امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1$، $z_B = 3+4i$، $z_C = 2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و $z_D = -2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$

1) أ) بين ان صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة D.

ب) استنتج أن النقطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

2) لتكن النقطة F صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة B ونسبته $\frac{3}{2}$

أ) بين ان لاحقة النقطة F هي $z_F = -2i$.

ب) بين ان F هي منتصف القطعة $[CD]$.

ج) بين ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ ثم اكتبه على الشكل الأســي.

د) استنتج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

هـ) أنشئ النقط A، B، F، C و D.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) احسب u_2 ثم تحقق ان (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n.

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

- بين ان المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n.

4) أ) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

ب) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n، $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

ج) احسب، $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$

1) بين ان النقط A ، B و C تحدد مستويا.

2) بين ان : $x+y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) لتكن $D(2;0;2)$ و $E(-4;6;2)$ نقطتين من الفضاء. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE).

4) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x(x-2)-y(2-y)+z(z-8)+14=0$

ا) بين ان (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها R

ب) بين ان المستقيم (DE) هو مماس لسطح الكرة (S) في نقطة H يطلب تعيين احداثياتها .

ج) بين ان المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين نصف قطرها و مركزها .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\frac{1}{x}-1-2\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.

2. احسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : إذا كان $x\in]0;+\infty[$ ، $f(x)=x-x^2\ln x$ و $f(0)=0$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$

1. أ. بين أن الدالة f مستمرة عند 0 على اليمين.

ب. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$ ، فسر النتيجة بيانيا.

جـ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=x.g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.7<\alpha<1.8$.

4. ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

5. مثل المنحني (C) و المستقيم (Δ) .

6. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $I_\alpha=\int_1^\alpha[x-f(x)]dx$. فسر هندسيا العدد I_α.

ب. تحقق أن $I_\alpha=(-\alpha^3+3\alpha^2+1)cm^2$

III. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0=\frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1}=f(U_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<U_n<1$.

2. بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ، استنتج أن (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستويين (P) ، (P') معادلة ديكارتية لكل منهما على الترتيب : $x+y+z=0$ و $2x+3y+z-4=0$.

1) بين أن المستويين (P)، (P') يتقاطعان وفق المستقيم (D) تمثيل وسيطي له هو : $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

2) نعتبر العدد الحقيقي λ .

ليكن (P_λ) حزمة من المستويات المعرفة بـ : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

أ)تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ ، شعاع ناظمي للمستويات (P_λ) .

ب) عين قيمة العدد الحقيقي λ حتى يكون المستويان (P)، (P_λ) منطبقين.

جـ) هل توجد قيمة للعدد الحقيقي λ ، حتى يكون المستويان (P)، (P_λ) متعامدين؟

3)بين أن كل المستويات (P_λ) ، لها مستقيم مشترك (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له .

4)أ) بين أن المستويين (P)، (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D') ، يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له .

ب) بين أن المستقيمين (D) ، (D') منطبقان.

5) $A(1;1;1)$ نقطة من الفضاء، احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_{n+1}=1+\sqrt{U_n-1} \end{cases}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<U_n<2$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}-U_n=\dfrac{-U_n{}^2+3U_n-2}{\sqrt{U_n-1}+U_n-1}$.

ـ استنتج أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

جـ) برر لماذا المتتالية (U_n) متقاربة ؟

2) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $V_n=\ln(U_n-1)$.

أ)بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$،يطلب تعيين حدها الأول.

ب) اكتب كلا من V_n ، U_n بدلالة n، عين $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n=U_n-1$.

احسب بدلالة n الجداء π_n حيث : $\pi_n=W_0\times W_1\times.....\times W_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z+1)^2+\left[2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2=0$

2)نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1+2i$ ، $z_B=i\left(2-\sqrt{3}\right)$ و $z_C=\overline{\sqrt{5}-2i}$

ا) احسب $|z_C|$ و $|z_B - z_A|$ ثم أنشئ النقط A، B و C.

ب) بين ان C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

3) أ) عين $z_{C'}$ لاحقة C' نظيرة C بالنسبة الى A.

ب) علما ان الرباعي $BC'B'C$ متوازي اضلاع. بين ان $z_{B'} = -2 + \left(2+\sqrt{3}\right)i$

ج) بين ان $\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ ثم أكتبه على شكله الأسي ثم استنتج أن :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}\right)$ و $\frac{AC}{AB} = \frac{CB'}{CB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

التمرين الرابع : (07نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -4e^{2x} + 17e^x - 4$

- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x، $g(x) = -4\left(e^x - 4\right)\left(e^x - \frac{1}{4}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9\left(1-e^x\right)}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$.

2) عين العددين الحقيقيان a، b بحيث من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{1}{1-e^x}$.

3) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفهـــا.

4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f'(x) = \frac{g(x)}{9\left(1-e^x\right)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتهـــا

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) = -1 - f(x)$. ماذا تستنتج؟

6) أ)بين ان (Δ_1)و (Δ_2) مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) معادلتهماعلى الترتيب: $y = -\frac{4}{9}x - 1$ و $y = -\frac{4}{9}x$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ_1)و (Δ_2).

