

✽ الإجابة النموذجية للبركالوريا التجريبية دورة ماي 2015 ✽

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- حساب الحدود u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{7}{3}, u_2 = \frac{26}{9}, u_3 = \frac{97}{27}$$

• تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) : متتالية متزايدة

2- أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n + 3$

لتكن فرضية التراجع $P(n) : u_n \leq n + 3$

* **المرحلة 1 :** الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 2$ أي $u_0 \leq 3$ $P(n)$

* **المرحلة 2 :** نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n \leq n + 3$ و

نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \leq n+1 + 3$ أي $u_{n+1} \leq n+4$

لدينا $u_n \leq n + 3$ و منه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1 = n+4$ وبالتالي $u_{n+1} \leq n+4$ ولدينا $n+3 \leq n+4$ و منه $u_{n+1} \leq n+4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* **الخلاصة :** نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
إذن $u_n \leq n + 3$.

ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$-\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \geq 0 \text{ و } -\frac{1}{3}u_n \geq -\frac{1}{3}n - 1 \text{ و } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ وبالتالي } u_{n+1} \geq u_n \text{ و منه متزايدة}$$

ج- استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة :

لدينا (u_n) متزايدة معناه $u_n \geq u_0$ أي $u_n \geq 2$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن (u_n) متقاربة : لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها:

$$(v_n) \text{ هي متتالية هندسية معناه } v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 \text{ و } v_n = u_n - n \text{ و بالتالي } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) \text{ أي } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ و منه } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ وبالتالي :}$$

$$(v_n) \text{ هي متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ و حدها الأول } v_0 = u_0 - 0 = 2$$

ب- التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم حساب نهاية (u_n) عند $+\infty$

$$\lim u_n = +\infty : u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \text{ و } u_n = v_n + n, v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ أي } v_n = v_0 \times q^n$$

ج- حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + n) = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n$$

$$= 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + n(n+1) = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + n(n+1)$$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ- البرهان أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول: (t_n) حسابية معناه $t_{n+1} = t_n + r$

$$\text{لدينا } t_n = \ln(v_n) \text{ و } t_{n+1} = \ln(v_{n+1}) \text{ أي } t_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{3}v_n\right) = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{لأن } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ و } t_{n+1} = t_n + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و } t_n = \ln(v_n) \text{ و } r = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و وحدها}$$

$$\text{الأول } t_0 = \ln(v_0) = \ln(2)$$

ب- حساب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

$$A_n = \frac{n+1}{2} (\ln(2) + \ln(2) + n \ln\left(\frac{2}{3}\right)) = \frac{n+1}{2} (2\ln(2) + n \ln\left(\frac{2}{3}\right))$$

• استنتاج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$$P_n = e^{S_n} \text{ و } v_n = e^{t_n} : \text{ لأن } P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times e^{t_2} \times \dots \times e^{t_n} = e^{t_0 + t_1 + \dots + t_n}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-2; 0; 0)$ ، $B(0; -2; 0)$ ، $C(0; 0; -2)$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

1. - أ- نبين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا نرمز له بالرمز (Q)

النقط A ، B ، C تعين مستوي معناه A ، B ، C ليست في استقامة AB و AC غير مرتبطان خطيا

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AC}(2; 0; -2) \text{ و } \overrightarrow{AB}(2; -2; 0) \text{ و } \frac{2}{2} \neq \frac{0}{-2} \text{ و منه } \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ غير مرتبطين خطيا}$$

ب- نبين أن للمستوي (Q) معادلة من الشكل $x + y + z + 2 = 0$

• نعوض باحداثيات النقط A ، B ، C نجد

$$\text{و منه } x + y + z + 2 = 0 \text{ معادلة للمستوي } (Q) \begin{cases} (-2) + 0 + 0 + 2 = 0 \\ 0 + (-2) + 0 + 2 = 0 \\ 0 + 0 + (-2) + 2 = 0 \end{cases}$$

