متقن الشهيد سرار عبد الحميد - زغاية 2015 - 2014

الأستاذ : ش- أ

تصحيح البكالوريا التجريبي دورة ماي 2015 الشعبة : رياضيات

الإجابة	العلامة

الموضوع الأول

التمرين الأول

❶ إيجاد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الاعداد الطبيعية والتي تحقق المعادلة (E).....$x^3-y^3=631$

بالقسمة الإقليدية للعدد x^3-y^3 على $x-y$ نجد : $x^3-y^3=(x-y).(x^2+y^2+xy)$

المعادلة (E) تصبح $(x-y).(x^2+y^2+xy)=631$

بما أن 631 عدد أولي أي 1 . 631 =631 فإن $\begin{cases}(x-y)=1\\(x^2+y^2+xy)=631\end{cases}$ لأن $(x^2+y^2+xy)\succ(x-y)$

و x ، y عددان طبيعيان .

إذن $y=x-1$ وبالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد $x^2-x-210=0$ ولدينا $\Delta=841$ ومنه $\sqrt{\Delta}=29$

لدينا إذن $x_1=\frac{1-29}{2}=-14$ (حل مرفوض) و $x_2=\frac{1+29}{2}=15$ بالتعويض نجد $y=14$

ومنه توجد ثنائية وحيدة هي حلول المعادلة ومنه $S=\{(15,14)\}$

❷ **أ / إيجاد باقي قسمة 111 على 7 :** 111=15.7+6 ومنه : $111\equiv 6[7]$

ب / تعيين حسب قيم n بواقي قسمة 10^n

$10^0\equiv 1[7]$, $10^1\equiv 3[7]$, $10^2\equiv 2[7]$, $10^3\equiv 6[7]$, $10^4\equiv 4[7]$, $10^5\equiv 5[7]$, $10^6\equiv 1[7]$

ومنه جدول البواقي كما يلي

قيم n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
البواقي	1	3	2	6	4	5

❸ α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كما يلي $\alpha=9998887776665554443332221 11$

أ- كتابة α بدلالة العدد 111 :

بقسمة العدد α على 111 نجد : $\alpha=111.(900800700600 5004003002001)$

ب – باقي قسمة α على 111 : باستعمال السؤال ❷ أ / و ❷ب/ لدينا

$$111.(900800700600 5004003002001)\equiv 6.(1.10^0+2.10^3+3.10^6+4.10^9+5.10^{12}+6.10^{15}+7.10^{18}+8.10^{21}+9.10^{24})$$

ومنه $\alpha\equiv 111.(900800700600 5004003002001)\equiv 6.(1.+2.6+3.1+4.6+5.1+6.6+7.1+8.6+9.1)$

لدينا إذن $\alpha\equiv 870[7]$ لكن $870\equiv 2[7]$ ومنه لدينا $\alpha\equiv 2[7]$

التمرين الثاني

لدينا $A(-1,1,0)$, $(p):x-2y+2z-6=0$ و $(D):\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-2\\z=2t-2\end{cases}$

❶ **أ – المسافة بين A و (p)** هي : $d(A,p)=\frac{|-1-2.(1)+2.(0)-6|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$

$d(A,p)=3\succ 0$ ومنه $A\notin(p)$

ب – إثبات أن (D) يشمل A ويوازي (p) :

$A \in (D)$ أي $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} -1=2t-3 \\ 1=3t-2 \\ 0=2t-2 \end{cases}$ لدينا

- اثبات أن $(D)//(p)$:

$\vec{u}(2,3,2)$ شعاع توجيه ل (D) , $\vec{n}(1,-2,2)$ شعاع ناظمي ل (p) ولدينا $\vec{u}.\vec{n}=2.1+3.(-2)+2.3=0$

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدان ومنه $(D)//(p)$.