7) أنشئ (Δ_1)و (Δ_2) و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $\frac{e^x}{1-e^x} = m$

9) أ) عين مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحددة بالمنحنى (C_f)و (Δ_2) و المستقيمين الذي معادلتهما $x = -\ln 4$ و $x = \lambda$ مع $\lambda < -\ln 4$

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

بالتوفيق بكالوريا جوان 2017

التّصْحِيحْ المفصل للبكالوريا التجريبي — الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الاعداد المركبة) — التنقيط

التمرين الاول:

$z_A=1$ ، $z_B=3+4i$ ، $z_C=2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و $z_D=$

1) تبيان ان صورة B بالدوران r هي D :

لدينا ، r دوران مركزه A و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و عليه التأكد أن $r(B)=D$

اي $z_D-z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$

اي $z_D=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)+z_A$

وعليه لدينا،

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)+z_A=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(3+4i-1\right)+1$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2+4i\right)+1$$
$$=-1-2i+\sqrt{3}i-2\sqrt{3}+1$$
$$=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$$
$$=z_D$$

ب) استنتاج ان القطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة (Γ):

بما ان صورة النقطة B بواسطة الدوران r الذي مركزه A هي النقطة D فإن القطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $\rho=AB=2\sqrt{3}$

2) أ) تعيين لاحقة النقطة F:

لدينا ، $h(A)=F$ اي $z_F-z_B=\frac{3}{2}\left(z_A-z_B\right)$

اي $z_F=\frac{3}{2}\left(z_A-z_B\right)+z_B$

اي $z_F=\frac{3}{2}\left(1-3-4i\right)+3+4i$

اي $z_F=-2i$

ب) تبيان ان F منتصف القطعة [CD]:

$$\frac{z_D+z_C}{2}=\frac{\cancel{-2\sqrt{3}}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)+\cancel{2\sqrt{3}}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{-2i+\sqrt{3}i-2i-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i=z_F$$

منه F منتصف القطعة [CD].

ج) تبيان ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ و كتابته على الشكل الاسي:

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i\left(-2-\sqrt{3}\right) + 2i}{1+2i} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{1+2i} = \frac{-\sqrt{3}i(2i+1)}{1+2i} = -\sqrt{3}i$$

لدينا، $\begin{cases} \left|-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3} \\ Arg\left(-\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ منه: $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

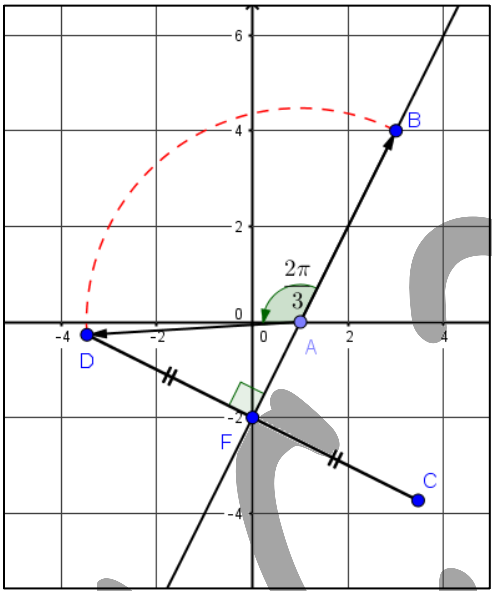
د) استنتاج ان المستقيم (AF) محور القطعة $[CD]$:

بما ان F منتصف القطعة (CD) يكفي التأكد ان (AF) عمودي (CD)

مما سبق لدينا ، $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ نجد ان : $\left(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ اي (AF) عمودي (CD)

منه، المستقيم (AF) محور القطعة $[CD]$

هـ) إنشاء النقط A ،B ،F ،C و D:



التنقيط	(المتتاليات العددية)	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

$u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) حساب u_2: $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- التحقق أن (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية:

$\begin{cases} u_0 + u_2 = \frac{-1}{4} \\ 2u_1 = 1 \end{cases}$ منه $2u_1 \neq u_0 + u_2$ ، الوسط الحسابي غير محقق وعليه (u_n) ليست حسابية

$\begin{cases} u_0u_2 = \frac{-3}{4} \\ u_1^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ منه $u_1^2 \neq u_0 \times u_2$ ، الوسط الهندسي غير محقق وعليه (u_n) ليست هندسية

2) تبيان ان (v_n) متتالية هندسية :

من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n=\frac{1}{2}\left[u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right]=\frac{1}{2}v_n$$

منه (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=u_1-\frac{1}{2}u_0=1$

- **عبارة v_n بدلالة n:** من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$

3) **تبيان أن المتتالية (w_n) حسابية:**

من اجل كل عدد طبيعي n، $w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\frac{v_n+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=\frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n}+\frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{u_n}{v_n}=2+w_n$

إذن (w_n) متتالية حسابية اساسها $r=2$ و حدها الاول $w_0=\frac{u_0}{v_0}=-1$

- من اجل كل عدد طبيعي n، $w_n=w_0+nr=-1+2n$

4) **أ) برهان انه ،** $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$:

