المستوى:3علوم تجريبية   **دليل مختصر في الهندسة الفضائيّة التحليليّة**
(بالتطبيقات)   **السنة الدراسيّة:2012/2011**

في كل ما يأتي، نفرض أنّ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1)<u>كيفيّة إثبات توازي أو عدم توازي شعاعيْن:</u>

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ متوازيان يكفي أن نثبت أنّ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$.

<u>ملاحظة1:</u> إذا انعدمت α' أو β' أو γ' فلا تُكتب النسبة التي انعدم مقامها، وَ نشترط أن تنعدم المركّبة التي تقابل المركّبة المعدومة في الشعاع الآخر حتى نحافظ على توازي الشعاعيْن.

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ غيْر متوازييْن، يكفي أن نثبت أنّ التناسب $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ <u>غير محقق</u> ولوْ بعَدَمِ تساوي نسبتيْن منه.

<u>ملاحظة2:</u> يمكن أيضا أن نبيّن أنّ الشعاعيْن $\vec{u}$ وَ $\vec{u'}$ متوازيان بإثبات وجود عدد حقيقي t يحقق $\vec{u}=t\vec{u'}$.

☑<u>.تطبيق:</u> اذكر ما إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيْن أم لا مع التعليل:
ا) $\vec{u}(-1,3,2)$ ؛ $\vec{v}(2,-6,-4)$. ب) $\vec{u}(2,0,1)$ ؛ $\vec{v}(1;0;0,5)$.
جـ) $\vec{u}(2,1,-1)$ ؛ $\vec{v}(-6,3,-3)$. د) $\vec{u}(2,0,0)$ ؛ $\vec{v}(7,0,0)$.

2)<u>كيفيّة إثبات استقاميّة أو عدم استقاميّة ثلاث نقط:</u>

∗لإثبات أنّ النقط A، B، C في استقاميّة يكفي أن نثبت- مثلا- أنّ $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$.

∗لإثبات أنّ النقط A، B، C ليست في استقاميّة يكفي أن نثبت - مثلا- أنّ $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$.

☑<u>.تطبيق:</u>اذكر، في كل حالة، ما إذا كانت النقط A، B، C في استقاميّة مع التعليل: ا) $A(1,1,0)$، $B(2,1,1)$، $C(-1,2,-1)$.
ب) $A(2,1,-1)$، $B(3,1,0)$، $C(4,1,1)$.

3)<u>كيفيّة إثبات أنّ ثلاث نقط تعيّن مستويا:</u>

∗لإثبات أنّ النقط A، B، C تعيّن مستويا يكفي أن نثبت أنّها ليست في استقاميّة أيْ أنّ $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$- مثلا- .

☑<u>.تطبيق:</u> تحقق أنّ النقط $A(1,1,-1)$، $B(0,1,2)$، $C(2,1,1)$ تعيّن مستويا.

4)<u>كيفيّة إثبات تعامد أو عدم تعامد شعاعيْن:</u>

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ متعامدان يكفي أن نثبت أنّ $\vec{u}\vec{u'}=0$ أيْ $\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'=0}$.

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ غير متعامديْن يكفي أن نثبت أنّ $\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'\neq 0}$.

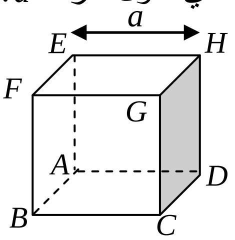
☑<u>.تطبيق:</u>هل الشّعاعان $\vec{u}(2,1,3)$ و $\vec{v}(0,3,-1)$ متعامدان؟

5)<u>استخدام خاصّة الإسقاط لحساب الجداء السّلّمي لشعاعيْن:</u>

A، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P) لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

حيث C' المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

☑<u>.تطبيق:</u> ليكن المكعب $ABCDEFGH$ الذي طول حرفه a.



1) احسب الجداء السّلّمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GE}$.
2) احسب الجداء السّلّمي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{GC}$.
3) نختار المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
ا-عيّن إحداثيّات كلّ رؤوس هذا المكعّب.
بــ-أجبْ الآن بطريقة تحليليّة عن السّؤاليْن1) و 2).

6)<u>المعادلة الدّيكارتيّة لمستوٍ:</u>

كلّ مستوٍ في الفضاء له معادلة ديكارتيّة من الشكل: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ حيث a، b، c ليست كلّها معدومة.
$\vec{n}(a;b;c)$ يسمّى شعاعا **ناظميّا** (عموديّا) على هذا المستوي.

