الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانويات :العطاف +العبادية + زدين+الروينة

امتحان البكالوريا التجريبية — دورة :ماي2016

الشعبة : تقني رياضي - رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن: $y\equiv 4[11]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع: $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ)عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب)عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$

ج)استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10

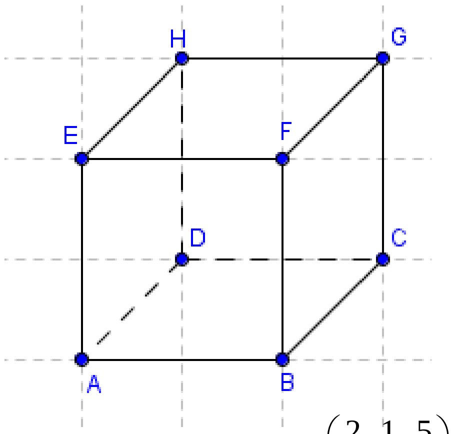
ب) استنتج رقم أحاد العدد 2^{2016}

ج) عين كل الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق: $2^y-2x\equiv 8[10]$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه 1 , I منتصف القطعة $[EF]$ و J نظيرة النقطة E بالنسبة للنقطة F

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$



1) أ) عين إحداثيات النقطتين I و J

ب) تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على المستوي (BGI)

جـ) استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (BGI)

د) أحسب المسافة بين F و المستوي (BGI)

2) نضع المستقيم (Δ) المار من F و العمودي على المستوي (BGI)

أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

ب) بين أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة K مركز الوجه $ADHE$

جـ) بين أن المستقيم (Δ) و المستوي (BGI) يتقاطعان في النقطة P إحداثياتها $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$

د) هل النقطة P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI ؟علّل إجابتك.

3) عين معادلة سطح الكرة (S) الموجودة داخل المكعب $ABCDEFGH$ والتي تمس أوجهه الستة .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) نعتبر النقط A,B,C ذات اللواحق: $Z_A=2, Z_B=3+i\sqrt{3}, Z_C=i2\sqrt{3}$

أ) عين قيسا بالراديان للزاوية ABC .

ب) استنتج أن النقطة W ذات اللاحقة $Z_W = 1+i\sqrt{3}$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

2)نعتبر التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' حيث : $Z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} Z + 2$

- عين طبيعة التحويل T ، مبينا عناصره المميزة .

3) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن W لاحقتها Z_n, نضع $M_0 = O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$M_{n+1} = T\left(M_n\right)$$

أ) بين أن النقط M_3, M_2 و M_4 لواحقها على الترتيب هي : $Z_2 = 3+i\sqrt{3}, Z_3 = 2+i\,2\sqrt{3}$ و $Z_4 = i\,2\sqrt{3}$

(يمكن ملاحظة أن $M_1 = A$ و $M_2 = B$ و $M_4 = C$).

ب) قارن بين الأطوال M_1M_2 و M_2M_3 و M_3M_4 .

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+6} = M_n$ ثم عين لاحقة النقطة M_{2016}

د) أحسب من أجل كل عدد طبيعي n طول القطعة المستقيمة $\left[M_n M_{n+1}\right]$

التمرين الرابع :(07نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $\left(\|\vec{i}\| = 2cm \,, \|\vec{j}\| = 1\,cm\right)$

$I)$ g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right) + \ln x\right]$

1) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين $0 < x < 1$ و $x > 1$.

2) احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$, 0 ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .

3) احسب $f'(x)$ واستنتج أن إشارتها من نفس إشارة الدالة g

4) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

5) أرسم (C_f) والمستقيمين المقاربين

$II)$ 1. باستعمال تكامل التجزئة ، عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1) احسب $S(\alpha)$مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = -x+1$, $x = 1$, $x = \alpha$ بحيث $0 < \alpha < 1$

2) احسب نهاية $S(\alpha)$ لما يؤول α إلى الصفر ، أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية

$III)$ (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 \in [1;2]$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$ لدينا : $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$

2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \in [1;2]$

3) بملاحظة أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ ، عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، نسمي العدد l نهايتها

5) احسب بدقة قيمة l .

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل : (04نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (الوحدة $2cm$)

– نذكر من أجل كل عددين مركبين a و b لدينا : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^3=8$

2) نعتبر A ، B و Cثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب a ، b و cحيث:

$$a=2 \quad ، \quad b=-1+i\sqrt{3} \quad ، \quad c=-1-i\sqrt{3}$$

نسمي r دوران مركزه Aوزاويته $\frac{\pi}{2}$ و r' دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

نضع $B'=r'(B)$ و $C'=r(C)$ نرمز بالعددين b' و c' إلى لاحقتي النقطتين B'و C' على الترتيب .

أ) مثل النقط A ، B و C في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) أثبث أن $b'=2+\sqrt{3}+3i$ ،وأن العددان b' و c' مترافقان.

3) نسمي النقط M ، N ، P Qمنتصفات القطع $[CB]$ ، $[BB']$ ، $[B'C']$و $[C'C]$ونرمز بالأعداد m ، n ، p و q الى لواحقها

أ) أثبت أن اللاحقة n للنقطة N تساوي $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ثم استنتج أن النقط O ، N و C على استقامة واحدة.