2. - (P) المستوي الذي يشمل النقطة I و يعامد الشعاع $\overrightarrow{AB}$

أ- كتابة معادلة للمستوي (P) و ماذا يمثل المستوي (P) :

$$\overrightarrow{AB}(2; -2; 0) \text{ ناظمي للمستوي } (P) \text{ و يشمل } I \text{ حيث } I\left(\frac{-2+0}{2}; \frac{0-2}{2}; \frac{0+0}{2}\right) \text{ أي } I(-1; -1; 0)$$

و منه $2x - 2y + d = 0$ (P) و يشمل I معناه $2(-1) - 2(-1) + d = 0$ أي $d = 0$

وبالتالي معادلة للمستوي (P) هي $(P): x - y = 0$

ب- نبين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (d) يشمل النقطة C وأن الشعاع $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ هو شعاع توجيه له و كتابة تمثيلا و سيطيا للمستقيم (d)

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t - 2 \end{cases} \quad \text{نضع } y = t \text{ فيكون} \quad \begin{cases} x - y = 0 \dots\dots\dots (P) \\ x + y + z + 2 = 0 \dots\dots (Q) \end{cases}$$

3. أ- نبين أن الشعاعين $\vec{AI}$ و $\vec{CI}$ متعامدان الشعاعين $\vec{AI}$ و $\vec{CI}$ متعامدان معناه $\vec{AI} \bullet \vec{CI} = 0$
 $\vec{AI}(1; -1; 0)$ ، $\vec{CI}(-1; -1; 2)$ و منه $\vec{AI} \bullet \vec{CI} = 1(-1) + (-1)(-1) = -1 + 1 = 0$
 ت- استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (d):

بما أن الشعاعين $\vec{AI}$ و $\vec{CI}$ متعامدان و (d) يشمل النقطة C فإن $AI = d(A; (d))$

$$AI = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ و بالتالي } d(A; (d)) = \sqrt{2} \text{ cm}$$

4. أ- تحقق أن الرباعي OAIC هو رباعي الوجوه: هو رباعي الوجوه معناه النقط A ، B ، C و O : لدينا A ، B ، C تنتمي الى الرباعي OAIC هو رباعي الوجوه معناه النقط A ، B ، C و O لا تنتمي إلى (Q) لأن $0 + 0 + 0 + 2 \neq 0$ المستوي (Q) ذو المعادلة $x + y + z + 2 = 0$ و O تنتمي إلى (Q) لأن $0 + 0 + 0 + 2 = 0$

ب- حساب المسافة $d(O, (Q))$ ، ثم احسب حجم الرباعي الوجوه OAIC

$$d(O, (Q)) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm و منه } d(O, (Q)) = \frac{|0 + 0 + 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

حجم الرباعي الوجوه OAIC : $V = \frac{1}{3} S_{(ABC)} h$ حيث $h = d(O, (Q)) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ و

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AI \times IC = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ و منه}$$

$$V = \frac{2}{3} \text{ cm}^3 \text{ أي } V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

$$(z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \text{ معناه } \begin{cases} (z-2) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (z^2 + 2z + 4) = 0 \dots\dots (2) \end{cases} \text{ و منه من (1) نجد } z = 2$$

و من نحس المميز حيث $\Delta = -12 = 12i^2$ و منه $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$ يوجد حلان هما

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} , z_2 = -1 - i\sqrt{3} \text{ و بالتالي } S = 2; -1 - i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3}$$

II. نعتبر في المستوي المركب : $z_A = -1 + i\sqrt{3} , z_B = -1 - i\sqrt{3} , z_C = 2$

$$\text{أ) نبين أن } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 - i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}$$

$$\text{و منه } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و منه } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$$

