.5}$

الجزء ب) .1 الثمن بالدينار الجزائري لإنتاج 4200 قطعة

إذا أنتجنا 4200 قطعة في اليوم يكون ثمن تكلفة القطعة الواحدة هو $C(4.2) = 6.71$ DA .... $\boxed{0.25}$

أي ثمن إنتاج 4200 قطعة هو $4200 \times 6.71 \approx 28182$ DA .... $\boxed{0.25}$

.2 أ) $C'(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 54}{6x^2} = \dfrac{p(x)}{6x^2}$ .... $\boxed{0.5}$

ب) دراسة تغيرات الدالة C

x	0		3		5
f'(x)		—	0	+	
f(x)	+∞	↘	$\frac{25}{4}$	↗	$\frac{443}{60}$

$\boxed{01}$

جـ) من $x_0 = 3$

أي من أجل إنتاج 3000 قطعة يكون ثمن تكلفة القطعة الواحدة أصغر ما يمكن

و منه الثمن بالدينار الجزائري للإنتاج الكلي هو

$\dfrac{25}{4} \times 3000 = 18750$ DA .... $\boxed{0.5}$

التمرين الثالث (7 ن) : f دالة معرفة بـ: $f(x)=(2-x)\sqrt{4-x^2}$

1/ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4-x^2\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/(2-x)(2+x)\ge 0\}=[-2;2]$ **0.5**

2/ أ/ بما أن الدالة f معرفة على المجال $[-2;2]$ فهي قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;2[$ **0.5**

ب/ . $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\frac{(2-x)\sqrt{4-x^2}}{x-2}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}(\sqrt{4-x^2})=0$ **0.5**

جـ/ الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 من اليسار وعددها المشتق $f'(2)$ حيث : $f'(2)=0$ **0.5**

د/ دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند (-2) من اليمين: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\left[\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\left[\frac{(2-x)\sqrt{4-x^2}}{x+2}\right]=+\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (-2) من اليمين. **0.5**

3/ إتجاه التغير:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;2[$ حيث : $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+1)}{\sqrt{4-x^2}}$ **01**

دراسة إشارة $f'(x)$:

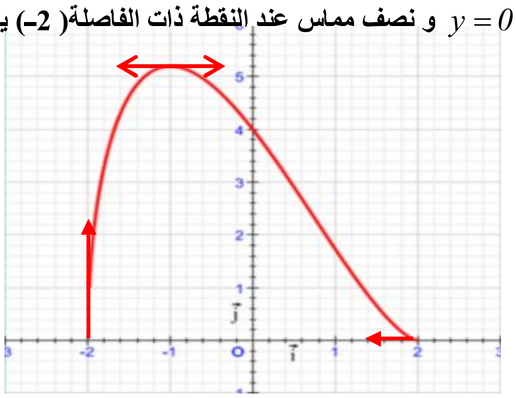
قيم x	-2		-1		2
$f'(x)$		+	0	—	

جدول التغيرات **0.5**

قيم x	-2		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0

4/ للمنحنى (C) نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 معادلته من الشكل : $y=0$ و نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة (2-) يوازي محور التراتيب

5/ رسم كل من (C) و نصفي المماسين : **02**



التمرين الرابع:(5 ن)

1/ a عدد حقيقي و f دالة معرفة في a , المقترح " إذا كانت الدالة f مستمرة في a فهي قابلة للإشتقاق عند a " خاطئ **01**

مثال مضاد : الدالة : $g:x\mapsto |x|$ مستمرة عند 0 لكنها غير قابلة للإشتقاق عنده حيث أن العدد المشتق من اليمين هو 1 والعدد المشتق من اليسار 1−

2/ f هي دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{3x^3}$

و g هي الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2f(x)-2f'(x)-x^2f''(x)$.

التأكيد التالي " الدالة g ثابتة على المجال $[1;+\infty[$ " خاطئ لأن : $g(x)=\frac{6-10x}{3x^4}$ و $g'(x)=\frac{10x-8}{x^5}$ حيث $g'(x)\neq 0$ ... **01**

3. h هي الدالة المعرفة على المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{\tan^2(x)}$, الاقتراحات الصحيحة هي : $\boxed{1}$ $h'(x)=\frac{-2-2\tan^2(x)}{\tan^3(x)}$

$\boxed{3}$ $h'(x)=\frac{-2\cos(x)}{\sin^3(x)}$ و $\boxed{4}$ $h(\frac{\pi}{6})=3$ لأن : $(\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$ و $\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$ **01**

4/ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sin(x^2+1)$, الاقتراح الصحيح هو: $\boxed{2}$ $f'(x)=2x\cos(x^2+1)$ (إشتقاق دالة مركبة) **01**

5/ هي دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و g حيث $g(x)=u(2x^2-3x)$, الاقتراح الصحيح هو: $\boxed{2}$ $g'(x)=(4x-3)\times u'(2x^2-3x)$

(مشتق دالة مركبة) **01**