ب) أثبث أن $n+1=i(q+1)$ ثم استنتج طبيعة المثلث MNQ .

جـ) أثبت أن الرباعي $MNPQ$ مربع .

التمرين الثاني : (04.5نقاط)

1) أ) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (E) : $8x-5y=3$

ب) ليكن mعدد صحيح بحيث يوجد عددان صحيحان $(p;q)$ يحققان : $m=8p+1$ و $m=5q+4$

– بين أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن $m\equiv 9[40]$

جـ) عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 200

2) ليكن n عدد طبيعي

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7 .

3) ليكن a و b عددان طبيعيان كلاهما أصغر من 9 مع $a\neq 0$

نعتبر العدد N حيث : $N=a\times 10^3+b$

نذكر أن العدد N يكتب في النظام العشري : $N=\overline{a00b}^{10}$

4) نريد تعيين الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

– تحقق أن $10^3\equiv -1[7]$ ثم استنتج كل الأعداد المطلوبة N .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A\,(1;1;1)$, $B\,(1;0;2)$, $C\,(1;2;0)$ و

$D\,(-1;0;3)$ والمجموعة (Γ) لنقط الفضاء $M\,(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة : $x^2-2(x+y+z-yz)+3=0$

أ) بين أن النقط A,B و C تقع على استقامة واحدة .

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقط A,B و C .

جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقطة D والعمودي على (Δ).

د) أحسب إحداثيات المسقط العمودي D' للنقطة D على المستقيم (Δ).

2) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من مجموعة النقط (Γ) ، ولتكن النقطة $M'(x';y';z')$ نظيرة M بالنسبة للمستقيم (Δ)

أ) بين أنّ إحداثيات النقطة M' تحقق $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-z \\ z'=2-y \end{cases}$ ثم استنتج أنّ النقطة M' تنتمي أيضا إلى مجموعة النقط (Γ)

ب) برهن أنه مهما تكن النقطة M من المجموعة (Γ) فإن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}$ متعامدين .

جـ) بين أن كل نقطة من المستقيم (AM) تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

د) برهن أن مجموعة النقط المشتركة بين المجموعة (Γ) والمستوي (P) هي دائرة مركزها D' يطلب تحديد نصف قطرها .

التمرين الرابع : (07نقاط)

I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

1)أ) تحقق من أن $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب) استنتج أن الدالة f فردية ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ)بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

جـ) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فان : $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$

3)أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

4) أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y=1-\frac{1}{2}x$ و المستقيم (Δ) ثم أنشئ المنحنى (C_f)

5) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما

أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

ب) أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين :

$x=0$ و $x=\lambda$ ، ثم أحسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأوّل $u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n>0$

2) أ) تحقق ، باستعمال نتيجة السؤال 3.جـ) ، من أنّ : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا يمكن القول عن تقاربها ؟

3) بين انه من كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

الموضوع الاول

التمرين الاول نعتبر المعادلة (E) حيث : $11x-5y=2$

1)أ) لتكن الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) اذن $5y\equiv -2[11]$

ومنه $5y\equiv 9[11]$ ينتج $5y\equiv 9[11]$ ينتج $45y\equiv 81[11]$

وبالتالي $y\equiv 4[11]$ لان $45\equiv 1[11]$ و $81\equiv 4[11]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

لدينا $y\equiv 4[11]$ ومنه $y=11k+4$ وبالتعويض في (E)

نجد الحلول هي الثنائيات $(5k+2;11k+4)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع : $a=5n+2$ **و** $b=11n+4$

أ)تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a **و** b

لدينا a و b حلين للمعادلة (E) وليكن d قاسما مشتركا للعددين a و b ،

اذن $d/11a-5b$ وبالتالي $d/2$ اذن $d\in\{1;2\}$

ب)تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$

لدينا $2/a$ و $2/b$ أي $2/5n+2$ و $2/11n+4$ ومنه $\begin{cases}2/11n+4\\2/10n+4\end{cases}$

اذن $2/n$ ومنه $n=2k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

ج)استنتاج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما .

قيم n التي تجعل $(a,b)=1$ هي كل الأعداد الطبيعية ماعدا التي من اجلها يكون $(a,b)=2$ ومنه قيم n التي تجعل $(a,b)=1$ هي الاعداد الفردية

أي $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$

3) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10 $(n\neq 0)$

لدينا: $2^1\equiv 2[10]$ ، $2^2\equiv 4[10]$ ، $2^3\equiv 8[10]$ ، $2^4\equiv 6[10]$

$2^5\equiv 2[10]$ ، $2^6\equiv 4[10]$ ومنه الدور هو 4 ويكون من اجل كل k من $\mathbb{N}$

$2^{4k+1}\equiv 2[10]$ ، $2^{4k+2}\equiv 4[10]$ ، $2^{4k+3}\equiv 8[10]$ ، $2^{4k+4}\equiv 6[10]$