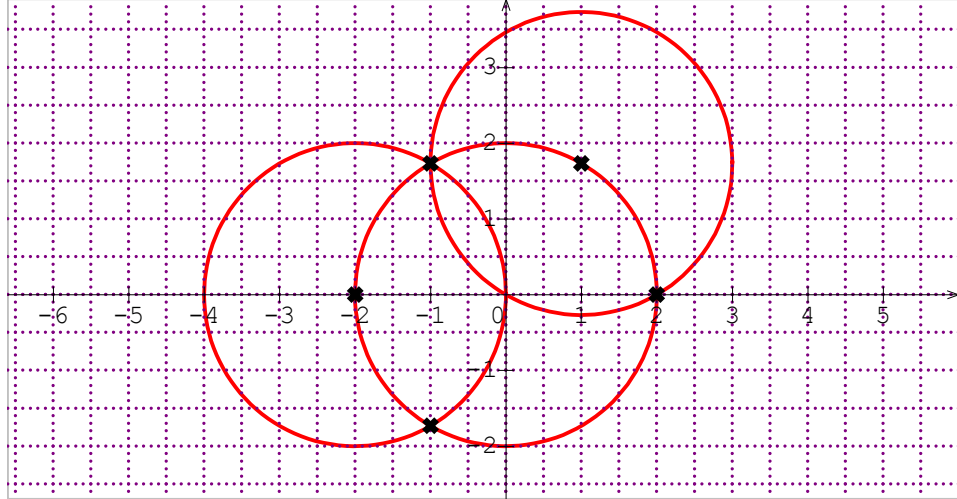
ب) تعيين طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متقايس الأضلاع

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC. أرسم (C)

مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC هو Ω مركز ثقل المثلث حيث $z_{\Omega} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

$$z_{\Omega} = \frac{-1+i\sqrt{3} -1-i\sqrt{3} +2}{3} = 0 \text{ أي } \Omega(0;0) \text{ ومنه}$$

ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC هو $OA = OB = OC = |z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ الرسم (C):



1.أ) تعيين الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق: $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$.

ليكن $z = x + iy$ ومنه لدينا $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) = 2x$ و $z\bar{z} = x^2 + y^2$ ومنه

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0 \text{ تكافئ } 2(2x) + x^2 + y^2 = 0 \text{ ومنه } 4x + x^2 + y^2 = 0$$

تكافئ $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ومنه للمجموعة (Γ) هي دائرة مركزها $\omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r = 2$ (ب) التحقق من أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ):

لدينا $A(-1; \sqrt{3}); B(-1; -\sqrt{3})$ بالتعويض في المعادلة $(x+2)^2 + y^2 = 4$ نجد

$$\begin{cases} (-1+2)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \\ (-1+2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \end{cases} \text{ ومنه احداثيات } A; B \text{ تحقق المعادلة } (x+2)^2 + y^2 = 4$$

2. ليكن R الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

لدينا $|a| = 1$ و $\arg a = \frac{\pi}{3}$ اذن $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ولدينا $Z_A = \frac{b}{1-a}$ ومنه $b = Z_A(1-a) = 1 + \sqrt{3}i$

$$Z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) Z + 1 + \sqrt{3}i \text{ من الشكل}$$

أ- تعيين صورة النقطة B بالدوران R

$$Z_C = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) Z_B + 1 + \sqrt{3}i = 2 \text{ لان } C \text{ هي الدوران } R \text{ صورة } B$$

ب- تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R: $z_D = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z_C + 1 + \sqrt{3}i = 2 + 2\sqrt{3}i$

• استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$: معيّن

ج- عيّن صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

صورة المجموعة (Γ) بالدوران R هي دائرة مركزها $\omega'(1; \sqrt{3})$ ونصف قطرها $r = 2$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = -\frac{2x}{x+1} + \ln(x+1)$

1/ حساب نهايتي g عند -1 و $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\ln 2 - 1$	$+\infty$

2/ دراسة اتجاه تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها :

أشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$ * جدول التغيرات :

3/ نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر فاصلته α حيث $3.9 < \alpha < 4$.