من اجل كل عدد طبيعي n، $w_n=\frac{u_n}{v_n}$ منه $u_n=w_nv_n$ إذن $w_n=(-1+2n)\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{2n-1}{2^n}$

ب) برهان أن، $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$:

لدينا، $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ و $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$ اي $u_n=4(u_{n+1}-u_{n+2})$

و عليه: $S_n=4[(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_4)+...+(u_{n+1}-u_{n+2})]$

$$S_n=4[u_1-\cancel{u_2}+\cancel{u_2}-\cancel{u_3}+\cancel{u_3}-\cancel{u_4}+...+\cancel{u_{n+1}}-u_{n+2}]$$

منه $S_n=4[u_1-u_{n+2}]$

$$S_n=4\left[\frac{1}{2}-\frac{2(n+2)-1}{2^{n+2}}\right]=2-\frac{2n+3}{2^n}$$

- **حساب** $\lim u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

1) **تبيان ان النقط A، B و C تحدد مستوي:**

لدينا، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$ ونلاحظ ان $\frac{0}{-3}\neq\frac{-1}{-4}\neq\frac{1}{1}$ منه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة و عليه فإنها تحدد مستوي

2) **تبيان أن $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية لـ (ABC):**

$$\begin{cases}x_A+y_A-z_A=1+2-3=0\\x_B+y_B-z_B=2+1-3=0\\x_C+y_C-z_C=2-2-0=0\end{cases}$$

منه احداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة $x+y-z=0$

و عليه $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية لـ (ABC)

3) **التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE):**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (DE) منه $\overrightarrow{DM} = t\times\overrightarrow{DE} \quad / t\in\mathbb{R}$

حيث $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$ شعاع توجيه المستقيم (DE)

منه: $\begin{cases} x = 2-6t \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (DE).

4) أ) **تبيان ان (S) سطح الكرة :**

(S) تكافئ $x(x-2)-y(2-y)+z(z-8)+14=0$

تكافئ $x^2-2x-2y+y^2+z^2-8z+14=0$

تكافئ $(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-4)^2-16+14=0$

تكافئ $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4$

منه (S) هي سطح كرة مركزهــــا $\Omega(1;1;4)$ ونصف قطرهــــــا $r=2$.

ب) **تبيان ان (DE) مماس سطح الكرة (S) في نقطة H يطلب تعيينهـــــا:**

لتكن $H(x;y;z)$ تحقق ، $\begin{cases} H\in(DE) \\ H\in(S) \end{cases}$ منه: $\begin{cases} x = 2-6t \\ y = 6t \\ z = 2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4 \end{cases}$

منه نجد: $(1-6t)^2+(6t-1)^2+4=4$ اي $(1-6t)^2+(6t-1)^2=0$ اي $6t-1=0$ اي

$t=\frac{1}{6}$ ، منه $H(1;1;4)$

نلاحظ ان : $d[\Omega;(DE)]=\Omega H=2$ منه ان (DE) مماس سطح الكرة (S) في النقطة H

ج) **اثبات ان المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تحديدهـــــا:**

لدينا، $d[\Omega;(ABC)]=\frac{|x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{3}}=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

نلاحظ ان $d[\Omega;(ABC)]<2$ منه المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة (c) مركزها ω و نصف قطرهـا r'.

تعيين r': لدينا ، $r'=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

تعيين ω: ω هي المسقط العمودي لـ Ω على (ABC)

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدوال العددية)	التنقيط

الجزء1:

1) **دراسة تغيرات الدالة g:**

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-1-2\ln x\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{x}-1-2\ln x\right]=+\infty$

اتجاه التغير: من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=-\left[\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right]$

نلاحظ ان $g'(x)<0$ ، على المجال $]0;+\infty[$.اذن g دالة متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$

2) حساب $g(1)$: $g(1)=0$

منه اشارة $g(x)$ نلخصها كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني :

1)أ) تبيان ان f مستمرة عند 0 من اليمين:

لدينا ، $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}}\left(x-x^2\ln x\right)=0=f(0)$ لان $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} x^2\ln x=0$

اذن f مستمرة عند 0 من اليمين.

ب) حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}}\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x \to 0\\ >}}\frac{x-x^2\ln x}{x}=\lim_{\substack{x \to 0\\ >}}\frac{x(1-x\ln x)}{x}=\lim_{\substack{x \to 0\\ >}}1-x\ln x=1$$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق $f'_d(0)=1$

ج) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x\ln x)=-\infty$

2) تبيان ان من اجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=x.g(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\left[2x\ln x+\frac{1}{x}.x^2\right]=1-2x\ln x-x=x\left(\frac{1}{x}-x-2\ln x\right)=xg(x)$$

اتجاه تغير الدالة f: اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

منه: f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

3) تبيان ان $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}7<\alpha<1{,}8$:

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $[1{,}7\ ;\ 1{,}8]$ و لدينا ، $f(1{,}7)=$ $f(1{,}8)=$

بما ان $f(1{,}7)\times f(1{,}8)<0$ و عليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}7<\alpha<1{,}8$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$:

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-x=-x^2\ln x$ يكفي دراسة اشارة $-\ln x$

