الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية **مديرية التربية لولاية سكيكدة**

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي **متقن المجاهد محمد الصالح غميرد-القل**

الشعبة: تقني رياضي **دورة: ماي 2017**

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 04 ساعات ونصف**

على كل مترشح أن يعالج موضوعا واحدا على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين: $A(6;3;-3)$ و $B(3;1;2)$ والمستوي

(p) الذي يشمل B و $\vec{n}(3;2;-5)$ شعاع ناظمي له، والمستوي (p') ذا المعادلة : $x+y-2z=0$

1) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل B و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له.

ب) تحقق أنّ المستويين (p) و (p') متقاطعان وفق المستقيم (d).

ج) أثبت أنّ B هي المسقط العمودي للنقطة A على (p).

2) ليكن المستوي (q) المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=t-2m+2 \\ y=t+3m+2; \quad (t;m)\in\mathbb{R}^2 \\ z=t-2 \end{cases}$

أ-عيّن شعاعي توجيه للمستوي (q)، ثمّ بيّن أنّ المستويين (p) و (q) متوازيان.

ب-تحقق أنّ المستوي (q) يقبل معادلة تكافئ: $3x+2y-5z=20$

ج-عيّن إحداثيات النقطة E منتصف القطعة $[AB]$، وتحقق أنّ E تنتمي إلى المستوي (q) واستنتج ماذا يمثل المستوي (q) بالنسبة للقطعة $[AB]$.

3) نعتبر (s) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

أ-بيّن أنّ (s) هي سطح كرة ثمّ عين إحداثيات مركزه Ω ونصف قطره r.

ب-أدرس الوضع النسبي للمستوي (q) وسطح الكرة (s).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7.

2) بيّن أنّ العدد: $1438^{2017}-2017^{1438}-2$ يقبل القسمة على 7.

3) عين قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $1438^{6n+5}-2017^{6n+3}+15n^2+1$ يقبل القسمة على 7.

4) عيّن قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $(4n+3)\times3^{6n+2}+4^{6n+1}\equiv0[7]$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(z+\sqrt{3}-1\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0.....(*)$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطة A صورة العدد الحقيقي $z_A=\sqrt{3}-1$، والنقطتين B و C صورتي العددين المركبين: $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\overline{z}_B$

أ) أكتب على الشكل الأسي كل من الأعداد: z_A ، z_B و z_C ؛ ثمّ أنشئ هندسيا النقط: B ، C و A

ب) عيّن قيم العدد n الطبيعية حتى يكون $(z_B)^n$ حقيقيا.

ج) عيّن قيم العدد n الطبيعية حتى يكون $(z_B)^n$ تخيليا صرفا.

د) أحسب $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439} - \left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017}$

3) أكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي. واستنتج طبيعة المثلث ABC.

4) ليكن الدوران f الذي مركزه A ويحوّل C إلى B. عيّن زاوية الدوران وأكتب عبارته المركبة.

- لتكن النقطة B' صورة B بالدوران f، بيّن أنّ B' هي صورة C بتناظر يطلب تعيينه.
- أحسب $z_{B'}$ لاحقة B' ثمّ أنشئها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{4.e^x}{e^x + 1}$

(C) المنحنى الممثل لـ f في معلم متعامد ومتجانس، وحدة الطول $1cm$

1) أحسب: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. وشكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

3) أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x) = x - 4 + \frac{1}{1 + e^{-x}}$ واستنتج أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 4$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ ثمّ أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل عند $-\infty$ ثمّ أدرس وضعية (C) بالنسبة (Δ).

4) أ) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) بيّن $f(x) + f(-x) = -4$، ماذا تستنتج؟

جـ) بيّن أنّ $\Omega(0;-2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

د) بيّن أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3.9 \leq \alpha \leq 4$

5) أرسم المستقيمين المقاربين (Δ)، (Δ')، المماس (T) والمنحنى (C).

6) أ) عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بالسنتمتر المربع، المساحة A للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 4$. ثمّ عيّن مدوّر A إلى 10^{-2}

7) نعرّف على $\mathbb{R}$ الدالة g كما يلي: $g(x) = |x| - \frac{4.e^{|x|}}{e^{|x|} + 1}$

أ) بيّن أنّ g زوجية وأرسم (C_g) انطلاقا من (C).

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m$

انتهى الموضوع الأول

بالتوفيق

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1- جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=2+2i\sqrt{3} \\ 2\overline{z_1}-z_2=1-i\sqrt{3} \end{cases}$ حيث $\overline{z_1}$ و $\overline{z_2}$ مرافقا z_1 و z_2 على الترتيب.

2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط: A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ) أكتب على الشكل المثلثي ثمّ الأسي الأعداد: z_A ، z_B و z_C.

ب) أكتب على الشكل الجبري العدد: $\left(z_B{}^{7}-z_C{}^{7}\right)+\left(z_B{}^{1438}-z_C{}^{1438}\right)$

جـ) بيّن أنّ النقط: A، B و C تنتمي إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

د) أثبت أنّ الرباعيّ $OCAB$ معيّن وأحسب مساحته.

3- نعتبر التحويل S الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1-i)z+2i$

أ) بين أنّ A صامدة بالتحويل S، ثمّ عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

ب) ماهي طبيعة ومساحة الرباعي $O'C'AB'$ حيث: $B'=S(B)$ ، $C'=S(C)$ و $O'=S(O)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقط: $\Omega(2;2;3)$ ، $A(2;-1;3)$ ، $B(-3;1;2)$ و $C(1;-2;0)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A، B، و C تعين مستويا نرمز له (p)

ب) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ ناظمي للمستوي (p) تم استنتج معادلة لـ(p).