❷ أ – تمثيل وسيطي ل (Δ) الذي يشمل A ويعامد (p) :

(Δ) يعامد (p) ومنه $\vec{n}(1,-2,2)$ هو شعاع توجيه ل (Δ) ومنه : $(\Delta):\begin{cases} x=t'-1 \\ y=-2t'+1 \\ z=2t' \end{cases}$

ب/ إحداثيات B نقطة تقاطع (Δ) و (p) :

$\begin{cases} x=t'-1 \\ y=-2t'+1 \\ z=2t' \\ x-2y+2z-6=0 \end{cases}$ ومنه لدينا : $(t'-1)-2(-2t'+1)+2(2t')-6=0$ ومنه $t'=1$ بالتعويض بقيمة t' في الجملة نجد $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$ أي $B(0,-1,2)$ نقطة تقاطع (Δ) و (p).

ج – تمثيل وسيطي ل (Δ_0) الذي يشمل B ويوازي (D) :

$(\Delta_0)//(D)$ ومنه شعاع توجيه (D) **هو شعاع توجيه ل** (Δ_0) أي $\vec{u}(2,3,2)$ شعاع توجيه ل (Δ_0) .

ومنه $(\Delta_0):\begin{cases} x=2t \\ y=3t-1 \\ z=2t+2 \end{cases}$.

- **إثبات أن $(\Delta_0)\subset(p)$: يكفي إيجاد نقطتين من (Δ_0) تنتميان إلى (p)**

لدينا $B(0,-1,2)$ تنتمي إلى (Δ_0) و $B(0,-1,2)$ تحقق معادلة (p) فهي تنتمي إلى (p) .

بوضع $t=1$ في التمثيل الوسيطي ل (Δ_0) **نجد نقطة أخرى** $B(2,2,4)$ من (Δ_0) وتحقق معادلة (p) أيظا .

بما أنه توجد نقطتان من المستقيم (Δ_0) **تنتميان إلى** (p) فإن $(\Delta_0)\subset(p)$

❸ حساب المسافة بين النقطة $C(2-1,2)$ والمستقيم (D):

المسافة بين النقطة $C(2,-1,2)$ والمستقيم (D) هي الطول CH حيث H هي المسقط العمودي ل C على (D)

يكفي إيجاد إحداثيات النقطة H ثم حساب $\left\|\overrightarrow{CH}\right\|$.

H تنتمي إلى (D) ومنه فإن $\begin{cases} x_H=2t-3 \\ y_H=3t-2 \\ z_H=2t-2 \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} x_H-x_C \\ y_H-y_C \\ z_H-z_C \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 2t-5 \\ 3t-1 \\ 2t-4 \end{pmatrix}$

وشعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(2,3,2)$ و $\overrightarrow{CH}\vec{u}=0$ وهذا يعني أن $2.(2t-5)+3.(3t-1)+2.(2t-4)=0$

ومنه $t=\frac{21}{17}$ وبالتعويض بقيمة t نجد $\begin{cases} x_H=\frac{-9}{17} \\ y_H=\frac{29}{17} \\ z_H=\frac{8}{17} \end{cases}$ ومنه $CH=\sqrt{\left(-\frac{9}{17}-2\right)^2+\left(\frac{29}{17}+1\right)^2+\left(\frac{8}{17}-2\right)^2}$

التمرين الثالث

لدينا النقط A_2, A_1, A_0 لواحقها على الترتيب: z_2, z_1, z_0 حيث $z_0=5-4i, z_1=-1-4i, z_2=-4-i$.

❶ ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S(A_0)=A_1$ و $S(A_1)=A_2$:

بما أن $A_0 \neq A_1$ و $A_1 \neq A_2$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A_0 إلى A_1 ويحول A_1 إلى A_2

ب – اثبات أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$:

لدينا $\begin{cases} S(A_0)=A_1 \\ S(A_1)=A_2 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} z_1=az_0+b....(1) \\ z_2=az_1+b....(2) \end{cases}$ وبطرح العبارتين نجد $z_2-z_1=a(z_1-z_0)$ ومنه

$a=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=\frac{1-i}{2}$ بالتعويض بقيمة a في المعادلة (1) أو (2) نجد $b=\frac{-3+i}{2}$

ومنه العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$

ج – استنتاج النسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S :

