الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية وهران	ثانوية عين البيضاء الجديدة
الشعبة : ثالثة تقني رياضيات	المدة : ســـاعـــتـــان

التصحيح النموذجي لإختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول : لدينا النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$

.1 حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$. ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4+4-8=0$ أي $(AB)\perp(AC)$. إذن: ABC مثلث قائم في A .

.2 أ) • G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$ ومنه $G(0;0;-2)$.

• I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$. ومنه $I(2;1;0)$

ب) لدينا $\overrightarrow{GI}(2;1;2)$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GI}$. ومنه الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع

.3 أ) $\overrightarrow{AG}(-1;1;-4)$ ، $\overrightarrow{BG}(-3;0;-6)$ و $\overrightarrow{CG}(-3;-3;0)$. ومنه $AG^2=18$ ، $BG^2=45$ و $CG^2=18$.

ب) $3MA^2-2MB^2+MC^2=18\ ....(2)$

باستعمال علاقة شال والمرجح G (2) تصبح : $3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=18$

أي $2MG^2+3GA^2-2GB^2+GC^2=18$ لأن $2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$ إذن : (2) تكافئ $2MG^2=36$.

وأخيرا مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق(2) هي سطح كرة مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

.4 (S) سطح الكرة الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

أ) $M(x;y;z)\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$.

بما أن $\overrightarrow{MG}(-x;-y;-2-z)$ و $\vec{V}(-6;-6;0)$. فإن $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ يكافئ $6x+6y=-18$

إذن المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $x+y+3=0$.

ب) المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد (P) ، أي $\vec{n}(1;1;0)$ الشعاع الناظمي لـ (P) هو شعاع توجيه لـ (Δ) أي نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم (Δ).

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases}x=t\\y=t\\z-2\end{cases}$ مع t عدد حقيقي

• الاستنتاج : $\{H\}=(P)\cap(\Delta)$. ومنه $t+t+3=0$ أي $t=-\dfrac{3}{2}$. وأخيرا : $H(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};-2)$.

جـ) تعيين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

• $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ $d(G,(P))=GH=$ ومنه $(P)\cap(S)$ هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-HG^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$.

.5 المستقيم (D) معرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$. مع k عدد حقيقي.

• $(D)\subset(P)$ لأن $(-1-2k)+(-2+2k)+3=0$

• (D) يمر بالنقطة $E(-1;-2;0)$ ويوازي $\vec{u}(-2;2;-8)$ لدينا $\overrightarrow{AE}(-2;-1;-2)$ و $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

أي أن E تنتمي إلى (ABC) و $\vec{u}$ شعاع من (ABC) .

إذن : $(D)\subset(ABC)$. ($\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}$) وأخيرا: المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان في (D) .

التمرين الثاني :

1- في المستوي المركب $z_A = 1+i$, $z_B = -1+3i$, $z_C = -3+i$

أ- علّم النقط A ، B ، C

ب- h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C. عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز التحاكي h:

h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C عبارته المركبة من الشكل $z' = 2z+b$ و منه

$$\begin{cases} z_C = 2z_A + b \\ z_\omega = 2z_\omega + b \end{cases}$$ وبالتالي $z_\omega - z_C = 2z_\omega - 2z_A$ و منه

$z_\omega = 2z_A - z_C = 2(1+i)+3-i = 5+i$ و منه $z_\omega = 5+i$

2- أ- نضع $L = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC :

$$L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i+1-3i}{-3+i+1-3i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{i(-2i-2)}{-2-2i} = i$$ و منه $L = i$

$|L| = |i| = 1$ و $Arg(L) = Arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

- **استنتاج طبيعة المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين**

ب- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث L^n تخيليا صرفا:

لدينا $L = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ و منه $L^n = \cos\dfrac{n\pi}{2} + i\sin\dfrac{n\pi}{2}$

L^n تخيليا صرفا معناه $\cos\dfrac{n\pi}{2} = 0$ تكافئ $\dfrac{n\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ تكافئ $n = 2k+1$

3- لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

أ-نبيّن أن D مرجح النقط A ، B ، C مرفقة بمعاملات حقيقية يُطلب تعيينها :

لدينا $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ و منه $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ و منه

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ أي D مرجح $(A;1);(B;-1);(C;1)$

ب- تعيين z_D لاحقة D و z_I لاحقة I

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = -1-i \quad ، \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = -2+2i$$