حل معدوم $g(0) = 0$ و الآخر حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(3.9) \times g(4) < 0$ و g متزايدة تماما

4/ معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

لدينا $g'(0) = -1$ و $g(0) = 0$ و منه $(T): y = -x$

5/ انشاء (T) و (C)



6/ المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $g(x) = -x + |m|$:

$$g(x) = -x + |m| = \begin{cases} -x + m; m > 0 \\ -x - m; m < 0 \end{cases} \text{ و منه}$$

• $m = 0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

• $m \in \mathbb{R}^*$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$:

1/ ابين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = -e^{-x} \times g(e^{2x})$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \times e^{-x} \\ &= -e^{-x} \left(\ln(1 + e^{2x}) - \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right) = -e^{-x} g(e^{2x}) \end{aligned}$$

2/ الحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^{2x} g - e^{-x} g = 0$ تكافئ $e^{2x} = 0$ مرفوض

أو $e^{2x} = \alpha$ مقبول تكافئ $x = \ln \sqrt{\alpha}$ ومنه حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي $S = \ln \sqrt{\alpha}$

3/ دراسة اتجاه تغيرات الدالة f :

إشارة الدالة المشتقة عكس إشارة $g e^{2x}$

• لدينا حسب المنحنى البياني للدالة g تكون $g e^{2x} < 0$ ومنه $0 < e^{2x} < \alpha$ أي $x < \ln \sqrt{\alpha}$ ومنه $-e^{-x} \times g(e^{2x}) > 0$ لما $x \in]-\infty, \ln \sqrt{\alpha}[$ ومنه الدالة متزايدة على المجال

• لدينا حسب المنحنى البياني للدالة g تكون $g e^{2x} > 0$ ومنه $e^{2x} > \alpha$ و أي $x > \ln \sqrt{\alpha}$ ومنه $-e^{-x} \times g(e^{2x}) > 0$ لما $x \in]\ln \sqrt{\alpha}, +\infty[$ ومنه الدالة متناقصة على المجال

4/ نبين أن $f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$ ثم جد حصرًا للعدد $\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$:

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1} = e^{-\ln \sqrt{\alpha}} \ln(1 + e^{2\ln \sqrt{\alpha}}) = e^{\ln(\sqrt{\alpha})^{-1}} \ln(1 + e^{\ln \alpha}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln(1 + \alpha)$$

و من جهة أخرى $g(\alpha) = 0$ أي $\ln(\alpha+1) = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$ بالتعويض نجد

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha+1)} = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\alpha}(\alpha+1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{(\alpha+1)}$$

5/ - أ) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$

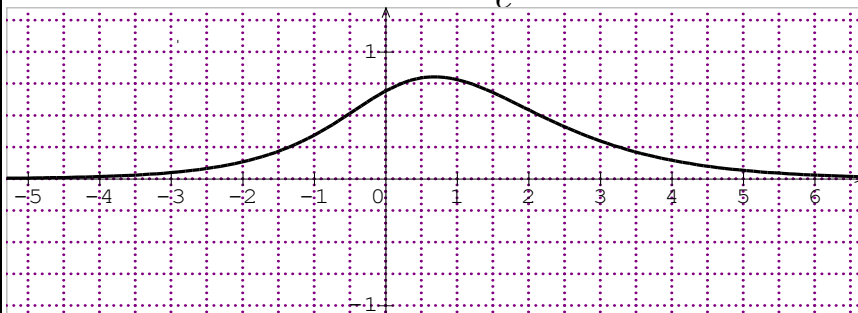
$$f(x) = e^{-x} \ln[e^{2x}(e^{-2x} + 1)] = \frac{1}{e^x} (\ln(e^{2x}) + \ln(e^{-2x} + 1)) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x}$$

ب) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x} \right) = 0$$

6/ البرهان أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (لاحظ أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = e^x \times \frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \times \frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}) = 0$$



7/ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$\ln(\sqrt{a})$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$	0

8/ انشئ المنحنى (φ)

التمرين الأول: (04 نقاط)

I نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$: $u_0 = \frac{5}{4}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) البرهان بالتراجع أن : $1 < u_n < 2$