- نسبة التشابه هي $|a|=\left|\frac{1-i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- زاوية التشابه S هي $\arg(a)=\arg\left(\frac{1-i}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$
- لاحقة المركز Ω هو w حيث $w=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{-3+i}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-3+i}{1+i}$ وبالضرب في مرافق المقام نجد

$w=-1+2i$

د - النقطة M لاحقتها z حيث $z \neq \omega$ و z صورتها $M'(z')$ بواسطة S

- التحقق أن $\omega-z'=i(z-z')$. واستنتاج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

$$\frac{w-z'}{z-z'}=\frac{-1+2i-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}{z-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}=i$$

- لدينا $\left|\frac{w-z'}{z-z'}\right|=|i|=1$ معناه المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين ..... (1)

لدينا أيضا $\arg\left(\frac{w-z'}{z-z'}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ معناه المثلث $\Omega MM'$ قائم في M' .....(2) (لاحقة M' موجودة في البسط والمقام).

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين و قائم في M' .

❷ من أجل كل عدد طبيعي n , نعرف متتالية النقط (A_n) كما يلي: $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $v_n=A_nA_{n+1}$

ا) تمثيل النقط A_0, A_1, A_2 **وانشاء هندسيا النقط** A_3, A_4, A_5, A_6 .

- لدينا $A_0(5,-4), A_1(-1,-4), A_2(-4,-1)$
- من جهة أخرى لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $S(A_0)=A_1$, $S(A_1)=A_2$, $S(A_2)=A_3$ .....الخ

ومنه نستنتج أن $(S0S)(A_0)=A_2$, $(S0S)(A_1)=A_3$ و $(S0S)(A_2)=A_4$ .....الخ

أي التشابه $S0S$ يحول A_0 إلى A_2 و يحول A_1 إلى A_3 ويحول A_2 إلى A_4 ...الخ

حيث $S0S$ هو مركب تشابهين نسبته جداء النسبتين وزاويته هي مجموع الزاويتين .

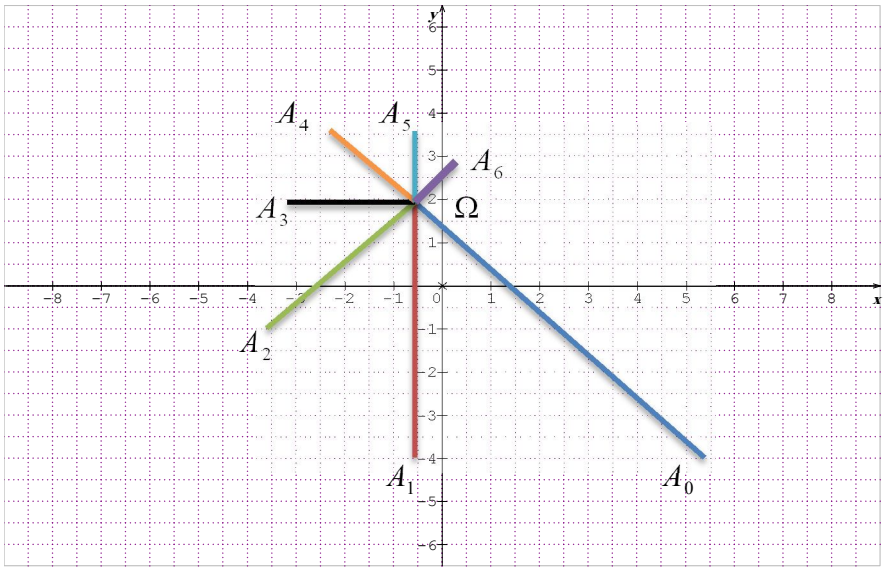
بما ان نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن نسبة التشابه $S0S$ هي $\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

بما ان زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$ فإن زاوية التشابه $S0S$ هي $\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$

لدينا مثلا : $\Omega A_2=\frac{1}{2}\Omega A_0$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_0},\overrightarrow{\Omega A_2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_2 صورة A_0 بالتشابه $S0S$