✍**.<u>ملاحظة</u>**:لتعيين شعاع ناظمي للمستوي (P)،يكفي أنْ نعيّن شعاعا عموديّا على شعاعيْن غير متوازييْن من (P) .

7)<u>كيفيّة تعيين معادلة ديكارتيّة لمستوٍ معيّن بثلاث نقطٍ:</u>

لتعيين معادلة ديكارتيّة للمستوي (P) المعيَّن بالنقط A، B، C نبحث عن شعاع ناظمي $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي (P) وذلك بحل الجملة التالية $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$، و بعْد تعيين a، b، c تكون معادلة المستوي (P) من الشكل $ax+by+cz+d=0$، ثم يتمّ تعيين d بتعويض إحداثيّات إحدى النقط A، B، C في المعادلة.

☑<u>.تطبيق:</u>تحقق أنّ النقط$A(-1,0,1)$، $B(1,2,-1)$، $C(0,3,1)$ تعيّن مستويا ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتيّة لهذا المستوي.

☜**تنبيه هام :** إذا طُلِب منّا أنْ نبيّن أنّ النقط A، B، C تعيّن مستويا (P) <u>معرّفا بمعادلته</u>، فيكفي أنْ نبيّن أنّ إحداثيّات كلٍّ من هذه النقط تحقق معادلة المستوي (P).

☑<u>.تطبيق:</u> $A(1,1,0)$، $B(2,1,1)$، $C(-1,2,-1)$ ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.
بيّن أنّ معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$.

8)<u>مستويات خاصّة:</u>

$z=0$ ☑. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$.
$x=0$ ☑. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{j};\vec{k})$.
$y=0$ ☑. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{i};\vec{k})$.

9)<u>بُعْد نقطة عن مستوٍ:</u>

بُعْد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ تُحسب بالدّستور التالي:

$$\boxed{d(M_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

☑.تطبيق:احسب بُعْد النقطة $A(2,-1,1)$ عن المستوي (P) ذي المعادلة $x-2y+2z+3=0$.

10) التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء:

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و يوازي الشعاع $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ ، له تمثيل وسيطي من الشّكل:

$$(D):\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\ y=y_0+\beta t & ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+\gamma t\end{cases}$$

($\vec{u}$ هو **شعاع توجيه لـ** (D))

☑.تطبيق: اكتب تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (AB) الذي يشمل النّقطتيْن $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,2)$.

11) بُعْد نقطة عن مستقيم:

لحساب بُعْد نقطة A عن مستقيم (D)، نعيّن مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ، ويكون بُعْد A عن (D) هو الطول AH

☑.تطبيق: لتكن النقطة $A(2,1,-1)$ و ليكن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1-2t & ;t\in\mathbb{R}\\ z=2-t\end{cases}$.احسب بُعْد A عن (D)

12) سطح الكرة في الفضاء :

* معادلة سطح الكرة:

معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز $\omega(x_0,y_0,z_0)$ وَ نصف القطر R تُكتب كما يلي :

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}.$$

☑.تطبيقات:

ت1: جِدْ معادلة سطح الكرة ذات المركز $\omega(1,-2,0)$ و نصف القطر 3.

ت2: عيّن مركز و نصف قطر سطح الكرة المعيّن بالمعادلة المبسّطة التّالية : $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=8$.

* المسألة العكسيّة:

لتكن (E): مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

لمعرفة طبيعة (E)، يمكن استعمال إحدى الطريقتيْن التاليتيْن:

1.**طريقة المميّز**: نحسب المميّز $k=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$.

I- إذا كان $k\prec 0$ ، فإنّ $(E)=\varnothing$.

II- إذا كان $k=0$ ، فإنّ $(E)=\left\{M\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)\right\}$.

III- إذا كان $k\succ 0$ ، فإنّ (E) هي سطح كرة مركزها $\omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)$ وَ نصف قطرها $R=\sqrt{k}$.

2.**طريقة إتمام المربّع:**

وهي طريقة معروفة تستخدم فيها المتطابقات الشهيرة.

ترجيح: إذا اشتملت المعادلة على وسيط ،يفَضَّل استخدام طريقة المميّز،أمّا إذا لم تشتمل على ذلك فيبدو أنّ الطريقة الثانية أنسب.

☑.تطبيق: تعرّف على مجموعة النقط (E) من الفضاء و أعط عناصرها المميّزة في كلّ حالة :

أ) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$.

