# الموضوع الأول 20 نقطة

## التمرين الأول 04,5 نقاط

1/ أ / القراءة البيانية للنهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{4}x-2\right]=0$

5x0,25

2/ $f(-3)=1$ ، $f'(-3)=-1$ ،

$f(1,4)\approx1,2$ و $f'(1,4)=0$

4x0,25

$\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\frac{f(h-2)-f(-2)}{h}=+\infty$ و 0,25

الاستنتاج: $f$ غير قابلة للاشتقاق يسار $-2$

$\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\frac{f(h-2)-f(-2)}{h}=-\frac{1}{2}$ 0,25

$f$ تقبل الاشتقاق عن يمين $-2$

التفسير الهندسي: $(C_f)$ يقبل عن يسار $-2$ مماسا موازيا لمحور التراتيب، ويقبل عن يمين $-2$ مماسا ميله $-\frac{1}{2}$ 0,5

4 / $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{f(x)+1}{x+2}=+\infty$ ،

و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{f(x)+1}{x+2}=-\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{f(x)+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3x0,25

5 / جدول التغيّرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1,4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ | | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1,2$ | ↘ | $0$ |

0,5

## التمرين الثاني 08 نقاط

I) اتجاه تغير الدالة $g$:النهايات:

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 0,5

$g$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها

المشتقة: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ 0,5

$g$ متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ 0,25

**جدول التغيّرات:**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

بما أن 3 قيمة حدّية صغرى لـ $g$ على $]0;+\infty[$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي

موجب تماما: $g(x)\geq3$ أي: $g(x)>0$ 0,25

II) 1 / $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ و 0,25

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $(\mathscr{C})$ يقبل محور التراتيب 0,25

مقاربا معادلته $x=0$ والمستقيم الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$ لأنّ: 0,25 0,25

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=0$

دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(\Delta)$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$(\mathscr{C})$ تحت $(\Delta)$ من أجل كل $x$ من المجال $]0;1[$ ، $(\mathscr{C})$ فوق $(\Delta)$ من أجل كل $x$ من المجال $]1;+\infty[$ . 0,5

3/ $f$ دالة تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها

المشتقة: $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$ 0,5

$f$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ 0,25

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

4 / بما أن الدالة $f$ مستمرّة ورتيبة (متزايدة تماما ) على $]0;+\infty[$ و $]0;+\infty[$

$\in ]0.7;0.8[$ و $f\left(0,7\right)\simeq -0.16$ و $f\left(0,8\right)\simeq 0.12$

$f\left(0,7\right)\times f\left(0,8\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0.7;0.8[$ . ومنه المنحني ( $\mathscr{C}$ ) يقطع محور الفواصل عند نقطة فاصلتها $\alpha$ حيث: $0,7<\alpha<0,8$ .

0,5

5/ $f'$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $f''(x)=\dfrac{-3+2\ln x}{x^2}$

$-3+2\ln x=0$ أي: $x=e^{\frac{3}{2}}$

| $x$ | $0$ | $e^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

المنحني ( $\mathscr{C}$ ) نقطة انعطاف احداثياها $\left(e^{\frac{3}{2}};\dfrac{e^3-3}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$

0,25

0,25

6 / معادلة المماس ( T ) للمنحني ( $\mathscr{C}$ ) الذي يوازي ( $\Delta$ ) : $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$

$f'(x_0)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}=\dfrac{1}{2}$

$1-\ln x_0=0$ أي $x=e$

$(T):y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{e}$

0,5

7 / المنحني ( $\mathscr{C}$ ) يقبل مماسا يشمل المبدأ معادلته $y=f'(x_0)x$ في نقطة التماس :

$f(x_0)=f'(x_0)x_0$

$\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0}$ أي: $x_0=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