ب) استنتاج رقم أحاد العدد 2^{2016}

رقم أحاد العدد 2^{2016} هو نفسه باقي قسمة 2^{2016} على 10 وبما ان $2016=4\times 503+4$ **فان** $2^{2016}\equiv 6[10]$ **اذن رقم احاده هو 6**

ج)تعيين كل الثنائيات (x,y) من التي هي حلول (E) وتحقق : $2^{y-2x}\equiv 8[10]$

حلول $(x;y)$ (E) معناه $x=5k+2$ و $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{N}$

اذن $2^{y-2x}\equiv 8[10]$ تكافئ $2^k\equiv 8[10]$ معناه $k=4k'+3$ مع $k'\in\mathbb{N}$

ومنه الثنائيات المطلوبة هي $(20k'+17;44k'+37)$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 ,

1) أ) عين إحداثيات النقطتين I و J

لدينا : $A(0;0;0)$ ، $B(1;0;0)$ ، $G(1;1;1)$ ، $D(0,1;0)$ ، $E(0;0;1)$

I **منتصف** $[EF]$ **اذن** $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ **و J نظيرة E بالنسبة الى F اذن :** $J(2;0;1)$

ب) تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على المستوي (BGI)

$\overrightarrow{DJ}$ ناظمي (BGI) معناه $\overrightarrow{DJ}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي (BGI) أي يكفي التاكد ان : $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ **و** $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$

لدينا $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$ **و** $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$ **و** $\overrightarrow{BI}\left(\frac{-1}{2};0;1\right)$ **فيكون :**

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}=0-1+1=0$ و $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI}=-1+0+1=0$

اذن $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$ ومنه $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على (BGI)

ج) استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (BGI)

لدينا $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على (BGI) فان معادلته هي : $2x-y+z+d=0$

وبما ان $B\in(BGI)$ فان $2+d=0$ أي $d=-2$ وبالتالي

$$(BGI):2x-y+z-2=0$$

د) حساب المسافة بين F و المستوي (BGI) حيث $F(1;0;1)$

$$d(F;(BGI))=\frac{|2-0+1-2|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

2) (Δ) مستقيم يشمل F و عمودي على المستوي (BGI)

أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

بما ان $(\Delta)\perp(BGI)$ فان $\overrightarrow{DJ}$ شعاع توجيه (Δ) اذن (Δ) له تمثيل وسيطي من الشكل :

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

ب) اثبات أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة K مركز الوجه $ADHE$

مركز الوجه $ADHE$ هي نقطة منتصف القطرين $[AH]$ و $[DE]$

ومنه احداثيات K هي $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ لان $H(0;1;1)$

لنتاكد ان $K\in(\Delta)$ هذا معناه :

$$\begin{cases}0=1+2t\\\frac{1}{2}=-t\\\frac{1}{2}=1+t\end{cases}$$

ومنه الجملة تقبل حل وحيد $t=-0.5$ ينتج ان $K\in(\Delta)$

ج) اثبات أن (Δ) والمستوي (BGI) يتقاطعان في النقطة $P\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$

لدينا $(\Delta)\perp(BGI)$ اذن يتقاطعان في نقطة هي المسقط العمودي للنقطة F على (BGI) ومنه يكفي التاكد ان $P\in(BGI)$ و $\overrightarrow{FP}//\overrightarrow{DJ}$

بما ان $2\times\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-2=\frac{8-1+5-12}{6}=0$ فان $P\in(BGI)$

ولدينا $\overrightarrow{FP}\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{6};\frac{-1}{6}\right)$ فيكون $\overrightarrow{DJ}=-6\overrightarrow{FP}$ اذن $\overrightarrow{FP}//\overrightarrow{DJ}$

د) هل النقطة P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI ؟

P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI معناه $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{GI}$ و $\overrightarrow{PI}\perp\overrightarrow{BG}$

لدينا :

$$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{BI}=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2};0;1\right)=\frac{-1}{6}+0+\frac{1}{6}=0$$

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{GI}=\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{6};\frac{-5}{6}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2};-1;0\right)=\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}+0=0$$

$$\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\frac{-1}{6};\frac{-1}{6};\frac{1}{6}\right)\cdot(0;1;1)=0+\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}=0$$

ومنه P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI

3)تعيين معادلة سطح الكرة (S) الموجودة داخل المكعب و تمس أوجهه

مركز (S) هي Ω **نقطة تقاطع الضلعين $[AG]$ و $[BH]$**

اذن $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **ونصف قطرها هو** $r=\frac{1}{2}$

فتكون معادلة سطح الكرة (S) من الشكل :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

$$Z_C = i\,2\sqrt{3},\quad Z_B = 3+i\sqrt{3},\quad Z_A = 2$$

1) أ) تعيين قيسا بالراديان للزاوية ABC .