بـ) $x^2+y^2+z^2+4x-2z+5=0$.

13) الوضعيّة النسبيّة لمستقيميْن في الفضاء :

ليكن المستقيم (D) الذي شعاع توجيهه $\vec{u}$ ، و المستقيم (D') الذي شعاع توجيهه $\vec{u'}$.

ا- إذا كان $\vec{u} \,//\, \vec{u'}$ فإنّ (D) و (D') متوازيان(إمّا **متوازيان و مختلفان** و إمّا **منطبقان**).

بـ- إذا كان $\vec{u} \not\parallel \vec{u'}$ فإنّ (D) و (D') غير متوازييْن (إمّا **متقاطعان** و إمّا **من مستوييْن مختلفيْن**).

☜ملاحظة : في التطبيقات، نوضّح كيف يمكن التمييز بين هذه الحالات الأربع.

☑.تطبيق: ليكن المستقيمات (D_1)، (D_2)، (D_3)، (D_4) المعرّفة بتمثيلاتها الوسيطيّة التالية على الترتيب :

$$\begin{cases}x=-2+5t_1\\ y=-1-t_1 & ;t_1\in\mathbb{R}\\ z=3+4t_1\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x=1-t_2\\ y=4+3t_2 ;t_2\in\mathbb{R}\\ z=5-t_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t_3\\ y=1-3t_3 ;t_3\in\mathbb{R}\\ z=4+t_3\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x=2+2t_4\\ y=1-6t_4 ;t_4\in\mathbb{R}\\ z=6+2t_4\end{cases}$$

ادرس الوضعيّة النسبيّة لكلٍّ من (D_1) مع (D_2) ثم (D_1) مع (D_3) ثم (D_2) مع (D_3) و أخيرا (D_2) مع (D_4).

14) الوضعيّة النسبيّة لمستقيم مع مستو في الفضاء :

نعتبر المستقيم (D) و المستوي (P) في الفضاء.

هناك ثلاث حالات محتملة :

ا-الحالة الأولى : (D) محتوى في (P).

بـ- الحالة الثانية : (D) يوازي تماما (P) (تقاطعهما خالٍ).

جـ-الحالة الثالثة : (D) يقطع (P).

☜ملاحظة : في التطبيقات، نوضّح كيف يمكن التمييز بين هذه الحالات الثلاث.

☑.تطبيق: نعتبر المستقيم (D) ذا التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$ والمستويات: $(P_1):2x+y-z-3=0$

$(P_2):-4x-2y+2z+1=0$ ؛ $(P_3):x-y+z-6=0$

ادرس الوضعيّة النسبيّة للمستقيم (D) مع كلٍّ من المستويات (P_1) ثم (P_2) ثم (P_3).

15) الوضعيّة النسبيّة لمستويين في الفضاء :

نعتبر المستويين (P) و (P') المُعرّفيْن بمعادلتيْهما كما يلي :
$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$ ؛ $(P): ax+by+cz+d=0$

1/ إذا كان $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ فإنّ (P) و (P') **منطبقان**.

2/ إذا كان $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$ فإنّ (P) و (P') **متوازيان تماما**

3/ إذا كان التناسب $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ غير محقق فإنّ (P) و (P') **متقاطعان**. في التطبيقات، نوضّح كيف نُعيّن مستقيم تقاطعهما.

☜ ملاحظة : في حالة انعدام a' أو b' أو c' أو d' (انظر الملاحظة1 في الفقرة 1 من الدليل).

☑ تطبيق: نعتبر المستويات :
$(P_2): -4x-2y+2z+1=0$ ؛ $(P_1): 2x+y-z-3=0$
$(P_4): -6x-3y+3z+9=0$ ؛ $(P_3): x-y-2z-6=0$
ادرس الوضعيّة النسبيّة لكلٍّ من (P_1) مع (P_2) ثم (P_1) مع (P_3) ثم (P_1) مع (P_4).

16) تقاطع ثلاثة مستويات في الفضاء:

لدراسة تقاطع ثلاثة مستويات في الفضاء، يمكن أن ندرس تقاطع اثنين منهما، فإذا كانا متوازييْن تماما نستنتج أنّ تقاطع المستويات الثلاثة **خالٍ** ، أمّا إذا كانا متقاطعيْن فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن **تقاطع مستقيم مع مستو** .

☑ تطبيق: نعتبر المستويات :
$(P_2): 2x+y+3=0$ ؛ $(P_1): 4x+y+z+10=0$
$(P_3): x+y-z-3=0$. عيّن $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)$.