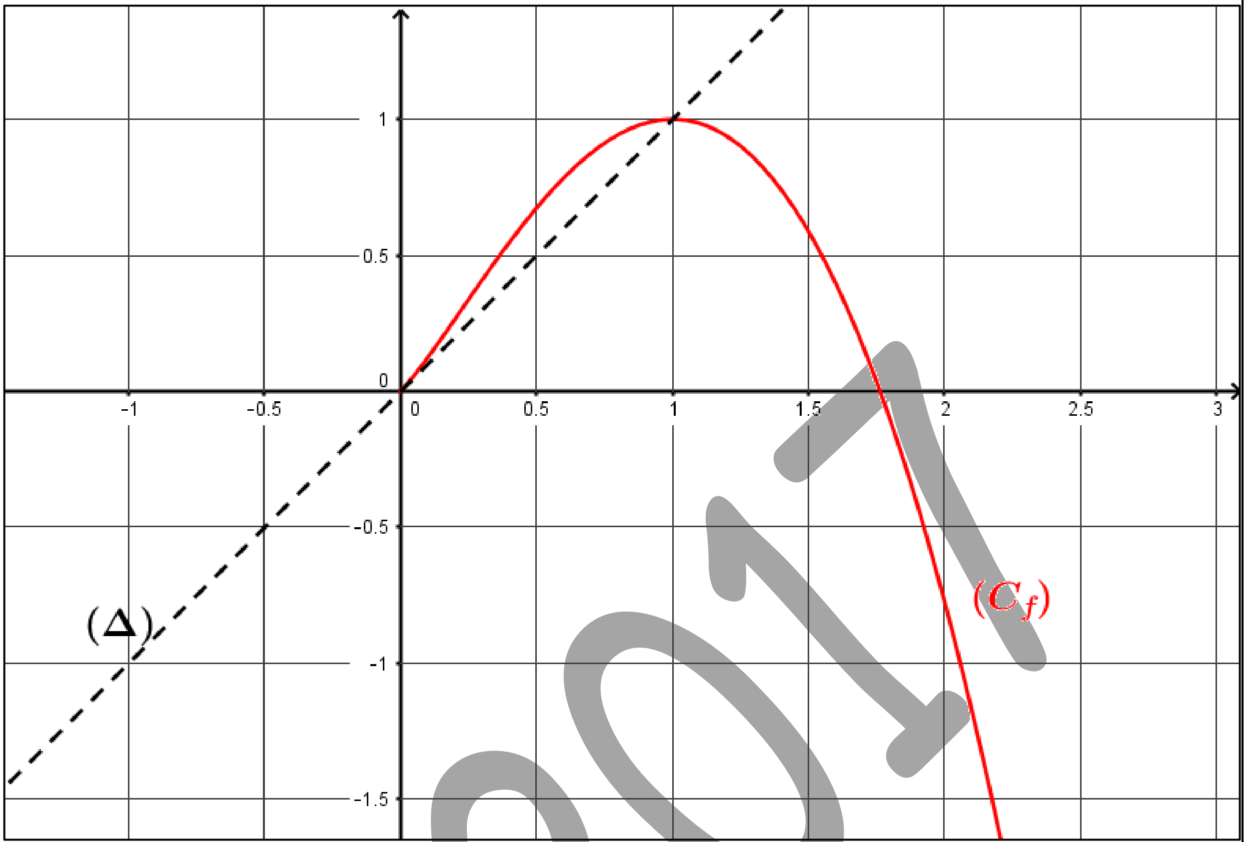
x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

(C_f) يقع تحت (D) على $]1;+\infty[$

(C_f) يقع فوق (D) على $]0;1[$

(C_f) يقطع (D) في النقطة $A(1;1)$.

5) الرسم:



5) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، حساب $I_\alpha = \int_1^\alpha (x - f(x))dx$:

لدينا، $I_\alpha = \int_1^\alpha (x - f(x))dx = \int_1^\alpha (x^2 \ln x)dx$

بوضع: $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$ منه:

$$I_\alpha = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^\alpha - \frac{1}{3}\int_1^\alpha x^2 dx = \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^\alpha = \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)\ u.a$$

التفسير الهندسي:

I_α هي مساحة الحيز المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذي المعادلة $y = x$ ، $x = 1$ و $x = \alpha$

ب) التحقق ان $I_\alpha = (-\alpha^3 + 3\alpha + 1)cm^2$:

لدينا، $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 9cm^2$ و $f(\alpha) = 0$ اي $\alpha - \alpha^2 \ln\alpha = 0$ اي $\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$ منه

$$I_\alpha = \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)\ u.a = \left[\frac{1}{3}\alpha^3\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)\right]9cm^2 = (-\alpha^3 + 3\alpha + 1)cm^2$$

الجزء الثالث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$:

نضع، $P(n):\ 0 < u_n < 1$

المرحلة01: من اجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ وبما ان $0<\frac{1}{2}<1$ فان $P(0)$ محققة

المرحلة02: من اجل n عدد طبيعي كيفي، نفرض صحة $P(n):0<u_n<1$

ونبرهن صحة $P(n+1):0<u_{n+1}<1$

لدينا من فرضية التراجع، $0<u_n<1$ وبما ان f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1[$، نجد

$f(0)<f(u_n)<f(1)$ اي $0<u_{n+1}<1$

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

2) <u>برهان ان (u_n) متزايدة تماما</u> :

ندرس اشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n=-u_n^2\ln u_n$

لدينا، $0<u_n<1$ نجد: $\begin{cases}-u_n^2<0\\ \ln u_n<0\end{cases}$ ، منه $-u_n^2\ln u_n>0$ اي $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما .

<u>الاستنتاج</u>: بما ان (u_n) متتالية متزايدة تماما و محدودة من الاعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

<u>حساب نهايتها</u>:

لتكن، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ و عليه نجد كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$

بما ان، $u_{n+1}=u_n-u_n^2\ln u_n$ نجد $\ell=\ell-\ell^2\ln\ell$ اي $-\ell^2\ln\ell=0$ اي $\begin{cases}\ell^2=0\\ \ln\ell=0\end{cases}$ اي $\begin{cases}\ell=0\\ \ell=1\end{cases}$

بما ان $u_0=\frac{1}{2}$ و (u_n) متزايدة نجد، $\ell=1$.

Abdelmalek

00000 0000000000000000---

التّصْحِيحُ المفصل للبكالوريا التجريبي — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

1) **تبيان أن المستويين (P) و (P') يتقطعان وفق المستقيم (D):**

لدينا، $(-4-2t)+(4+t)+(t)=-4+4-2t+2t=0$ منه ، $(D)\subset(P)$

$2(-4-2t)+3(4+t)+t-4=-8+4t+12+3t+t-4=0$ منه $(D)\subset(P')$

اذن، المستويين (P) و (P') يتقطعان وفق المستقيم (D) تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=-4-2t\\ y=4+t \quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$.

2) أ) **التأكد ان الشعاع $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ شعاع ناظمي لـلمستويات (P_λ):**

لدينا، (P_λ) تكافئ $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

تكافئ $x+y+z-\lambda x-\lambda y-\lambda z+2\lambda x+3\lambda y+\lambda z-4\lambda=0$

تكافئ $(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+z-4\lambda=0$

و من خلال المعادلة الديكارتية الاخيرة نستنتج ان الشعاع $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ ناظمي لـ (P_λ).

ب) **تعيين قيمة λ حتى يكون المستويان (P) و (P_λ) منطبقين:**

لدينا، $\vec{n}_{(P)}(1;1;1)$ و $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ اشعة ناظمية لـ (P) و (P_λ) على الترتيب .

(P) و (P_λ) منطبقين ، اول الشروط الشعاعين $\vec{n}_{(P)}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا

اي $\frac{1}{1}=\frac{1+2\lambda}{1}=\frac{1+\lambda}{1}$ منه نجد ان $\lambda=2\lambda$ اي $\lambda=0$ وعليه، $(P_0)=(P)$.

ج) **البحث عن قيمة لـ λ بحيث (P) و (P_λ) متعامدين:**

(P) و (P_λ) متعامدين معناه ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$ اي $(1+\lambda)+(1+2\lambda)+1=0$ اي $\lambda=-1$

3) **تبيان ان جميع المستويات (P_λ) تشمل مستقيم مشترك (Δ):**

لدينا ، (P_λ) تكافئ $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

يكافئ $\begin{cases}x+y+z=0\\ \text{و}\\ 2x+3y+z-4=0\end{cases}$ ومنه حل الجملة هو تقاطع المستويين (P) و (P')

و عليه حسب السؤال 1 نجد: $(\Delta)=(D)$.

ادن جميع المستويات (P_λ) تشمل مستقيم مشترك هو $(\Delta)=(D)$.

4) أ) **تبيان أن (P) و (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D'):**

لدينا، $\vec{n}_0(1;1;1)$ و $\vec{n}_{-1}(0;-1;1)$ اشعة ناظمية لـ (P) و (P_{-1})

نلاحظ $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{1}$ منه الشعاعين $\vec{n}_0$ و $\vec{n}_{-1}$ غير مرتبطان خطيا و عليه المستويان (P) و (P_{-1})

متقاطعان وفق المستقيم (D') الذي يحقق: $\begin{cases}x+y+z=0 & ...(1)\\ -y+z+4=0 & ...(2)\end{cases}$

من (2) نجد، $z=y-4$ ومن (1) نجد، $x+y+y-4=0$ اي $x=-2y+4$

بوضع، $y=\alpha$ نجد: $\alpha\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=4-2\alpha\\ y=\alpha\\ z=-4+\alpha\end{cases}$ تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع.

ب) تبيان ان (D) و (D') منطبقان:

لدينا، المستقيمين (D) و (D') لهما نفس شعاع التوجيه، $\vec{u}(-2;1;1)$ و عليه فإنهما متوازيين .

لتكن النقطة $A(-4;4;1)$ من المستقيم (D) و نلاحظ ان أجل $\alpha=0$ فإن $A\in(D')$

إذن المستقمين (D) و (D') منطبقان.