$\Omega A_3=\frac{1}{2}\Omega A_1$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_3 صورة A_1 بالتشابه $S0S$ ..... الخ

الإنشاء :



ب) اثبات أنّ المتتالية (v_n) **هندسية أساسها** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.وتعيين حدها الأوّل** v_0

لدينا $v_n=A_nA_{n+1}$, ومنه $v_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}$ ومنه $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_nA_{n+1}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}}{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

لأن $\begin{cases}S(A_n)=A_{n+1}\\S(A_{n+1})=A_{n+2}\end{cases}$ أي $A_{n+1}A_{n+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الأول $v_0=A_0A_1=\sqrt{(-1-5)^2+(-4+4)^2}=6$

❸ المتتالية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n=v_0+v_1+...+v_n$

ا) **التعبير عن v_n بدلالة n :** $v_n = v_0 . q^n$ ومنه $v_n = 6.\dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ أي $v_n = 12.\dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2-\sqrt{2}}$

ب) بما أن $-1 \prec q = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \prec 1$ فإن (v_n) متقاربة وبما أن U_n هي مجموع حدود متتابعة لحدود (v_n) المتقاربة فإن (U_n) متقاربة.

❹ **حساب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n = \Omega A_n$ ثمّ تعيين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$**

لدينا $\ell_n = \Omega A_n$ ومنه $\ell_{n+1} = \Omega A_{n+1}$ ومنه لدينا $\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \dfrac{\Omega A_{n+1}}{\Omega A_n} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n}{\Omega A_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

أي (ℓ_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها العام هو $\ell_n = \ell_0.(q')^n$ أي $\ell_n = \Omega A_0.(q')^n$

وبالتالي $\ell_n = \sqrt{(5+1)^2+(-4-2)^2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ومنه $\ell_n = 6\sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

- **أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$:**

$\ell_n \langle 0.06$ معناه $6\sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec 0,06$ ومنه $\ln 6\sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec \ln(0,06)$ ومنه

$\ln 6\sqrt{2} + n\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \prec -2\ln 6$ وبالتالي $n \prec \dfrac{-2\ln 6 - \ln 6\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2} - \ln 2}$

التمرين الرابع

f و g معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1-\ln x}{x}$ و $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$

❶ أ) **اثبات أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$:**

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x) = 4x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2+1}{x}$ وبما أن $x \in]0,+\infty[$ فإن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب)

$g(1) = 0$ ومنه اشارة g تكون كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

❷ أ) **حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. وتفسير النتيجة هندسيا :**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left[(2x+1) + \frac{1-\ln x}{x}\right] = +\infty$$

لأن

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0}(2x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty}\left(y - y\ln\dfrac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty}(y + y\ln y) = +\infty \end{cases}$$

- التفسير الهندسي : $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) اثبات أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f):

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=0$ ذي المعادلة (Δ) $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ج) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ): ندرس اشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$

لدينا $f(x)-(2x+1)=\frac{1-\ln x}{x}$ ومنه $\frac{1-\ln x}{x}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e$ ومنه $x=e$

ومنه وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ملخصة في الجدول كما يلي :

x	0		e		$+\infty$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)		0	(C_f) يقع تحت (Δ)	