لتكن فرضية التراجع $P(n): 1 < u_n < 2$

* **المرحلة 1:** الخاصية $P(1)$ صحيحة من أجل $n = 1$ لأن $u_0 = \frac{5}{4}$ أي $1 < u_0 < 2$ $P(1): 1 < u_0 < 2$

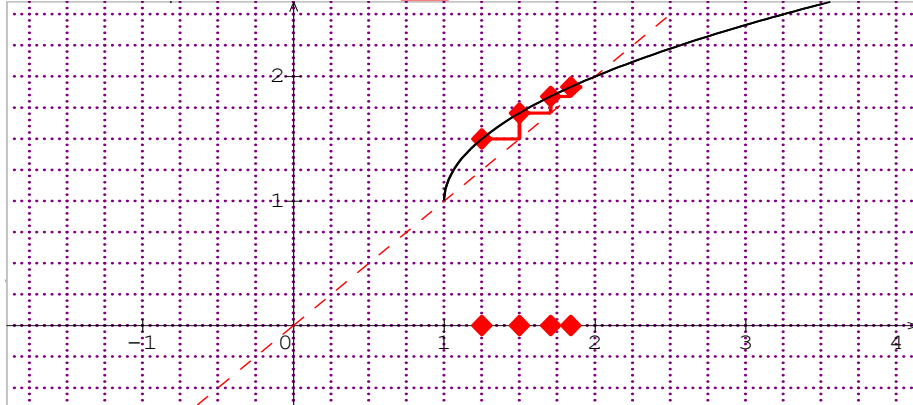
* **المرحلة 2:** نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n > 1$ أي $1 < u_n < 2$ و

نبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي $1 < u_{n+1} < 2$ $P(n+1): 1 < u_{n+1} < 2$

لدينا $1 < u_n < 2$ و منه $0 < u_n - 1 < 1$ و منه $1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2$ بالتالي $1 < u_{n+1} < 2$ و منه إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

* **الخلاصة:** نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
إذن $1 < u_n < 2$.

(ب) باستعمال المنحني (C) والمستقيم $(\Delta): y = x$. عَلم على محور الفواصل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0



(ت) تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) : من التمثيل $u_3 > u_2 > u_1 > u_0$ و منه (u_n) متتالية متزايدة

البرهان على التخمين : (u_n) متزايدة

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n - 1} - (u_n + 1)) \times (\sqrt{u_n - 1} - (u_n + 1))}{(\sqrt{u_n - 1} + (u_n + 1))}$$

$$\text{و منه } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1 - (u_n + 1))^2}{(\sqrt{u_n - 1} + (u_n + 1))} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{(\sqrt{u_n - 1} + (u_n + 1))}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n - 1)}{(\sqrt{u_n - 1} + (u_n + 1))}$$

لدينا $1 < u_n < 2$ و منه $0 < 2 - u_n$ و $0 < u_n - 1$ و $\sqrt{u_n - 1} + u_n + 1 > 0$ و بالتالي

$u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(ث) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة عين نهايتها

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة و $u_n < 2$ فهي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة ونهايتها 2

(III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 1)$

(أ) البرهان أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(v_n) هي متتالية هندسية معناه $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ و منه $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$ و منه

$$v_{n+1} = \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \ln(u_n - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$$

(ب) كتابة v_n ثم u_n بدلالة n

$$v_n = -\ln 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ وبالتالي } v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{5}{4} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 \text{ و } v_n = v_0 \times q^n$$

$$u_n = e^{-\ln 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \text{ و منه } u_n = e^{v_n} + 1 \text{ و منه } e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 1)} \text{ فإن } v_n = \ln(u_n - 1)$$

(ج) حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\ln 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \ln(4) \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقطتين: $A(2; 1; 2)$ ، $B(0; 2; -1)$ ،
1. كتابة تمثيلا وسيطيا بدلالة الوسيط k للمستقيم (AB) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من افضاء تحقق

$$(AB): \begin{cases} x = -2k + 2 \\ y = k + 1 \\ z = -3k + 2 \end{cases} \text{ و منه } (k \in \mathbb{R}) \text{ حيث } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AB}(-2; 1; -3) \text{ و } \overrightarrow{AM}(x - 2; y - 1; z - 2)$$