لدينا $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{4\sqrt{3}i}{12}=\frac{\sqrt{3}}{3}i$ **ومنه**

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$ **وبالتالي** $ABC=\frac{\pi}{2}$

ب) استنتج لاحقة مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

بما ان المثلث ABC قائم في B فان مركز الدائرة المحيطة به هي منتصف القطر $[AC]$ أي $z_W=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{2+i\,2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

2) نعتبر التحويل النقطي T : $Z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z+2$

تعيين طبيعة التحويل T

لدينا $a=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ و $|a|=1$ فان T دوران زاويته هي θ حيث $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{3}$ ومركزه هو النقطة ذات اللاحقة :

$z_0=\frac{b}{1-a}=\frac{2}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}=1+i\sqrt{3}$ أي مركزه هو W

3) n عدد طبيعي Z_n, نضع $M_0=O$ و $M_{n+1}=T(M_n)$

أ) حساب لواحق النقط M_2,M_3 و M_4 :

لدينا $M_1=T(M_0)$ **و منه** $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 0+2=2=z_A$

$M_2=T(M_1)$ **و منه** $z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 2+2=3+i\sqrt{3}$

$M_3=T(M_2)$ **و منه** $z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times(3+i\sqrt{3})+2=2+i\,2\sqrt{3}$

$M_4=T(M_3)$ **و منه** $z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times(2+i\,2\sqrt{3})+2=i\,2\sqrt{3}$

ب) المقارنة بين الأطوال M_1M_2 و M_2M_3 و M_3M_4 .

$M_1M_2=|z_2-z_1|=|1+i\sqrt{3}|=2$ ، $M_2M_3=|z_3-z_2|=|-1+i\sqrt{3}|=2$

$M_3M_4=|z_4-z_3|=|-2|=2$ ومنه $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4$

ج)اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+6}=M_n$

لنبين ذلك بالتراجع ، من اجل $n=0$ ، لدينا $M_5=T(M_4)$

اذن $z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times i\,2\sqrt{3}+2=-1+i\sqrt{3}$

$z_6=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times(-1+i\sqrt{3})+2=-2+2=0$

أي ان $M_{6+0}=M_0$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

أي نبرهن ان $M_{n+7}=M_{n+1}$

لدينا $M_{n+6}=M_n$ اذن $T(M_{n+6})=T(M_n)$ ينتج $M_{n+7}=M_{n+1}$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_{n+6}=M_n$

د) حساب من أجل كل عدد طبيعي n طول القطعة المستقيمة $[M_nM_{n+1}]$

لدينا : $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=2$

لنبين بالتراجع ان $M_nM_{n+1}=2$

من اجل $n=0$ ، لدينا $M_1M_0=2$ ومنه الخاصية صحيحة

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

أي نبرهن ان $M_{n+1}M_{n+2}=2$

لدينا $M_nM_{n+1}=2$ اذن $T([M_nM_{n+1}])=[M_{n+1}M_{n+2}]$ وبما ان T دوران فهو تقايس اذن $M_{n+1}M_{n+2}=M_nM_{n+1}=2$ ،ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ ا ذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_nM_{n+1}=2$

التمرين الرابع :(07نقاط)

f معرفة على $I=]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

I) $g(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$

1)حساب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

$g(1)=0$ ، ولدينا من اجل $0<x<1$ فان $\ln x<0$ و $x\sqrt{x}-1<0$ اذن $\left[(x\sqrt{x}-1)+\ln x\right]<0$ ومنه $g(x)>0$

من اجل $x>1$ فان $\ln x>0$ و $x\sqrt{x}-1>0$ اذن $\left[(x\sqrt{x}-1)+\ln x\right]>0$ ومنه ينتج ان $g(x)<0$

2)حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند 0

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-y^2+1+\cancel{\frac{2\ln y}{y}}^{\,0}\right)=-\infty$$

بما ان $f(x)=-x+1+Q(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}Q(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$

فان المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\cancel{-x}^{\,0}+1+\cancel{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}^{\,-\infty}\right)=-\infty$$

اذن $x=0$ هي معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) **موازي لمحور التراتيب**

3)حساب $f'(x)$: f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\ln x\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-2x\sqrt{x}+2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{-\left[2(x\sqrt{x}-1)+\ln(x)\right]}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

ومنه إشارة $f(x)$ من نفس إشارة الدالة g

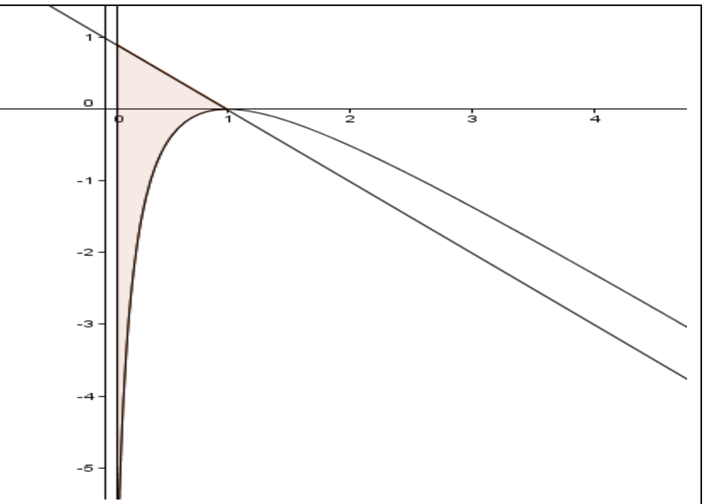
4) اتجاه تغيرات الدالة f و جدول تغيراتها .

