الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية الجزائر الشرق — **ثانوية:رابح بيطاط**

امتحان بكالوريا بيضاء — **دورة :ماي 2016**

الشعبة:رياضيات — **المدة:4ساعات و 30 د**

إحتبار في مادة الرياضيات

على المتر شح آن يجيب على أحد الموضوعين على الخيار :

الموضوع الأول

التمرين الأول : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

نعتبر العددين المركبين $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ و $z_0=6+6i$ حيث $i=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ و النقطة A_0 صورة العدد المركب z_0.

نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$ النقطة A_n صورة العدد المركب z_n حيث $z_n=a^n z_0$.

الجزء الأول : 1- أ-عبر عن z_1 و a^2 باستعمال الشكل الجبري ثم اكتب z_1 على الشكل ألأسي .

ب- بين أن $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2- عبر عن z_3 ثم z_7 بدلالة z_1 و a^2 . استنتج الشكل الآسي z_3 و z_7 .

3- علم النقط A_0 و A_1 و A_3 و A_7 صور الأعداد z_0 و z_1 و z_3 و z_7 على الترتيب

الجزء الثاني : نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|z_n|=r_n$.

1- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $r_n=12(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$. استنتج أن (r_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2- احسب $\lim_{n\to+\infty} r_n$. فسر هندسيا النتيجة.

3- عين أصغر عدد طبيعي p حيث $OA_p \le 10^{-3}$. أعط قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA_p})$.

التمرين الثاني : الفضـاء منسـوب إلى المعلم المتعـامد و المتـجانس $(O.\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.نعتبر النقط $A(1,0,2)$ و $B(1,1,4)$ و $C(-1,1,1)$.

1. أثبت أن النقط A,B,C ليست في استقامية , اكتب عندئذ معادلة المستوي (ABC) .
2. نعتبر المستويين $(p_1): x-2y+6z=0$ و $(p_2): 2x+y+2z+1=0$.
   - بين أن (p_1) و (p_2) يتقاطعان في مستقيم (Δ) يطلب إعطاء تمثيل وسيطي له.
   - أوجد قيسا للزاوية α المحصورة بين المستويين (p_1) و (p_2).
   - ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المستوي (ABC) و حدد عندئذ المسافة بين (Δ) و (ABC).
3. أ- برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء : $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2-IM^2$.

   ب-استنتج المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=0$

   ج-عين الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة $(E)\cap(p_1)$.

التمرين الثالث: نعتبر المعادلة $56x-81y=6$..............(1) حيث x و y مجهولان صحيحان .

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .
2. عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث $xy\equiv 0[5]$.

3. ادرس باقي القسمة للعدد 4^n على 7 حيث $n\in\mathbb{N}$.
4. عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث $4^x+2\times4^y+3\equiv O[7]$.
5. عين رقم أحاد العدد $4^x+2\times4^y+3$ حيث (x,y) حل للمعادلة (1).
6. عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{\alpha670}$ في النظام ذي الأساس 9. ثم اكتب n في النظام ذي الأساس 10.

التمرين الرابع :

الجزء الأول : f دالة عددية معرفة على $D=]0,+\infty[$ حيث : $f(x)=-\ln x-2(-1+x\sqrt{x})$ حيث $\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري.

1. اثبت أن f متناقصة تماما على D .
2. احسب $f(1)$ ثم عين إشارة $f(x)$ على D .
3. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث : $g(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$ و (c) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ و $\|\vec{i}\|=2cm$.

أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

ب-أثبت أن من أجل كل x من D فإن $g'(x)=\dfrac{f(x)}{2x\sqrt{x}}$. استنتج إتجاه تغير الدالة g .

ج- احسب $g(e)$ و $g(3)$ و $g(4)$.

د-بين أن (c) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له و وضعية (c) بالنسبة له .

هـ- ارسم (Δ) و (c).

4. أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ على D .

-استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة g على D .

ب- احسب بـ cm^2 المساحة $A(\alpha)$ للحيز المحدد بـ (c) و محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=\alpha$ حيث α عدد حقيقي يحقق $0<\alpha<1$.

ج- احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$.فسر بيانيا هذه النتيجة .

الجزء الثاني : نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بالشكل
$$\begin{cases}u_0=\dfrac{3}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}}+1\end{cases}$$

1. برهن أنه من أجل كل x من $[1,2]$ فإن $0\le\dfrac{\ln n}{n}\le1$
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1\le u_n\le2$
3. بملاحظة أن $u_{n+1}=g(u_n)+u_n$ عين إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

I. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) نعتبر النقط A,B,C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}$ على الترتيب .

1. اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي .
2. عام النقط A,B,C ثم عين طبيعة الرباعي $OABC$.
3. عين (D) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z|=|z-2|$.

II. φ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ حيث $z\neq z_A$ النقطة $M'(z')$ حيث $z'=-\dfrac{4}{z-2}$.

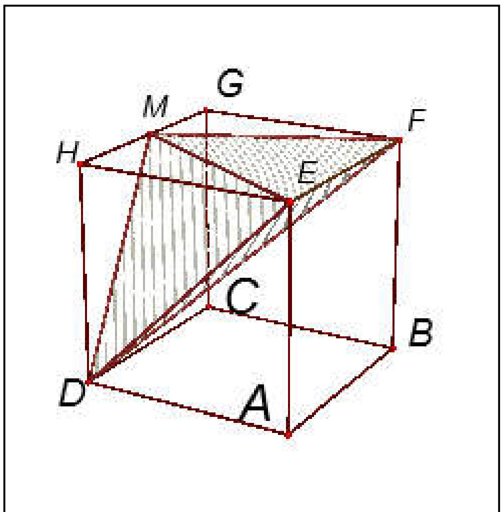
1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z'=z$ ثم استنتج صورتي النقطتين B و C بالتحويل φ .
2. لتكن النقطة G مركز ثقل المثلث OAB. عين لاحقة G' صورة G بالتحويل φ .
3. أ-علما أن $|z|^2=z\bar{z}$ بين أنه من أجل كل عددين مركبين z_1 و z_2 لدينا $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ و أنه من أجل كل عدد مركب z غير معدوم فإن $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq z_A$ فإن $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

ج- استنتج أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (D) فإن M' نمسح دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

التمرين الثاني :

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1. ينسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.



I. أ-عين إحداثيات K مرجح الجملة $\{(D,1),(F,2)\}$.

ب- بين أن المستقيمين (EK) و (AF) متعامدان .

ج- احسب المسافة EK .

II. نعتبر M نقطة متغيرة من $[HG]$. نضع $HM=m$.

أ- بين أنه من أجل كل $m\in[0,1]$ فإن حجم رباعي الوجوه $EMFD$ مستقل عن m.

ب-بين أن معادلة المستوي (MFD) هي :

$(m-1)x+y-mz=0$.

ج- نرمز بـ d_m للمسافة بين E و المستوي (MFD) .

- احسب d_m.
- حدد وضعية M على القطعة $[HG]$ حتى تكون d_m أعظمية .
- استنتج أنه في هذه الوضعية تكون K هي المسقط العمودي لـ E على المستوي (MFD).

التمرين الثالث :

I. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$.

اجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2}{n}$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$ فإن: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

3. من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$ فإن: $u_n \leq (\frac{1}{2})^{n-3} \times u_3$.

4. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = n!(u_n + 3)$

أ- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \equiv 0[6]$.

ب- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \equiv 0[n]$.

II. صندوق به 9كرات مسجل عليها قيم الحدود u_0, u_1, u_2 كما يلي : 4كرات مسجل عليها رقم الحد u_0 3 كرات مسجل عليها رقم الحد u_1 2كرتان مسجل عليهما رقم الحد u_2.

نسحب من هذا الصندوق 3 كرات في أن واحد .

1. احتمال الحصول على 3 كرات تحمل الرقم 2 هو $\frac{5}{42}$.

2. احتمال الحصول على 3 كرات تحمل نفس الرقم هو $\frac{9}{42}$.

التمرين الرابع:

الجزء الأول : نعتبر المعادلة (E).................$y' + y = x - 1$

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب التكامل $\int_1^x e^t (t-1)dt$

2. أ- z دالة لمتغير حقيقي x قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. نضع $f(x) = z(x)e^{-x}$.

- بين أن f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $z'(x) = e^x(x-1)$.

ب- باستعمال السؤال 1 عين كل الدوال z التي تحقق من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $z'(x) = e^x(x-1)$.

3. أ- استنتج حلول المعادلة (E).

ب- عين الحل الخاص للمعادلة (E) الذي ينعدم عند 1 .

الجزء الثاني : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$

و (c)نمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f

ب- حدد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. أ- بين أن المستقيم ذو المعادلة $(\Delta) : y = x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (c) بجوار $+\infty$.

- حدد وضعية (c) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3. انشئ (c) و (Δ) على المجال $]-1, +\infty[$.

الجزء الثالث: نعتبر x_0 عدد حقيقي موجب تماما.

1. (Γ)الحيز من المستوي المحدد بـ (c) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = x_0$.

- عبر عن s_1مساحة (Γ) بدلالة x_0 .

2. نعتبر g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $g(x) = e^{1-x}$.

- أعط تفسيرا هندسيا للتكامل $\int_0^{x_0} (f(x) - (x-2))dx$ باستعمال منحنى g .

3. نعتبر النقطتين $A(x_0, 0)$ و $B(x_0, g(x_0))$ و (T) مماس منحنى g عند النقطة B .

- عني إحداثيات النقطة Cتقاطع (T) و محور الفواصل .

4. احسب المساحة s_2 للمثلث ABC و تحقق أن $s_1 + 2s_2 = e$.