0,25

9 / **المناقشة البيانية:**

$mx=\ln x$

$m=\dfrac{\ln x}{x}$

$\dfrac{x}{2}+m=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln x}{x}$

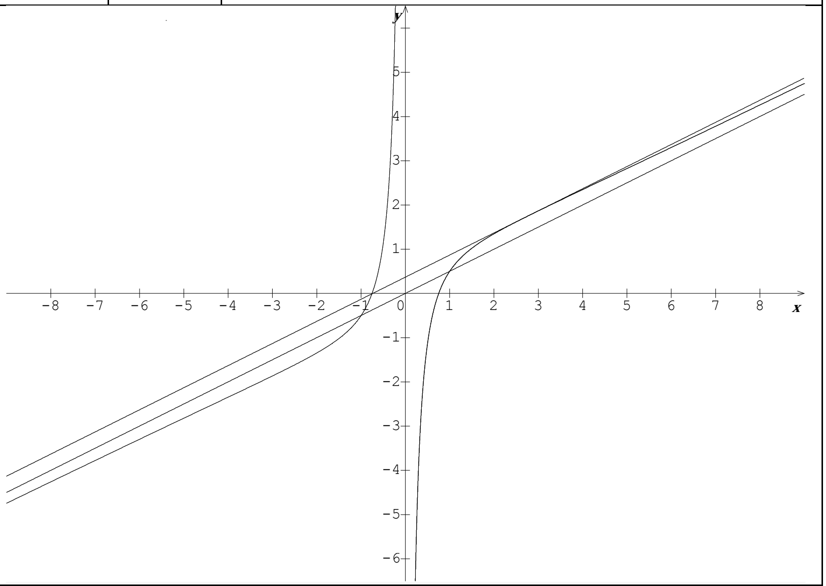
$f(x)=\dfrac{x}{2}+m$

0,5

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع ( $\mathscr{C}$ )مع المستقيم الذي معادلته:

$y=\dfrac{x}{2}+m$

- $m<0$ للمعادلة حل وحيد.
- $0<m<\dfrac{1}{e}$ للمعادلة حلان متمايزان.
- $m=\dfrac{1}{e}$ للمعادلة حل مضاعف.
- $m>\dfrac{1}{e}$ ليس للمعادلة حل.



0,75

0,5

10 / الاثبات أن $h$ فردية: بما أن $h$ معرّفة على $\mathbb{R}^*$ وهي متناظرة بالنسبة للصفر وبما أن: $h(-x)=-h(x)$ فإن الدالة $h$ فردية.

0,25

*الرسم:* من أجل $x>0$ ، ( $\mathscr{C}'$ ) منطبق على ( $\mathscr{C}$ ) ومن أجل $x<0$ ، ( $\mathscr{C}'$ ) متناظر مع ( $\mathscr{C}$ ) بالنسبة إلى المبدأ انشاء ( $\mathscr{C}'$ )

0,5

## التمرين الثالث **07,5 نقاط**

**الجزء الأول:** 1 / $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

0,5

2 / $g$ دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

0,5

$g'(x)=2e^x+2$ ، $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ جدول التغيّرات:

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

0,5

3/ بما أن الدالة $g$ مستمرّة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ (0,5)

$g(0,940) \simeq -0,00003$ و $g(0,941) \simeq 0,007$

وبما أن: $g(0,941) \times g(0,940) < 0$

وحسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإن المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ بحيث:

$0,940 < \alpha < 0,941$

4 / إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ (0,25)

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

الجزء الثاني: (0,75)

1 / دراسة إشارة $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-5$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $1-e^{(-x)}$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

2 / $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

$f$ دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: (0,25)

$f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

إشارة الدالة المشتقة من إشارة $g(x)$ ،

$f$ متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما

على $[\alpha;+\infty[$ جدول التغيّرات: (0,5)

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5 / أ /الاثبات أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$ (0,5)

لدينا: من الجزء الأول: $e^{\alpha} = \dfrac{7-2\alpha}{2}$

أي: $e^{-\alpha} = \dfrac{2}{7-2\alpha}$ أي: $-e^{-\alpha} = \dfrac{2}{2\alpha-7}$

$$f(\alpha) = (2\alpha-5)\left(1+\frac{2}{2\alpha-7}\right)$$

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

ب / دراسة اتجاه تغير الدالة $k$: (0,5+0,25)

$k$ تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ ودالتها

المشتقة: $k'(x) = \dfrac{2(2x-9)(2x-5)}{(2x-7)^2}$

$k$ متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

$k(0,940) < k(\alpha) < k(0,941)$

$k(0,940) \simeq -1,90$

$k(0,941) \simeq -1,98$

هذا هو حصر $k(\alpha)$

$-1,90 < k(\alpha) < -1,98$

6 /أ / الإثبات أنّ المستقيم ( D ) الذي معادلته $y = 2x-5$ مقارب للمنحني بجوار $+\infty$. (0,25)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x+5\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}(5-2x)\right] = 0$$

ب / دراسة وضعية للمنحني $(C_f)$ والمستقيم ( D ) (0,5)