لدينا على المجال $]0,1]$: $g(x)\ge 0$ ومنه $f'(x)\ge 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $]0,1]$

وعلى المجال $[1;+\infty[$: $g(x)\le 0$ ومنه $f'(x)\le 0$ اذن الدالة f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ وبالتالي جدول تغيرات f هو :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

5)الرسم



$II($ **1) تعيين دالة أصلية للدالة** $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right] - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right] - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right]$$

الدالة الاصلية المطلوبة هي $x \mapsto 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$

2)حساب $S(\alpha)$ **بحيث** $0<\alpha<1$

$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}|f(x)-y|dx = -\int_{\alpha}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[-2\sqrt{x}\ln x + 4\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1}$$
$$= 4+2\sqrt{\alpha}\ln\alpha - 4\sqrt{\alpha}\ (ua)$$

ومنه $S(\alpha)=8+4\sqrt{\alpha}\ln\alpha-8\sqrt{\alpha}\ cm^2$

3)حساب نهاية $S(\alpha)$ **لما يؤول** α **إلى الصفر**

$$\lim_{\alpha\to0}S(\alpha)=\lim_{\alpha\to0}(8+4\cancel{\sqrt{\alpha}\ln\alpha}^{\,0}-8\sqrt{\alpha})=8cm^2$$

التفسير البياني : نهاية $S(\alpha)$ **هي مساحة الحيز المستوي المحدد بكل من** (C_f) و المستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين : $x=0$ و $x=1$

$(III$: $u_0\in[1;2]$ و $u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$

1)برهان أنه من أجل كل x **من المجال** $[1;2]$ **لدينا :** $0\le\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le1$

لدينا من اجل x من المجال فان $(1)....0\le\ln x\le\ln(2)\le1$

و ان $1\le\sqrt{x}\le\sqrt{2}$ اي ان $(2).....0<\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}\le1$

من (1) و (2) نجد $0\le\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le1$

2)برهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n **لدينا :** $u_n\in[1;2]$

نسمي $P(n)$ الخاصية "$u_n\in[1;2]$"

-لدينا من اجل $n=0$ $u_0\in[1;2]$ ومنه $P(0)$ صحيحة

- نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ اي نبرهن ان $u_{n+1}\in[1;2]$

لدينا : $u_n\in[1;2]$ اي $1\le u_n\le2$ اذن حسب السؤال السابق $0\le\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}\le1$

ومنه $1\le\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1\le2$ اي ان $1\le u_{n+1}\le2$ معناه ان $P(n+1)$ صحيحة

اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع ان الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

3)تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

تحت محور الفواصل) فان $u_{n+1}-u_n\le0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

4)برهان أن المتتالية (u_n) **متقاربة**

لدينا من اجل كل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $1\le u_n\le2$ **اي ان** (u_n) **محدودة من الاسفل**

وبما انها متناقصة فانها متقاربة ولتكن ℓ **نهايتها**

5) حساب نهاية (u_n)

لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ اذن بادخال النهاية على العلاقة التراجعية نجد $\ell=\frac{\ln\ell}{\sqrt{\ell}}+1$ معناه $-\ell+1+\frac{\ln\ell}{\sqrt{\ell}}=0$ معناه $f(\ell)=0$

ونلاحظ ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 1 (بيانيا) ينتج ان $\ell=1$

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل : (04نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $z^3=8$

المعادلة $z^3=8$ **تكافئ** $z^3-2^3=0$ **تكافئ**

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

معناه $z-2=0$ **أو** $z^2+2z+4=0$ **معناه** $z=2$ **او**

$z^2+2z+4=0$ **لدينا** $\Delta=4-16=-12=(i\,2\sqrt{3})^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين هما $z_1=\frac{-2+i\,2\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$

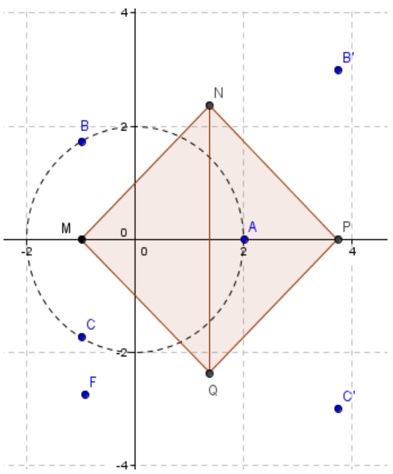
و $z_2=\frac{-2-i\,2\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$

اذن مجموعة الحلول هي : $S=\{2;-1+i\sqrt{3};-1-i\sqrt{3}\}$

$a=2(2$ ، $b=-1+i\sqrt{3}$ ، $c=-1-i\sqrt{3}$

أ) تمثيل النقط A ، B **و** C **في المعلم** $(O;\vec{u},\vec{v})$

نلاحظ ان النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة مركزها O ونصف قطرها $r=2$



.