ج) $A(1;1;1)$، حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D):

لدينا المستويين (P) و (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D) و متعامدين منه تستنتج ما يلي :

$$d[A;(D)]^2=d[A;(P)]^2+d[A,(P_{-1})]^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2=3+\frac{16}{2}=11$$

منه: $d[A;(D)]=\sqrt{11}$.

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)	(المتتاليات العددية)	التنقيط

1) أ) البرهان بالتراجع أن، $1<u_n<2$:

نضع ، $P(n):1<u_n<2$

المرحلة01: من اجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ وبما ان $1<\frac{3}{2}<2$ فان $P(0)$ محققة

المرحلة02: من اجل n عدد طبيعي كيفي ، نفرض صحة $P(n):0<u_n<1$

ونبرهن صحة $P(n+1):0<u_{n+1}<1$

لدينا من فرضية التراجع، $1<u_n<2$ منه $0<u_n-1<1$ منه $0<\sqrt{u_n-1}<1$

منه $1<1+\sqrt{u_n-1}<2$ اي $1<u_{n+1}<2$

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$.

ب) تبيان ان من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$:

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)$$
$$=\frac{\left[\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)\right]\left[\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)\right]}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$
$$=\frac{(u_n-1)-(u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$
$$=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

-استنتاج ان (u_n) متزايدة تماما:

لدينا، $-u_n^2+3u_n-2=(u_n-2)(1-u_n)$

بما ان $1<u_n<2$ نجد، $-1<u_n-2<0$ و $-1<1-u_n<0$ منه نجد، $(u_n-2)(1-u_n)>0$

من جهة اخرى ، $0<u_n-1<1$ اي $\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)>0$

إذن : $u_{n+1}-u_n>0$ منه (u_n) متتالية متزايدة تماما .

ج) التبرير ان المتتالية (u_n) متقاربة:

لدينا ، (u_n)متتالية متزايدة تماما و محدودة من الاعلى بالعدد 2 ، إذن فهي متقاربة .

2) أ) تبيان ان (v_n) هندسية:

من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(1+\sqrt{u_n-1}-1\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

منه (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=\ln(u_0-1)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n:

من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0q^n=-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{\ln 2}{2^n}$

لدينا، $v_n=\ln(u_n-1)$ منه ، $u_n-1=e^{v_n}$ اي $u_n=e^{v_n}+1$ منه : $u_n=e^{-\frac{\ln 2}{2^n}}+1$

تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-\frac{\ln 2}{2^n}}+1=1+1=2$ لان : $\left(\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{\ln 2}{2^n}=0\right)$

3) $w_n=u_n-1$ ، حساب الجداء π_n:

$$\pi_n=w_0\times w_1\times\ldots\times w_n=(u_0-1)(u_1-1)\ldots(u_n-1)=e^{v_0}e^{v_1}\ldots e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

حساب $v_0+v_1+\ldots+v_n$:

$$v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\ln 2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=-2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط) (الاعداد المركبة)	التنقيط

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$، $(z+1)^2+\left[2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2=0$:

$(z+1)^2+\left[2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2=0$ تكافئ $(z+1)^2=-\left[2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2$

تكافئ $(z+1)^2=\left[i\left(2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\right]^2$

تكافئ $\begin{cases} z+1=i\left(2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right) \\ z+1=-i\left(2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z=-\left(2+\sqrt{5}\right)+2i \\ z=\sqrt{5}-2i \end{cases}$

2) أ) حساب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$ ثم انشاء النقط A، B و C:

$|z_C| = |\sqrt{5}+2i| = \sqrt{9} = 3$ ، منه C تنتمي الى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 3

$|z_B - z_A| = |2i - \sqrt{3}i + 1 - 2i| = |1-\sqrt{3}i| = 2$ ، منه B تنتمي الى الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2

ب) تبيان أن C هي صورة B بالتشابه المباشر $S\left(A;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{\pi}{3}\right)$:

معناه، $S(B)=C$ تكافئ $z_C - z_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

يكافئ $z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

لدينا،

$$z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i\sqrt{3}) - 1 + 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) + -1 + 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{4}}\cancel{(4)} + -1 + 2i$$

$$= \sqrt{5} + 2i$$

$$= z_C$$

3) **أ) تعيين $z_{C'}$ لاحقة C' نظيرة C بالنسبة الى A :**

C' نظيرة C بالنسبة الى A معناه ، $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$

اي $z_{C'} - z_A = -(z_C - z_A)$

منه $z_{C'} = -z_C + 2z_A$

منه $z_{C'} = -\sqrt{5} - 2i - 2 + 4i$

اذن ، $z_{C'} = -(2+\sqrt{5}) + 2i$

ب) حساب $z_{B'}$:

الرباعي $BC'B'C$ معناه $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$

معناه $z_{C'} - z_B = z_{B'} - z_C$

معناه $z_{B'} = z_{C'} - z_B + z_C$

معناه $z_{B'} = -2 - \sqrt{5} + 2i - 2i + \sqrt{3}i + \sqrt{5} + 2i$

منه، $z_{B'} = -2 + i(2+\sqrt{3})$

ج) تبيان أن، $\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}(1-i\sqrt{3})$:

$$\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2+2i+\sqrt{3}i-\sqrt{5}-2i}{2i-\sqrt{3}i-\sqrt{5}-2i} = \frac{2+(\sqrt{5}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)} = \frac{\left[2+(\sqrt{5}-\sqrt{3}i)\right]\left[\sqrt{5}-\sqrt{3}i\right]}{8}$$

لدينا، $= \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}i+5-3-2\sqrt{15}i}{8}$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{3}i)}{4}$$

كتابته على الشكل الاسي:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|=\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right|\left|1-i\sqrt{3}\right|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\times 2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \arg\left(\dfrac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]=\arg\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)+\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=0-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

منه، $\dfrac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$

الاستنتاج:

$\dfrac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$ نستنتج: $\begin{cases}\left|\dfrac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \arg\left(\dfrac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right)=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$ منه $\begin{cases}\dfrac{CB'}{CB}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CB'}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

من جهة اخرى: C هي صورة B بالتشابه المباشر $S\left(A;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{\pi}{3}\right)$ معناه

$z_C-z_A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$ اي $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ منه $\begin{cases}\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \left(B;\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

ومنه نجد: $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CB'}{CB}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}\right)$ احظ $\left(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}\right)=-\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CB'}\right)$

الانشـــــاء:

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط)	(الدوال العددية)	التنقيط

الجزء الاول:

من اجل كل عدد حقيقي x، 0,25

$$-4\left(e^x-4\right)\left(e^x-\frac{1}{4}\right)=\left(e^x-4\right)\left(-4e^x+1\right)=-4e^{2x}+e^x+16e^x-4=-4e^{2x}+17e^x-4=g(x)$$

إشارة $g(x)$ نلخصها في الجدول التالي: 0,25

$e^x-4\geq 0$ يكافئ $e^x\geq 4$ يكافئ $e^x\geq \ln 4$

$e^x-\frac{1}{4}\geq 0$ يكافئ $e^x\geq\frac{1}{4}$ يكافئ $e^x\geq -\ln 4$

x	0		$-\ln 4$		$\ln 4$		$+\infty$
e^x-4		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x-\frac{1}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{(4x+9)e^x-4x}{9(1-e^x)}$ — 0,5

1) تبيان ان: $f(x)=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{1-e^x}$: — 0,25

من اجل كل عدد حقيقي x،

$$-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{-4x(1-e^x)+9e^x}{9(1-e^x)}=\frac{-4x+4xe^x+9e^x}{9(1-e^x)}=\frac{(4x+9)e^x-4x}{9(1-e^x)}=f(x)$$ — 0,25

2) تعيين العددين الحقيقين a و b:

من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $ax+b+\dfrac{1}{1-e^x}=ax+\dfrac{b(1-e^x)+1}{1-e^x}=ax+\dfrac{-be^x+b+1}{1-e^x}$

من جهة اخرى ، لدينا: $f(x)=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{1-e^x}$. بالمطابقة نجد: $a=-\dfrac{4}{9}$ و $b=-1$

منه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x)=-\dfrac{9}{4}x-1+\dfrac{1}{1-e^x}$ — 0,25

3) حساب نهايات الدالة f: — 0,25

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{9}{4}x-1+\dfrac{1}{1-e^x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{9}{4}x-1+\dfrac{1}{1-e^x}\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^x$	+	0	−

4) أ) حساب $f'(x)$: — 0,25

من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،

$$f'(x)=-\frac{4}{9}+\frac{e^x}{(1-e^x)^2}=\frac{-4(1-e^x)^2+9e^x}{9(1-e^x)^2}=\frac{-4(1-2e^x+e^{2x})+9e^x}{9(1-e^x)^2}=\frac{-4e^{2x}+17e^x-4}{9(1-e^x)^2}=\frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$$ — 0,25

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

نلاحظ ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ و عليه:

f دالة متزايدة تماما على المجالين $]-\ln 4;0[$ و $]0;\ln 4]$

f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-\ln 4]$ و $[\ln 4;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f: — 0,25

x	$-\infty$	$-\ln 4$		0		$\ln 4$	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	‖	+	0	−
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(-\ln 4)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$f(\ln 4)$	↘ $+\infty$

— 0,25

5) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(-x)=-1-f(x)$:

لدينا، $f(-x)=-\dfrac{4}{9}(-x)-1+\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\dfrac{4}{9}x-1+\dfrac{e^x}{e^x(1-e^{-x})}=-1+\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$ — 0,25

$-1-f(x)=-1-\left[-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{1-e^x}\right]=-1+\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

منه، $f(-x)=-1-f(x)$ — 0,5

الاستنتاج: لدينا ، $f(-x)=-1-f(x)$ اي $f(-x)+f(x)=-1$ منه النقطة $\Omega\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f).