$f(x) - y = e^{-x}(5-2x)$

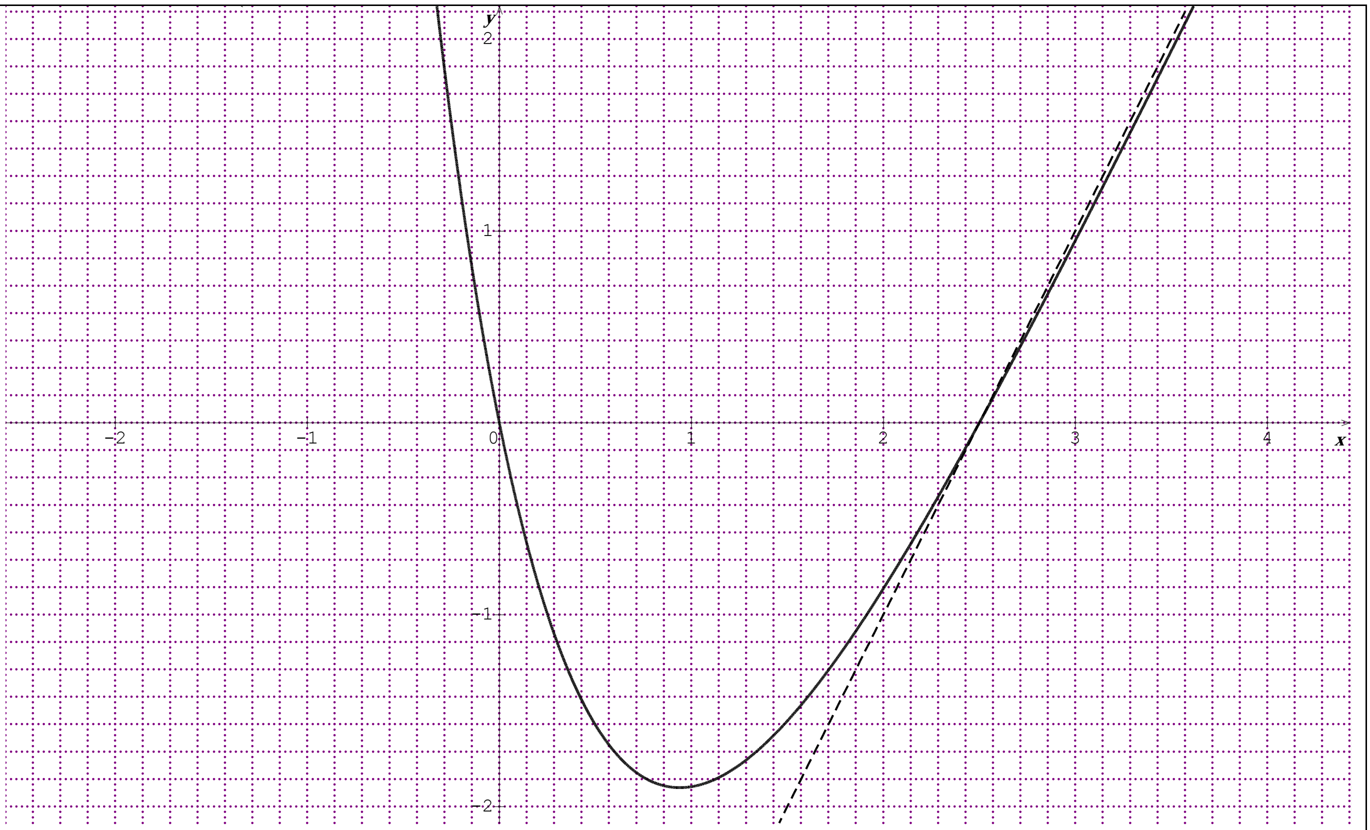
| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | 0 | $-$ |

$(C_f)$ فوق ( D ) من أجل كل $x$ من $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ و $(C_f)$ تحت ( D ) من أجل كل $x$ من $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ يقطع $(C_f)$ ( D ) من أجل كل $\frac{5}{2}$


أستاذ المادة:

أبو القاسم بن محمد علواني

البريد الإلكتروني الجديد: aboumedalou@yahoo.fr

| | |
|---|---|
| 0,75 |  |




أستاذ المادة :

أبو القاسم بن محمد علواني

البريد الإلكتروني الجديد: aboumedalou@yahoo.fr