ب) اثبات أن $b'=2+\sqrt{3}+3i$**، وأن العددان** b' **و** c' **مترافقان.**

لدينا $B'=r'(B)$ ومنه $b'-a=-i(b-a)$ اي

$$b'=-i(-1+i\sqrt{3}-2)+2=2+\sqrt{3}+3i$$

ولدينا $C'=r(C)$ ومنه $c'-a=i(c-a)$ اي

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$ ومنه وبما ان f سالبة على $]0;+\infty[$ $((C_f))$ 3

$c'=i(-1-i\sqrt{3}-2)+2=2+\sqrt{3}-3i$ اذن $\overline{b'}=c'$

3)أ) أثبت أن اللاحقة n للنقطة N تساوي $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

N منتصف $[BB']$ اذن

$$n=\frac{b+b'}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)}{2}$$

ولكن $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})=\frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$

ومنه $n=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

لدينا $\frac{n-0}{c-0}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{R}$ ومنه النقط O ، N و C على استقامة واحدة

3)ب) أثبات أن $n+1=i(q+1)$ ثم استنتاج طبيعة المثلث MNQ .

لدينا $n+1=\frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})+2}{2}=\frac{3+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$

و $i(q+1)=i\,\frac{1+\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})+2}{2}=\frac{(3+\sqrt{3})i+3+\sqrt{3}}{2}$

ومنه $n+1=i(q+1)$ اذن $\frac{n-m}{q-m}=i$ اي $MN=QM$ و

$\left(\overrightarrow{MQ};\overrightarrow{MN}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث MNQ **قائم ومتساوي الساقين**

جـ) اثبات ان $MNPQ$ مربع .

$MNPQ$ مربع يكفي التاكد ان $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}$ لان المثلث قائم ومتساو الساقين

لدينا $p-q=2+\sqrt{3}-\frac{1+\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})}{2}=\frac{3+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$

$n-m=\frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}+1=\frac{3+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$

ينتج $p-q=n-m$ اي $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}$ وبالتالي $MNPQ$ مربع

التمرين الثاني : (04.5نقاط)

1) **أ) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) :** $8x-5y=3$

$8x-5y=3$ تكافئ $8x\equiv3[5]$ تكافئ $56x\equiv27[5]$ ومنه

$x\equiv1[5]$ اي $x=5k+1$ بالتعويض في المعادلة نجد $y=8k+1$

اذن الحلول هي الثنائيات $(5k+1;8k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ب) ليكن m عدد صحيح بحيث $m=8p+1$ و $m=5q+4$

ومنه $8p+1=5q+4$ اذن $8p-5q=3$ ومنه $(p;q)$ حل للمعادلة (E)

استنتاج أن $m\equiv9[40]$: بما ان $(p;q)$ حل للمعادلة (E) فان

$p=5k+1$ اذن $m=8(5k+1)+1$ اي ان $m=40k+9$

وهذا يعني ان $m\equiv9[40]$

جـ) تعيين أصغر عدد صحيح m أكبر من 200

لدينا $m>200$ معناه $40k+9>200$ معناه $k>\frac{191}{40}\simeq4.77$

ومنه $k=5$ معناه $\boxed{m=40\times5+9=209}$

2) ليكن n عدد طبيعي

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k فان $2^{3k}\equiv1[7]$

ب) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7 .

لدينا $1437\equiv2[7]$ ومنه $1437^{2016}\equiv2^{2016}[7]$ وبما ان

$2016=3\times672$ فان $2^{2016}\equiv1[7]$ ومنه $1437^{2016}\equiv1[7]$ اذن باقي القسمة الاقليدية هو 1

3) نعتبر العدد N حيث : $N=a\times10^3+b$ اي $N=\overline{a00b}^{10}$

التحقق أن $10^3\equiv-1[7]$

لدينا $10\equiv3[7]$ ومنه $10^3\equiv27[7]$ وبما ان $27\equiv-1[7]$ فان

$10^3\equiv-1[7]$

- استنتاج كل الأعداد المطلوبة N .

لدينا $10^3\equiv-1[7]$ **ومنه** $a10^3+b\equiv b-a[7]$ **ومنه**

$N\equiv b-a[7]$

ومنه $b-a=7k$ **وبما ان** $a\in\{1,2,3,4,5,7,6,8,9\}$ **و** $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ **ومنه الثنائيات** (a,b) **المطلوبة هي :** $(7,0);(1,8);(2,9),(7;7);(8,1);(9,2)$ **ينتج الأعداد المطلوبة هي**

$N\in\{7000;1008;2009;7007;8001;9002\}$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1): $A(1;1;1)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(1;2;0)$ و $D(-1;0;3)$

والمجموعة (Γ) المعادلة : $x^2-2(x+y+z-yz)+3=0$

أ)اثبات أن النقط A,B و C تقع على استقامة واحدة .

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;1;-1)$ أي ان $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$

أي الشعاعان مرتبطان ومنه النقط على استقامية

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقط A,B و C .

