

المدة: 3 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) ، معرفة على \mathbb{N} حيث $U_0 = 4$ و العلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 4}{4}}$

والممتتالية العددية (v_n) ، معرفة على \mathbb{N} بالعلاقة: $v_n = 3u_n^2 - 4$
1. برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 4$

2. اثبت أن (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

3. حدد اتجاه تغير المتتالية (V_n)

4. اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

5. احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_3^2 \dots + u_n^2$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) نعتبر، في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، كثير الحدود $p(z)$ حيث: $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

(أ) أحسب $p(4)$. (ب) بين أن $p(z) = (z-4)(z^2 - 2z + 4)$ ثم حل في \mathbb{C} المعادلة $p(z) = 0$

(2) المستوى منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ حيث: $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$

تعطى النقاط A, B, C ; ذات اللواحق: $z_A = 4$ و $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \bar{z}_B$ ، على الترتيب.

(أ) أنشئ بعناية A, B, C (ب) ما طبيعة المثلث ABC ؟ علل إجابتك .

(3) لتكن النقطة K ، ذات اللاحة $z_K = -\sqrt{3} + i$

(أ) عين z_F لاحقة النقطة F صورة K بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(ب) عين z_G لاحقة النقطة G صورة النقطة K بالانسحاب الذي شعاعه \overline{OB}

(ج) أثبت أن المستقيمين (OC) و (OF) متعامدان .

(د) علم النقطتين G و K ثم بين أن الرباعي $OBGK$ مربع.

(ه) عين الطويلة وعمدة للعدد z_G .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ،
نعتبر النقط : $A(1;1;0)$ و $B(2;0;3)$ و $C(0;-2;5)$ و $D(1;-5;5)$.
أجب بصحيح أو خطأ عن كل من الاقتراحات الآتية مع التبرير:
(1) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $y = 2x + 4$ هي مستقيم.
(2) التحويل النقطي للفضاء الذي يرفق بكل نقطة M من الفضاء النقطة M' حيث:
 $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ هو التّحاكي الذي مركزه النقطة G . حيث G مرجح الجملة :
 $\{(A,1), (B,1), (C,2)\}$
(3) النقط D, C, B, A من نفس المستوي.
(4) الكرة التي مركزها $\Omega(3;3;0)$ حيث Ω ونصف قطرها 5 مماسة للمستوي ذو المعادلة :
 $2x + 2y + z + 3 = 0$
(5) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$ هي سطح الكرة التي أحد أقطارها $[AC]$.
(6) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$ هي: المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$.

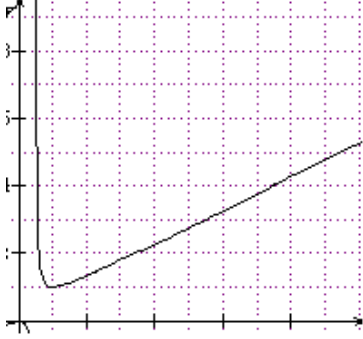
التمرين الرابع: (7 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x^3}$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (وحدة الطول 3cm)
I. (1) احسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$
(2) أبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته: $y = 3 - x$
ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)
(3) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = -x^4 + 1 - 3\ln x$
أ- حدد اتجاه تغير الدالة g ب- شكل جدول تغيرات الدالة g ج- احسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$
(4) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$
استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
II. (1) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,5; 0,6[$ حلا وحيدا α
(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]3; 3,1[$ حلا وحيدا β
(3) أنشئ بدقة (C_f) و (D)

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04,5 نقاط)

الدالة المعرفة على $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ بـ : $g(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ و (c_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



أ/ بقراءة بيانية حدد اتجاه تغير g

ب/ بين أنه إذا كان $x \geq 1$ فإن $g(x) \geq 1$

2) نعرف على \mathbb{N} المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 4$

$$u_{n+1} = g(u_n) \text{ و}$$

أ/ مثل على حامل محور الفواصل، و باستعمال المنصف الاول للمعلم والمنحني (c_g) ، الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

ج/ برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $u_n \geq 1$

د/ بين أن (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنها متقاربة و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) نعرف على \mathbb{N} المتتاليتين (v_n) و (w_n) كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ بين أن (w_n) متتالية هندسية، عين أساسها و حدها الاول و اكتب كلا من w و v_n بدلالة n

ب/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$

من أجل كل عدد مركب z حيث: $z = x + iy$ ، x و y عدنان حقيقيان و z يختلف عن $3 + 2i$

$$\text{نضع: } z' = \frac{z+1+4i}{z-3-2i}$$

1) ا- اكتب z' على الشكل الجبري .

ب- عيّن المجموعة (E) للنقط $M(z)$ حتى يكون z' حقيقيا.

ج- عيّن المجموعة (F) للنقط $M(z)$ حتى يكون z' تخيليا صرفا.

2) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 3 + 2i$ و $z_B = -1 - 4i$

أعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة العدد المركب z' ثم جد المجموعتين (E) و (F) .

3) احسب $|z' - 1| \cdot |z - 3 - 2i|$ ثم استنتج المجموعة (C') للنقط $M'(z')$ عندما تتغير النقطة $M(z)$

على الدائرة (C) ذات المركز A ونصف قطرها $\sqrt{13}$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- نعتبر النقط: $A(0;2;-1), B(0;0;1), C(0;0;-1), H(0;0;h)$ حيث h ينتمي إلى $\mathbb{R} - \{-1,1\}$
- (1) تحقق من أن $z = h$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (P_h) المار بالنقطة H و العمودي على المستقيم (BC)
- (2) أاكتب تمثيلا وسيطي للمستقيم (AB) واستنتج أن جملة المعادلتين، التالية:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}, \text{ هي تمثيل ديكرتي للمستقيم } (AB)$$

- ب- تحقق من أن المستقيم (AB) يقطع المستوى (P_h) في النقطة $N(0;1-h;h)$
- (3) نعتبر، في الفضاء، المستقيمين (Δ) و (Δ') حيث:

$$(\Delta') : \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 2t \\ z = -2t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (\Delta) : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

المستقيمان (Δ) و (Δ') يقطعان المستوى (P_h) في النقطتين P و Q ، على الترتيب.

عين، بدلالة h ، إحداثيات كل من النقطتين P و Q .

(4) أ- بين أن الرباعي $HPQN$ مستطيل.

ب- نرض أن h ينتمي إلى $]-1; 1[$. بين أن محيط المستطيل $HPQN$ عدد ثابت، يطلب تحديده.

التمرين الرابع : (06,5 نقاط)

الدالة f معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (x^2 + x - 2)e^{\frac{-x}{2}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ- برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{\frac{-x}{2}}) = 0$ (ضع $x = 4\alpha$) ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) ادرس تغيرات الدالة f و أنجز جدول تغيراتها.

(3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0؛ ثم ارسم (T) و (C_f) .

(4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد و إشارة حلول المعادلة الاتية ذات المجهول الحقيقي x

$$x^2 + x - 2 = me^{\frac{x}{2}}$$

(5) F هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{\frac{-x}{2}}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية.

أ- عين الأعداد a, b, c حتى تكون الدالة F أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

ب - λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$. احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$$y = 0, x = 1, x = \lambda$$

(6) الدالة g معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = [f(x)]^2$

احسب بدلالة $g'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$, و استنتج إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .