

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ،

نعتبر النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب : $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -2 - 4i$ ، $z_C = 2 - 2i$

1. أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على شكل أسي .

2. إستنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C

3. نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات الاحقة z إلى النقطة M' ذات الاحقة z' حيث :

$$z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$$

• عيّن صورة النقطة A بواسطة التحويل S ثم أعط طبيعته و عناصره المميزة.

4. نسمي z_1 لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحويل S و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم B_{n+1} لاحقتها z_{n+1} هي صورة

B_n التي لاحقتها z_n بالتحويل S و نعتبر العدد المركب L_n حيث :

$$L_n = \frac{z_n - z_A}{z_B - z_A}$$

و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعرف المتتاليتان العدديتين (U_n) و (V_n) بالشكل :

$$U_n = |L_n| \text{ و } V_n = \arg(L_n)$$

(أ) أكتب الطول AB_{n+1} بدلالة AB_n ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

(ب) عيّن طبيعة المتتالية (V_n) ، ثم اكتب كل من U_n و V_n بدلالة n

(ت) إبتداء من أي رتبة n تكون النقطة B_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه A و نصف قطره 10^{-2}

(ث) عيّن الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقط A ، B_1 و B_n على استقامة واحدة .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

n عدد طبيعي حيث $n \geq 6$

نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث $A = 2310^n$ و $B = 252^n$ في التعداد ذو الاساس n

نضع : $PGCD(A; B) = d_n$

1. بيّن أن $(2n+1)$ يقسم A و $(2n+1)$ يقسم B

2. ناقش حسب شغية العدد n القيم الممكنة لـ : $PGCD(n^2 + n; n + 2)$

3. بيّن أن $d_n \in \{2(2n+1); (2n+1)\}$

4. نأخذ $n = 6$ ، حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $Ax + By = -26$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

لتكن النقط $A(6,0,0)$ ، $B(0,6,0)$ ، $C(0,0,6)$ و $D(-2,-2,-2)$.
 (1) أ) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) بين أن $x + y + z - 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

ج) أثبت أن المستقيم (OD) يقطع المستوي (ABC) في النقطة $H(2,2,2)$.

د) تحقق أن النقطة H متساوية البعد عن النقط A ، B و C .
 (2) ليكن (P) المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب) أثبت أن المستقيم (OD) يقطع المستوي (P) في نقطة Ω يطلب تعيين إحداثياتها .

(3) ليكن (S) سطح الكرة ذات المركز Ω و نصف القطر $3\sqrt{3}$.

أ) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) .

ب) تحقق أن سطح الكرة (S) يشمل النقط A ، B ، C و D

ج) إستنتج تقاطع سطح الكرة (S) مع المستوي (ABC) وأعط عناصره المميزة.

التمرين الرابع : : (06 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x)$$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2- أدرس إتجاه تغيرات الدالة g

3- إستنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

(II) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (وحدة الطول هي $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

(3) إستنتج تغيرات الدالة f على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أرسم المنحني (Γ)

(III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$$h(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$h'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$$

ب- بإستعمال الكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

ج- أحسب المساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحني (Γ) ومحور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين : $x = \lambda$ و $x = 0$

(حيث λ عدد حقيقي موجب تماما)

د- أحسب : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

(I) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بحددها الاول u_0 عدد طبيعي ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 10u_n + 9$ - نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 1$ ،
 (أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 10^n(u_0 + 1) - 1$

(II) 1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $61x - 39y = 38$. (لاحظ أن $(23, 35)$ حل خاص للمعادلة)

2. أ- بيّن أن $u_{1982} \equiv u_0 [33]$

ب- بيّن أن $u_{1982} \equiv (39u_0 + 38)[61]$ (لاحظ أن $10^{60} \equiv 1[61]$)

ج - استنتج أن $u_{1982} \equiv 0[61]$ يكافئ $u_0 \equiv 35[61]$

3. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $33x' - 61y' = 35$: (لاحظ أن $(14, 7)$ حل خاص لها)

4. علما أن $2013 = 33 \times 61$ عين أصغر قيمة لـ u_0 التي من أجلها يكون u_{1982} قابلا للقسمة على 2013

(III) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $10^{7n} \equiv 10^n [70]$

ب- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $10^{7^n} \equiv 10[70]$

ج- نضع: $u_0 = 462$ انشر العدد 2013 ، وفق الأساس 7 ، ثم عين باقي قسمة v_{2013} على 70

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

(P) و (Q) المستويين الذين معادلتيهما على الترتيب: $x + 2y + z - 1 = 0$ و $x - z + 1 = 0$

(1) بين أن (P) و (Q) مستويين متقاطعين . هل هما متعامدان ؟

(2) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

(3) (π) المستوي ذي المعادلة: $x - y + z = 0$.

- بين أن (π) عمودي على المستويين (P) و (Q).

(4) أعط إحداثيات نقطة تقاطع المستويات الثلاثة (P)، (Q) و (π) .

(5) أ) تحقق أن النقطة $A(3, -3, 4)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ب) احسب بعد النقطة A عن المستوي (π) .

(6) أعط معادلة لسطح الكرة (S) ذات المركز A و المماسة للمستوي (π) .

(7) ماهي قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها يقطع (S) المستويات ذات المعادلات: $x + y + z + \alpha = 0$ وفق دائرة (نصف

قطرها غير معدوم) ؟ أعط إذن قيمة نصف القطر بدلالة α .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(4z^2 - a^2)(2\bar{z} + ia\sqrt{3}) = 0$ ، حيث $a \in \mathbb{R}_+^*$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواقعها على الترتيب:

$$z_C = \frac{a}{2} , z_B = -\frac{a}{2} , z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} ai$$

- (أ) أكتب على الشكل الآسي العدد : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_A}$.
- (ب) استنتج زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B و يحول C إلى A .
- (ج) تحقق أن مركز الدوران R ينطبق على مركز ثقل المثلث ABC .
2. نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.
- أ. تحقق أن النقط A, B, C تنتمي إلى المجموعة (Γ) .
- ب. عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2}$
1. عين نهايات g عند أطراف مجموعة تعريفها .
2. بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(1+x^2)^2}$ ، (حيث g' هي الدالة المشتقة للدالة g)
3. أدرس حسب قيم x إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها .
4. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$ ، تحقق أن : $0,5 < \alpha < 0,6$.
5. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، الوحدة $5cm$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ (يمكن وضع $t = \frac{1}{x^2}$) .
- ب- استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا .
- ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. ماذا تستنتج؟
2. أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 .
- ب- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)
- ت- حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- ج- بين أن $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 + 1}$ ، ثم استنتج حصارا لـ $f(\alpha)$
3. ارسم المنحني (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$

(أ) بين أن h دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$

(ب) أحسب العدد I حيث : $I = \int_1^2 f(x) dx$