6) أ) <u>تبيان ان (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f)</u>:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{4}{9}x-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-e^x}\right]=0$ منه المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y=-\frac{4}{9}x-1$ بجوار $+\infty$. 0,25

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{1-e^x}\right]=0$ منه المستقيم (Δ_2)ذو المعادلة $y=-\frac{4}{9}x$ بجوار $-\infty$

ب) <u>دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1) و (Δ_2)</u>:

ندرس اشارة الفرق : 1

$$\begin{cases} f(x)-\left(-\frac{4}{9}x-1\right)=\frac{1}{1-e^x} \\ f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)=\frac{e^x}{1-e^x} \end{cases}$$

$1-e^x\geq 0$ تكافئ $-e^x\geq -1$ تكافئ $e^x\leq 1$ اي $x\leq 0$ منه :

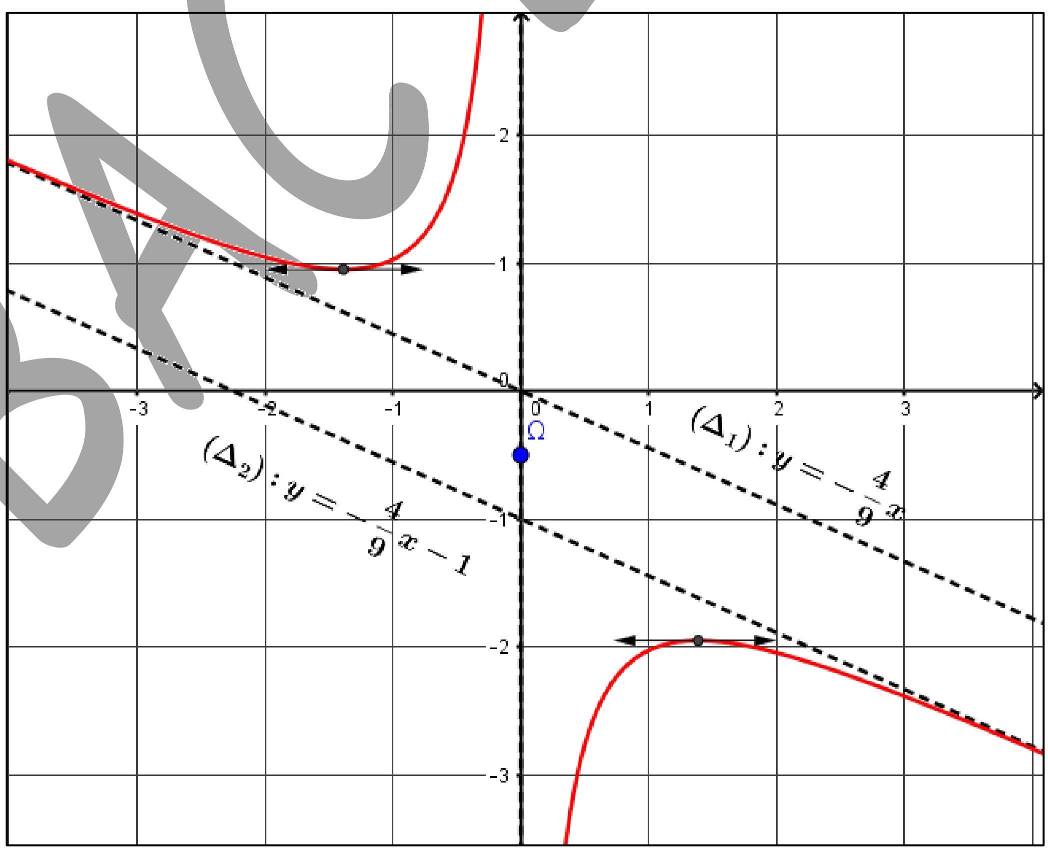
x	$-\infty$ ... 0	0 ... $+\infty$
$f(x)-\left(-\frac{4}{9}x-1\right)$	+	−
$f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)$	+	−

(C_f) يقع فوق (Δ_1) و (Δ_2)على المجال $]-\infty;0[$

(C_f) يقع تحت (Δ_1) و (Δ_2)على المجال $]0;+\infty[$

7) الرسم:

0,5



0,25

8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد و اشارة حلول المعادلة $\frac{e^x}{1-e^x}=m$:

0,25 لدينا ، $\frac{e^x}{1-e^x}=m$ تكافئ $-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}=-\frac{4}{9}x+m$ تكافئ $f(x)=-\frac{4}{9}x+m$

منه حلول المعادلة يعود الى تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{4}{9}x+m$

المناقشة:

$m<-1$: المعادلة تقبل حل وحيد موجب

0,5 $-1\le m\le 0$: المعادلة لا تقبل حلول

$m>0$: المعادلة تقبل حل وحيد سالب .

9) أ) حساب مساحة الحيز $A(\lambda)$:

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-\ln 4}\left[f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right]dx=\int_{\lambda}^{-\ln 4}\frac{e^x}{1-e^x}dx=\left[-\ln\left(1-e^x\right)\right]_{\lambda}^{-\ln 4}$$

0,5
$$=\left(-\ln\left(1-e^{-\ln 4}\right)\right)-\left(-\ln\left(1-e^{\lambda}\right)\right)$$
$$=-\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ln\left(1-e^{\lambda}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{4\left(1-e^{\lambda}\right)}{3}\right)u.a$$

حساب $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\ln\left(\frac{4\left(1-e^{\lambda}\right)}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

Abdelmalek

00000 0000000000000000---