ج- تعيين وانشاء المجموعة (φ) للنقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

لدينا $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ و $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ و منه $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|$

أي $MD = MI$ وبالتالي المجموعة (φ) هي مستقيم محور القطعة $[DI]$

4- نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 1+5i$

أ- كتابة على الشّكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_I - z_A}{z_D - z_E}$ ثم استنتاج أن $DE = 2AI$ و (DE) يعامد (AI)

$\dfrac{z_I - z_A}{z_D - z_E} = -\dfrac{1}{2}i$ **و منه** $\left|\dfrac{z_I - z_A}{z_D - z_E}\right| = \left|-\dfrac{1}{2}i\right| = \dfrac{1}{2}$ وبالتالي $\dfrac{|z_I - z_A|}{|z_D - z_E|} = \dfrac{AI}{ED} = \dfrac{1}{2}$ وبالتالي

$$\frac{|z_I - z_A|}{|z_D - z_E|} = ED = 2AI$$

أي $\arg\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}=\arg(-\frac{1}{2}i)=\frac{\pi}{2}$ أي (DE) يعامد (AI)

ب- تعيين مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحول D إلى I و يحول E إلى A:

$\begin{cases} S(D)=I \\ S(E)=A \end{cases}$ و منه $\begin{cases} z_I=az_D+b \\ z_A=az_E+b \end{cases}$ و منه $a=\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}$ و بالتالي $a=-\frac{1}{2}i$

و لدينا $z_A=-\frac{1}{2}z_E+b$ أي $b=z_A-\frac{1}{2}z_E=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i$ و منه $z_\omega=\frac{b}{1-a}=-\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i$

ج- صورة الدّائرة التّي مركزها D وتشمل E بالتّشابه المباشر S: هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $r=\frac{1}{2}DE$

التمرين الثالث :

I- • الدالة $x\mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx - ln1}{x-1}=\frac{1}{x}=1$ أي $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=1$.

• نضع $X=x-1$ ومنه

$\lim\limits_{X\to 0}\frac{ln(X+1)}{X}=1$ = $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}$.

II- f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1. أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ،

$\ln\left(x+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}\right)=\ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)$ ومنه $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$.

($\sqrt{x^2}=|x|$ ، $\ln ab=\ln a+\ln b$ مع $a>0$ ، $b>0$)

ب) من أجل $x\geq 1$ ، $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}$ أي $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$.

ج) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 بالفعل

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{x-1}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{}\times\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ $(\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0)$ إذن : المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور

الترتيب عند النقطة التي فاصلتها 1.

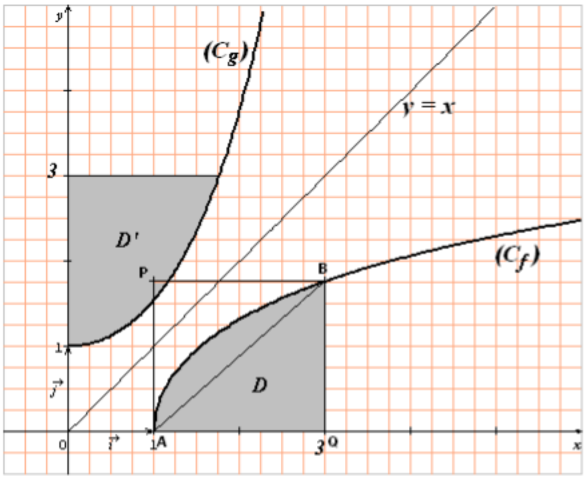
2. أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ln(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$.

ب) f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$.

•جدول تغير الدالة f.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

جـ) المنحنى (C_f).



-III g الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^{x}}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

.1 من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ،لدينا $g(x)-1=\dfrac{e^{2x}-2e^{x}+1}{2e^{x}}=\dfrac{(e^{x}-1)^2}{2e^{x}}\geq 0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ، $g(x)\geq 1$.

.2 أ) $g\circ f(x)=g(f(x))$ ومنه $g\circ f(x)=\dfrac{e^{2f(x)}+1}{2e^{f(x)}}=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})}$

أي $g\circ f(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})}=x$.

• $M(x;y)$ نقطة من (C_f) يعني أن $y=f(x)$ ، وبما $g(f(x))=x$ أن فإن $M'(f(x);x)$ نقطة من (C_g).

ب) بما أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$. (المنصف الأول).