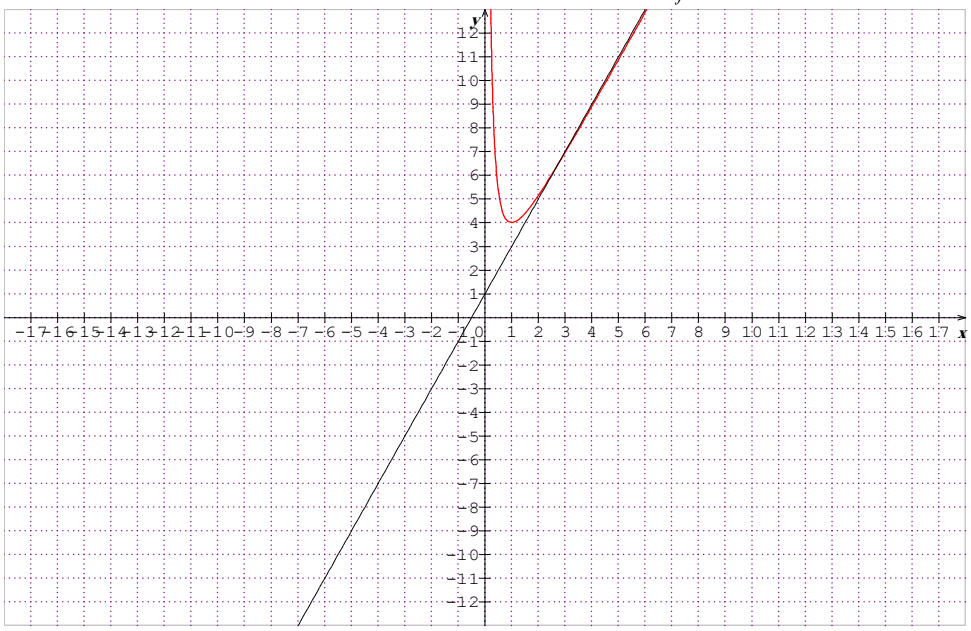
❸ **اثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،فإن :** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=2+\frac{-2\ln x}{x^2}=\frac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

- إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وجدول تغيرات f يكون كما يلي

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

❹ انشاء كلا من (Δ) و (C_f):



❺ من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-(2x+1))dx$

ا) حساب U_n ، بدلالة n ، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n) :

$$\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-2x+1]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{1-\ln x}{x}dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{1}{x}dx-\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln}{x}dx$$

$$=[\ln x]_{e^n}^{e^{n+1}}-\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e^n}^{e^{n+1}}=[(n+1)\ln e-n\ln e]-\left[\frac{((n+1)\ln e)^2}{2}-\frac{(n\ln e)^2}{2}\right]$$

$$=[n+1-n]-\left[\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n^2}{2}\right]=1-\left[\frac{n^2+2n+1-n^2}{2}\right]=1-\frac{2n-1}{2}=-n+\frac{1}{2}$$

وبالتالي $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-2x+1]dx=-n+\frac{1}{2}$ ومنه (U_n) حسابية أساسها $r=-1$ وحدها الاول $U_0=\frac{1}{2}$.

ب) A مساحة حيز المستوى ؛المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيم (Δ) وبالمستقيمين الذين معادلتان لهما: $x=1$, $x=e^2$. التحقق من أن : $A=(U_0-U_1)\ ua$

$U_0-U_1=\left[\int_1^e[f(x)-2x+1]dx\right]-\left[\int_e^{e^2}[f(x)-2x+1]dx\right]=\int_1^{e^2}[f(x)-2x+1]dx=A$ (باستعمال علاقةشال)

❻ الدالة h ،معرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، بالعلاقة : $h(x)=x^2(1+\ln x)-3x+2$

أ) اثبات أنه ،من أجل كل x من $]0;+\infty[$ **، فإن :** $\frac{h(x)}{x}=f(\frac{1}{x})-4$ **.ثم استنتاج أن** $h(x)\geq 0$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-4=2.\frac{1}{x}+1+\frac{1-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-4=\frac{x+2}{x}+x+x\ln x-4$$

$$=\frac{x+2+x^2+x^2\ln x-4x}{x}=\frac{x^2(1+\ln x)-3x+2}{x}=\frac{h(x)}{x}$$

- لدينا من جدول تغيرات f $f(x)\geq 4$ تكافيء $f(x)\geq f(1)$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 4$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right)-4\geq 0$

ومنه $\frac{h(x)}{x}\geq 0$ وبالتالي $h(x)\geq 0$

ب) **تعيين xبحيث يكون** $h(x)=0$

$h(x)=0$ تكافيء $f\left(\frac{1}{x}\right)-4=0$ تكافيء $f\left(\frac{1}{x}\right)=4$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)$ ومنه $\frac{1}{x}=1$ وبالتالي $x=1$

انتهى تصحيح الموضوع الأول

بالتوفيق في بكالوريا 2015