2. نبين أن المستقيمين (Δ) و (AB) لا ينتميان الى نفس المستوي:

$$\text{بحل الجملة نجد } k = -4 \text{ و } t = 2 \text{ بالتعويض نجد نقطتين مختلفتين} \begin{cases} 6t - 2 = -2k + 2 \\ -2t + 1 = k + 1 \\ 4t = -3k + 2 \end{cases}$$

3. (P) هو المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) و يوازي (Δ)

أ- التحقق ان الشعاع $\vec{n}(1; 5; 1)$ ناظمي للمستوي (P) ثم استنتج معادلة ديكراتية له

$\vec{n}(1; 5; 1)$ ناظمي للمستوي (P) معناه $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ لدينا $\overrightarrow{AB}(-2; 1; -3)$ و منه

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1(-2) + 5 \times 1 + 1(-3) = 3 - 3 = 0$$

ب- حساب المسافة d بين (Δ) و (P)

4. أ- تعيبي إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$

$$I(1; \frac{3}{2}; 1) \text{ أي } I(\frac{2+0}{2}; \frac{1+2}{2}; \frac{2-1}{2})$$

5. لتكن (δ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = 2$.

- التحقق ان النقطة $H(1;1;0)$ تنتمي الى (δ) ثم استنتاج طبيعة المجموعة (δ) .
 $H(1;1;0)$ تنتمي الى (δ) معناه $HA^2 - HB^2 = 2$ ومنه

6. لتكن نقطة متغيرة من (Δ) ونعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(t) = AN^2$.

- ادرس اتجاه تغيرات f استنتاج ثانية المسافة بين (Δ) و A

N نقطة من المستقيم (Δ) معناه $N(6t-2; -2t+1; 4t)$

$$\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} -6t \\ 2t \\ 2-4t \end{pmatrix} \text{ ومنه } \overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} 2-6t+2 \\ 1+2t-1 \\ 2-4t \end{pmatrix} \text{ ومنه } AN^2 = (-6t)^2 + (2t)^2 + (2-4t)^2 \text{ وبالتالي}$$

$$f(t) = 56t^2 - 16t + 4 \text{ ومنه } AN^2 = 36t^2 + 4t^2 + 4 + 16t^2 - 16t = 56t^2 - 16t + 4$$

$$f'(t) = 112t - 16$$

$$f'(t) = 0 \text{ أي } 112t = 16 \text{ وبالتالي } t = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$$

المسافة بين (Δ) و A هي $f(\frac{1}{7}) = 56(\frac{1}{7})^2 - 16(\frac{1}{7}) + 4 = \frac{56}{49} + \frac{16}{7} + 4$ و

$$f(\frac{1}{7}) = \frac{364}{49} = \frac{52}{7} \text{ منه}$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1- في المستوي المركب $z_A = 1+i$, $z_B = -1+3i$, $z_C = -3+i$

أ- عَلم النقط A , B , C

ب- h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C . عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز التحاكي h :

h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C عبارته المركبة من الشكل $z' = 2z + b$ ومنه

$$\begin{cases} z_C = 2z_A + b \\ z_\omega = 2z_\omega + b \end{cases} \text{ وبالتالي } z_\omega - z_C = 2z_\omega - 2z_A \text{ ومنه}$$

$$z_\omega = 5+i \text{ ومنه } z_\omega = 2z_A - z_C = 2(1+i) + 3-i = 5+i$$

2- أ- نضع $L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$L = i \text{ ومنه } L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i+1-3i}{-3+i+1-3i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{i(-2i-2)}{-2-2i} = i$$

$$Arg(L) = Arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ و } |L| = |i| = 1$$

• استنتاج طبيعة المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

ب- عَين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث L^n تخيليا صرفا:

$$L^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \text{ ومنه } L = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ لدينا}$$