$\overrightarrow{AB}$ **شعاع توجيه لـ (Δ) ويشمل A ومنه:** $(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=1-t,\ t\in\mathbb{R}\\z=1+t\end{cases}$

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(P) على (Δ) معناه **شعاع توجيه** (Δ) **هو شعاع ناظمي لـ** (P)

ومنه معادلة (P) من الشكل : $-y+z+d=0$ وبما ان $D\in(P)$

فان $3+d=0$ ومنه $\boxed{(P):-y+z-3=0}$

د)حساب إحداثيات المسقط العمودي D' للنقطة D على المستقيم (Δ)

هي نقطة تقاطع (P) مع (Δ) اذن بتعويض قيم التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

في معادلة (P) نجد : $t-1+t+1-3=0$ اذن $\boxed{t=\frac{3}{2}}$ ومنه

$\boxed{D'\left(1;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)}$

2) **أ) تعيين إحداثيات النقطة M' بدلالة x,y و z**

M' نظيرة M بالنسبة (Δ) معناه : منتصف $[MM']$ ينتمي الى (Δ) و $(MM')\perp(\Delta)$

$(MM')\perp(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ معناه

$(x'-x)\cdot0+(y'-y)\cdot-1+(z'-z)\cdot1=0$

ومنه $-y'+y+z'-z=0\ldots\ldots(1)$

منتصف $[MM']$ ينتمي الى (Δ) معناه $\frac{x+x'}{2}=1$ و

$\frac{y+y'}{2}=1-t$ و $\frac{z+z'}{2}=1+t$ 4

لدينا $2^3\equiv 1[7]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي k فان $2^{3k}\equiv 1^k[7]$ اي $2^{3k}\equiv 1[7]$

من المعادلة الاولى نجد $\boxed{x'=2-x}$ وبجمع المعادلتين الاخيرتين والضرب في العدد 2 نجد $y+y'+z+z'=4$ وبجمع هذه المعادلة مع المعادلة (1) نجد $2y+2z'=4$ ينتج $\boxed{z'=2-y}$ بتعويض القيمة الاخيرة في المعادلة (1) نجد $\boxed{y'=2-z}$

استنتاج أنّ النقطة M' تنتمي أيضا إلى مجموعة النقط (Γ)

لدينا

$$x'^2-2(x'+y'+z'-y'z')+3=4+x^2-4x-$$
$$2(2-x+2-z+2-y-4+2z+2y-yz)+3$$
$$=7+x^2-2(2+x+y+z-yz)$$
$$=3+x^2-2(x+y+z-yz)=0 \qquad (M\in\Gamma)$$

ومنه $M'\in(\Gamma)$

ب) برهان أ نه اذا كان $M\in(\Gamma)$ فان $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AM'}$

لتكن $M(x;y;z)\in(\Gamma)$ ، لدينا

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=(x-1)(x'-1)+(y-1)(y'-1)+(z-1)(z'-1)$$
$$=(x-1)(1-x)+(y-1)(1-z)+(z-1)(1-y)$$
$$=2x-x^2-1+y+z-yz-1+z+y-yz-1$$
$$=-(x^2-2(x+y+z-yz+3)=0 \qquad (\text{لأن } M\in(\Gamma))$$

اذن $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ ومنه $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AM'}$

جـ)اثبات أن كل نقطة من المستقيم (AM) تنتمي إلى المجموعة (Γ)

لتكن $N(u;v;w)$ **نقطة من** (AM)

نعتبر التمثيل الوسيطي للمستقيم (AM)

$$\begin{cases}u=1+(x-1)t\\ v=1+(y-1)t \quad ,t\in\mathbb{R}\\ w=1+(z-1)t\end{cases}$$

هل $N\in(\Gamma)$؟

لدينا بعد النشر والتبسيط

$$u^2-2(u+v+w-uw)+3=$$
$$=t^2\left(3+x^2-2(x+y+z-yz)\right)=0$$

ومنه من اجل كل N من (AM) فان تنتمي الى المجموعة (Γ)

د)برهان أن $(P)\cap(\Gamma)=(c)$ مع (c) دائرة مركزها D'

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من $(P)\cap(\Gamma)$ معناه $\begin{cases}x^2-2(x+y+z-yz)+3=0\\ -y+z-3=0\end{cases}$

ومنه $z=y+3$ بالتعويض في معادلة (Γ) نجد

$$x^2-2x+2y-2z+2y(y+3)+3=0$$

ومنه $x^2-2x+2y-2z+2y^2+6y+3=0$

اذن $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-2z+(z-3)^2+3=0$

$$(x-1)^2+(y+2)^2-2z+z^2-6z+9-2=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2-16+7=0$$

اذن $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3^2$ اذن M نقطة من سطح كرة (S) مركزها $\Omega(1;-2;4)$ ونصف قطرها $R=3$

اذن M نقطة من $(S)\cap(P)$ ولدينا $d(\Omega;(P))=\frac{3\sqrt2}{2}<3$ اذن

$(S)\cap(P)=(c)$ مع (c) دائرة مركزها مسقط Ω على (p)

ونصف قطرها هو $r=\sqrt{R^2-d(\Omega;(P))^2}=\sqrt{9-\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt2}{2}$

لدينا $D'\in(P)$ (واضح) و $\overrightarrow{D'\Omega}\left(0;\frac{-3}{2};\frac{3}{2}\right)$ اي $\overrightarrow{D'\Omega}=\frac{3}{2}\overrightarrow{n_p}$