17) تعامد مستوييْن في الفضاء:

يتعامد مستويان في الفضاء إذا تعامد شعاعاهما الناظميّان
بمعنى إذا كان $(P): ax+by+cz+d=0$
و كان $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$ ، فلدينا :

$\boxed{a.a'+b.b'+c.c'=0 \text{ يعني } (P)\perp(P')}$

18) تعامد مستقيميْن في الفضاء:

يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا تعامد شعاعا توجيههما.
بمعنى إذا كان $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)
و كان $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ شعاع توجيه للمستقيم (D') ، فلدينا :

$\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'=0 \text{ يعني } (D)\perp(D')}$

19) تعامد مستقيم و مستو في الفضاء:

يتعامد مستقيم و مستو في الفضاء إذا توازى شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناظمي لهذا المستوي.
بمعنى إذا كان $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)
و كان $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعا ناظميّا للمستوي (P) ، فلدينا :

$\boxed{\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma} \text{ يعني } (D)\perp(P)}$

20) الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة مع مستو في الفضاء :

(S) سطح الكرة ذات المركز $\omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف القطر R
وَ (P) المستوي ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$.
لتكن $d(\omega,P)$: بُعْد النقطة ω عن المستوي (P) .

1) إذا كان $d(\omega,P)\succ R$ ، فإنّ $(S)\cap(P)=\varnothing$.

2) إذا كان $d(\omega,P)=R$ ، فإنّ $(S)\cap(P)=\{H\}$.
(المستوي (P) يمسّ سطح الكرة (S) في نقطة H).

3) إذا كان $d(\omega,P)\prec R$ ، فإنّ $(S)\cap(P)=C(I,r)$.
(المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها I و نصف قطرها r).

☜ كيفيّة تعيين العناصر المميّزة في الحالتيْن 2) وَ 3):

1. تُعيّن نقطة التّماس H في الحالة 2) أو النقطة I : مركز دائرة التقاطع في الحالة 3) على أساس أنّها نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم (ωH) أو المستقيم (ωI) .

ملاحظة: نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (ωH) أو المستقيم (ωI) بناء على أنّ هذا المستقيم يشمل النقطة ω وَ يوازي الشعاع النّاظمي $\vec{n}$: للمستوي (P) .

2. يُحسَب نصف القطر r لدائرة التقاطع بالقانون التّالي:

$\boxed{r=\sqrt{R^2-d^2}}$

حيث يرمز R إلى نصف قطر سطح الكرة ،
و يرمز d إلى $d(\omega,P)$ أيْ بُعْد مركز سطح الكرة عن (P) .

21) الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة مع مستقيم في الفضاء :

لدراسة الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة (S) مع مستقيم (D) في الفضاء، نعوّض x ، y ، z من التمثيل الوسيطي لِـ (D) في معادلة (S) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط،(وليكن t مثلا) :

1) إذا كان $\Delta\prec 0$ ، فإنّ $(S)\cap(D)=\varnothing$.

2) إذا كان $\Delta=0$ ، فالمعادلة تقبل حلا مضاعفا $t_1=t_2$ و بتعويض t بقيمة الحل المضاعف في التمثيل الوسيطي لِـ (D) نجد إحداثيّات نقطة التماس بيْن (S) و (D) .

3) إذا كان $\Delta\succ 0$ ، فالمعادلة تقبل حلّيْن متمايزيْن t_1 و t_2 و بتعويض t_1 و t_2 في التمثيل الوسيطي لِـ (D) ، نحصل على إحداثيّات نقطتيْ تقاطع (S) مع (D) .

22) جيب تمام زاوية شعاعيّة :

إذا كان $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ شعاعيْن يختلفان عن $\vec{0}$ فإنّ

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{u'})=\frac{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}}$$

.

23)مرجح نقطتيْن:

لتكن A و B نقطتيْن من الفضاء، و ليكن α و β عدديْن حقيقيّيْن حيث $\boxed{\alpha+\beta\neq 0}$ ، نقول إنّ النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ إذا كان $\boxed{\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=\vec{0}}$.

فكرة: لإنشاء المرجح H ، يمكن استخدام إحدى العلاقتيْن:
$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BH}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

نتيجة هامّة: مهما كانت النقطة M من الفضاء ، فإنّ:
$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MH}}$.

*مركز ثقل نقطتيْن:

إذا كان $\alpha=\beta$، نقول إنّ H هي مركز ثقل النقطتيْن A و B.