L^n تخيليا صرفا معناه $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$ تكافئ $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ تكافئ $n = 2k + 1$

3- لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

أ- نبيّن أن D مرجح النقط A, B, C مرفقة بمعاملات حقيقية يُطلب تعيينها :
لدينا $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ و منه $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ و منه $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$
 $(A;1);(B;-1);(C;1)$ مرجح D أي $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

ب- تعيين z_D لاحقة D و z_I لاحقة I

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = -2 + 2i \quad , \quad z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = -1 - i$$

ج- تعيين وإنشاء المجموعة (φ) للنقط M من المستوي بحيث : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

$$\|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MI}\| \quad \text{و} \quad \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD}\| \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|2\overrightarrow{MI}\|$$

أي $MD = MI$ وبالتالي المجموعة (φ) هي مستقيم محور القطعة $[DI]$

4- نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 1 + 5i$

أ- كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_I - z_A}{z_D - z_E}$ ثم استنتاج أن $DE = 2AI$ و (DE) يعامد (AI)

$$\frac{|z_I - z_A|}{|z_D - z_E|} = \frac{AI}{ED} = \frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي} \quad \left| \frac{z_I - z_A}{z_D - z_E} \right| = \left| -\frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2} \quad \text{و منه} \quad \frac{z_I - z_A}{z_D - z_E} = -\frac{1}{2}i$$

$$\frac{|z_I - z_A|}{|z_D - z_E|} = ED = 2AI$$

$$\arg \frac{z_I - z_A}{z_D - z_E} = \arg(-\frac{1}{2}i) = \frac{\pi}{2}$$

ب- تعيين مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحول D إلى I و يحول E إلى A :

$$\begin{cases} z_I = az_D + b \\ z_A = az_E + b \end{cases} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} S(D) = I \\ S(E) = A \end{cases} \quad \text{و} \quad a = -\frac{1}{2}i \quad \text{و بالتالي} \quad a = \frac{z_I - z_A}{z_D - z_E}$$

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5}i \quad \text{و} \quad b = z_A - \frac{1}{2}z_E = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}i \quad \text{أي} \quad z_A = -\frac{1}{2}z_E + b$$

ج- صورة الدائرة التي مركزها D وتشمل E بالتشابه المباشر S : هي الدائرة التي مركزها I و نصف

$$r = \frac{1}{2} DE$$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 + \frac{2}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x^2}) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

الدالة المشتقة وإشارتها $g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$ و منه $g'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}$
 $g'(x) = 0$ معناه ومنه $x = -1$ مرفوض أو $x = 1$
 جدول التغيرات

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 3 $\nearrow$	$+\infty$

2. استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$: من جدول التغيرات نستنتج أن $g(x) > 0$ على $\mathbb{R}$.

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + x - 1$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. ثم تفسير النتيجة هندسيا:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ التفسير هندسيا $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ التفسير $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل

• دراسة وضعية (C_f) مع مستقيمه المقارب (Δ)

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (x - 1)] : \frac{2\ln x}{x} + x - 1 - (x - 1) = \frac{2\ln x}{x}$ ، معناه $x = 1$

و منه لما $x > 1$ فإن (C_f) فوق (Δ) و لما $x < 1$ فإن (C_f) أسفل (Δ)

(3) أ) نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x}{x^2} + 1 = \frac{2 - 2\ln x + x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب) استنتاج إشارة f' ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

إشارة f' من إشارة g ولدينا $g(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه $f'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$
 جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(4) نبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) عند نقطة يطلب تعيين إحداثيها ثم أكتب معادلة لـ (T)