ومنه $(P)\cap(\Gamma)=(c)$ مع (c) **دائرة مركزها** D' **ونصف قطرها** $r=\frac{3\sqrt2}{2}$

التمرين الرابع: (04 نقاط)

1)أ- التحقق من أن $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}$

$$=1-\frac{e^x}{e^x+1}$$

ب- استنتاج أن الدالة f فردية

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $-x$ من $\mathbb{R}$ أي $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(-x)=1-\frac{1}{2}(-x)-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-2\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1}:$$
$$=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)=-f(x)$$

حساب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

2) أ)تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{-\left(e^x+1\right)^2+4e^x}{2\left(e^x+1\right)^2}=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

2) ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)\le 0$ وعليه الدالة f متناقصة تماماعلى $\mathbb{R}$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

2) جـ) استنتاج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}^+$ فان : $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$

لدينا : $f(x)\le 0$ أي $1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\le 0$ وعليه: $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

3)أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]$ وتفسر النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^x+1}\right]=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y=1-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

يكفي ان نتاكد ان D' هي مسقط Ω على (P) اي. $\begin{cases} D' \in (P) \\ \overrightarrow{D'\Omega} = k\overrightarrow{n_p} \end{cases}$ $\boxed{5}$

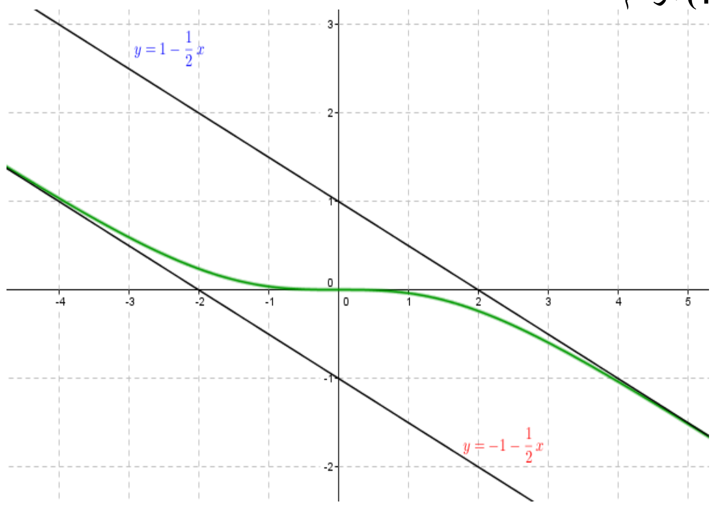
3) ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-1-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}+1+\frac{1}{2}x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[2-\frac{2}{e^{-x}+1}-2\right]=0$$

اذن المستقيم ذو المعادلة : $y=-1-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4) الرسم



5) أ) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^{x}+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{e^{-x}\left(e^{x}\right)}{e^{x}\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{1}{1+e^{x}}$

ب) حساب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$

لدينا :

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{1}{2}x-f(x)\right)dx=\int_0^{\lambda}\left(\frac{2}{e^{x}+1}\right)dx=$$

$$-2\int_0^{\lambda}\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx=-2\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_0^{\lambda}=-2\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)(ua)$$

لكن $ua=2\times 2=4cm^2$ ومنه $A(\lambda)=-8\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)cm^2$

حساب $A(\lambda)$ لما λ يؤول الى $+\infty$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[-8\ln\left(\frac{\cancel{e^{-\lambda}}^{0}+1}{2}\right)\right]=8\ln 2\ cm^2$$

II) 1) اثبات بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n>0$

نسمي P_n الخاصية: $u_n>0$, P_0 صحيحة لان $u_0=1>0$

نفرض ان P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي أي : $u_n>0$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي نبرهن أن : $u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ أي $e^{u_n}>1$ أي $e^{u_n}+1>2$ أي $\frac{1}{e^{u_n}+1}\le\frac{1}{2}$ أي

$\frac{2}{e^{u_n}+1}\le 1$ أي $1-\frac{2}{e^{u_n}+1}>0$ أي $u_{n+1}>0$

2)أ)التحقق من ان : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$:

لدينا مما سبق السؤال 2)جـ انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$ فان :

$1-\frac{2}{e^{x}+1}\le\frac{1}{2}x$ إذن: $1-\frac{2}{e^{u_n}+1}\le\frac{1}{2}u_n$ ومنه $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

ب) استنتاج ان المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

اي $u_{n+1}-u_n\le\frac{1}{2}u_n-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n\le-\frac{1}{2}u_n$ ولدينا : $u_n>0$

اذن $-\frac{1}{2}u_n<0$ وعليه $u_{n+1}-u_n\le 0$

ينتج ان المتتالية (u_n) متناقصة

3) تبيان ان : $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نستعمل البرهان بالتراجع

نسمي P_n الخاصية : $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

P_0 صحيحة لان $u_0=1\le\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

نفرض ان P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي أي $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي نبرهن أن : $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا مما سبق2)أ) : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ وفرضية التراجع

$u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ اذن $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي

حساب : $\lim_{n\to+\infty}u_n$

بما انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n>0$ و

$\lim_{n\to+\infty}u_n\le\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ اذن $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي. $\boxed{6}$	