ملاحظة1: مركز ثقل نقطتيْن هو منتصفهما.

24)مرجح ثلاث نقط :

لتكن A، B، C ثلاث نقط من الفضاء، و لتكن α، β، γ أعدادا حقيقيّة حيث $\boxed{\alpha+\beta+\gamma\neq 0}$ ، نقول إنّ النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ إذا تحقق ما يلي :
$\boxed{\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}+\gamma\overrightarrow{HC}=\vec{0}}$

فكرة: لإنشاء المرجح H ، يمكن- مثلا- استخدام العلاقة:
$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

نتيجة هامّة1: مهما كانت النقطة M من الفضاء ، فإنّ:
$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MH}}$.

تنبيه : إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ ، فلا يوجد مرجح للنقط A، B، C بالمعاملات α، β، γ ؛ و يكون الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ شعاعا ثابتا (مستقلاّ عن M) ، و يتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة و استعمال علاقة Chasles.

نتيجة هامّة2: إذا كانت H مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$،فمهما كانت النقطة M من الفضاء
$\boxed{\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MH^2+\alpha HA^2+\beta HB^2+\gamma HC^2}$

*إحداثيّات مرجح ثلاث نقط :

إذا كان $A(x_A,y_A,z_A)$؛ $B(x_B,y_B,z_B)$؛ $C(x_C,y_C,z_C)$ فإنّ إحداثيّات المرجح H تحسب كما يلي :

$x=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ؛ $y=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$z=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

*مركز ثقل ثلاث نقط :

نقول إنّ النقطة G هي مركز ثقل النقط A، B، C إذا كان:
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

إحداثيّات مركز ثقل النقط A، B، C:

$x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$ ؛ $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$

$z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

25)مرجح أربع نقط أوْ أكثر :

يُعرَّف مرجح أربع نقط أوْ أكثر بنفس الكيفيّة التي عرِّف بها مرجح ثلاث نقط (انظر الفقرة24)).

26)المستوي المحوري :

H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء. المستوي المحوري للقطعة $[HH']$ هو المستوي العمودي على $[HH']$ في منتصفها

27)مجموعات النقط في الفضاء :

نتيجة1: H نقطة من الفضاء وَ k عدد حقيقي موجب تماما مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\boxed{HM=k}$ هي :
$\boxed{\text{سطح الكرة ذات المركز } H \text{ وَ نصف القطر } k}$.

نتيجة2: H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\boxed{MH=MH'}$ هي : $\boxed{\text{المستوي المحوري للقطعة } [HH']}$.

نتيجة3: H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\boxed{\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}=0}$ هي:
$\boxed{\text{سطح الكرة ذات القطر } HH'}$.

نتيجة4: H نقطة من الفضاء وَ $\vec{U}$ شعاع ثابت غير $\vec{0}$.
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\boxed{\overrightarrow{MH}.\vec{U}=0}$ هي:
$\boxed{\text{المستوي الذي يشمل النقطة } H \text{ وَ يعامد الشعاع } \vec{U}}$.

28) التمثيل الوسيطي لمستو في الفضاء:

في الفضاء، نعتبر النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و الشعاعيْن غير المتوازييْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$. التّمثيل الوسيطي للمستوي (P) الذي يشمل A و يوازي $\vec{u}$ وَ $\vec{u'}$ يُعطى كالتّالي :

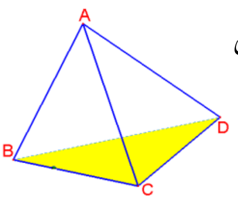
$$(P):\begin{cases}x=x_0+\alpha t+\alpha'\lambda\\ y=y_0+\beta t+\beta'\lambda\\ z=z_0+\gamma t+\gamma'\lambda\end{cases}\quad ;\ t\in\mathbb{R}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

29)كيفيّة إثبات أنّ أربع نقط تنتمي إلى نفس المستوى:

لإثبات أنّ النقط A، B، C، D تنتمي إلى نفس المستوي نبيّن أنّ ثلاثة منها تشكل مستويا ، و أنّ الرابعة تنتمي إليه.

طريقة أخرى: نبيّن- مثلا- أنّه يوجد عددان حقيقيّان α و β بحيث $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

30) حجم رباعي وجوه :



يُحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التّالي: $\boxed{V=\dfrac{S\times h}{3}}$ حيث ترمز S إلى مساحة القاعدة و ترمز h إلى الارتفاع.