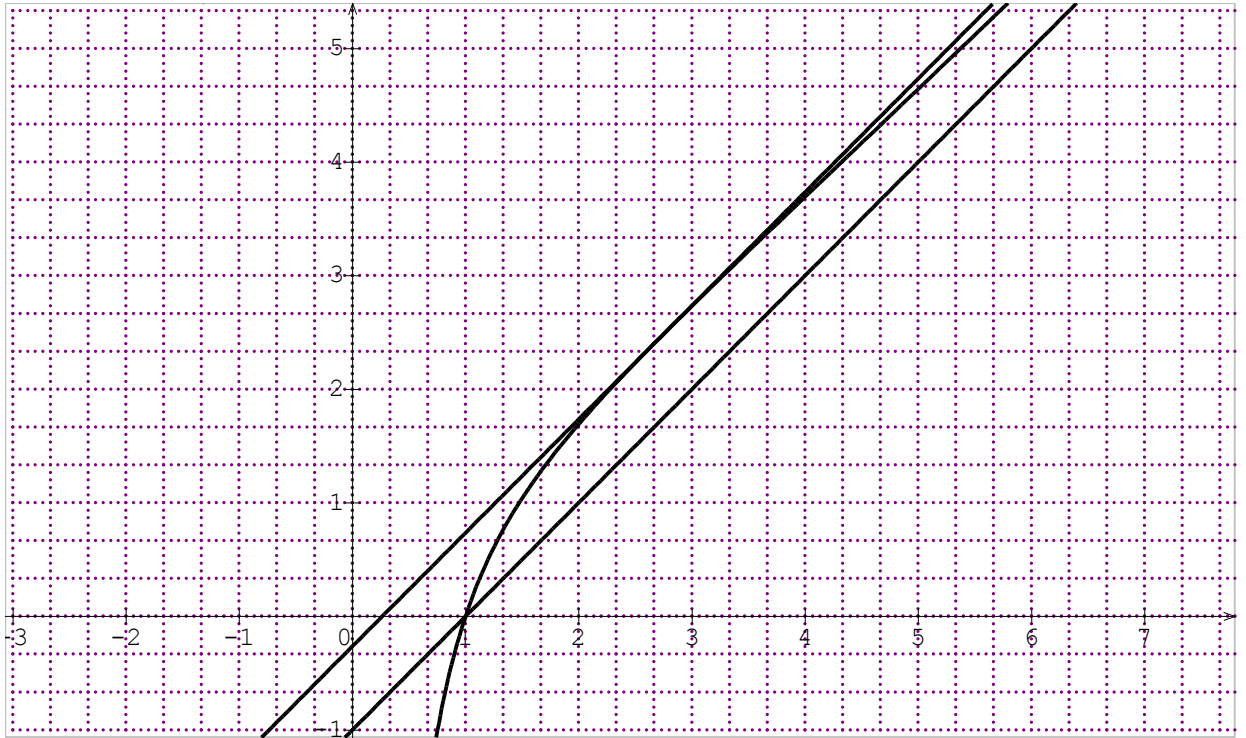
(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) معناه $f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{2 - 2\ln x + x^2}{x^2} = 1$ أي

$2 - 2\ln x + x^2 = x^2$ وبالتالي $2 - 2\ln x = 0$ و منه $\ln x = 1$ أي $x = e$ أي $A(e; \frac{2}{e} + e - 1)$

$$f(e) = \frac{2\ln e}{e} + e - 1 = \frac{2}{e} + e - 1$$

معادلة لـ (T) : $y = 1(x - e) + \frac{2}{e} + e - 1$ و منه $(T) : y = x + \frac{2}{e} - 1$

(5) أنشاء كلا من المستقيمين (Δ) و (T) ، ثم المنحنى (C_f) :



(6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $2\ln x - xm = x$

$2\ln x = xm + x$ و منه $2\ln x = xm + x$ و منه $2\ln x - xm = x$

أي $2\ln x = x(m+1)$ و منه $\frac{2\ln x}{x} = m+1$ و بالتالي $\frac{2\ln x}{x} + x - 1 = m + 1 + x + 1$

وبالتالي $f(x) = x + m$

• لما $m \leq \frac{2}{e} - 1$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد

• لما $m > \frac{2}{e} - 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

والله الموفق

تمنيائنا لكم بالنجاح في امتحان بكالوريا 2015