2) أ) أحسب المسافة بيّن Ω و(p).

ب) عيّن معادلة لسطح الكرة (s) التي مركزها Ω وتمسّ المستوي(p).

3) نعتبر المستقيم (Δ) الذي يشمل $E(-2;-1;8)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(3;2;-3)$

أ) عيّن بدلالة الوسيط الحقيقي t تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب) M نقطة من المستقيم (Δ)، عيّن بدلالة t مركبات الشعاع $\overrightarrow{\Omega M}$

جـ) أحسب المسافة بيّن النقطة Ω والمستقيم (Δ).

4) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والسطح (s).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. f الدالة المعرفة على المجال $\left[\frac{3}{8};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{8x-3}{2x+1}$

C_f تمثيلها البياني و(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة f، استنتج أنه من أجل $x\in\left[\frac{3}{8};+\infty\right[$ فإنّ: $0\le f(x)<4$

ب) عيّن العددين الحقيقين α وβ حيث $(\alpha>\beta)$، حلّي المعادلة: $f(x)=x$ واستنتج فاصلتي نقطتي تقاطع C_f والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ ، ثمّ عيّن بيانيا وضعية C_f و(Δ).

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$

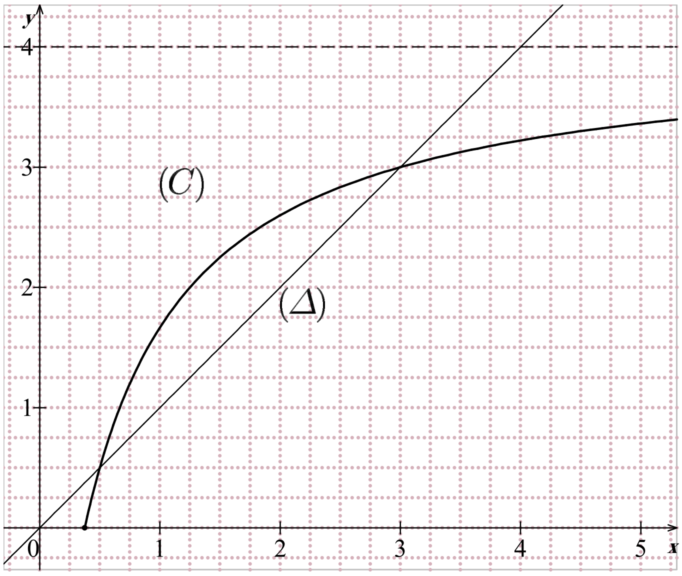
أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود: u_0، u_1 ، u_2 وu_3 والحدود: v_0، v_1 و v_2

(دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء).

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين: (u_n) و (v_n).

3) أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n < 3$ و $3 < v_n \le 5$

ب) عين اتجاه تغيركل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).



4) أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{14}{(2v_n+1)(2u_n+1)} \times (v_n - u_n)$$

واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{2}{3}(v_n - u_n)$$

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < v_n - u_n < 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

جـ) استنتج أنّ: $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ وأستنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة f معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وفسّر النتيجة.

2) أحسب $f'(x)$ وأستنتج أنّ f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3) أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب) أدرس تغيرات الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = f(x) - (2x-2)$ (لا تُحسب النهايتان)

جـ) شكل جدول تغيراتها. واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

د) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمماس (T).

4) بيّن أنّ المعادلة: $f(x) = 2$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ، ثم تحقق أنّ: $3.59 < \alpha < 3.60$

5) أرسم المماس (T) والمنحنى (C).

6) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي k عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + k$

7) أ) بيّن أنّ الدالة: $x \mapsto x.\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) أحسب المساحة A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$, $x=\alpha$ حيث α هي القيمة المعرّفة في السؤال 4).

جـ) عيّن حصرا للعدد A.

انتهى الموضوع الثاني بالتوفيق

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين: $A\,(6;3;-3)$ و $B\,(3;1;2)$ والمستوي (p) الذي يشمل B و $\vec{n}\,(3;2;-5)$ شعاع ناظمي له، والمستوي (p') ذا المعادلة: $x+y-2z=0$

1) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل B و $\vec{u}\,(1;1;1)$ شعاع توجيه له. **<u>الحل:</u>** $(d):\begin{cases} x=t+3 \\ y=t+1; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2t+2 \end{cases}$

ب) تحقق أنّ المستويين (p) و (p') متقاطعان وفق المستقيم (d). **<u>الحل:</u>** تنتج معادلة للمستوي (p): $3x+2y-5z-1=0$
<u>ولدينا</u> التمثيل الوسيطي لـ (d) يحقق معادلة (p) وكذلك يحقق معادلة (p'). **<u>فهما</u>** متقاطعان وفق (d).

ج) أثبت أنّ B هي المسقط العمودي للنقطة A على (p). **<u>الحل:</u>** $\overrightarrow{AB}(3;2;-5)$ و $\vec{n}(3;2;-5)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}=1\vec{n}$ وعلما أنّ $B\in(p)$
<u>إذن:</u> B هي المسقط العمودي لـ A على (p).

<u>ملاحظة:</u> <u>طريقة أخرى</u>: نثبت أنّ: $d(A;p)=\dfrac{|18+6+15-1|}{\sqrt{9+4+25}}=\sqrt{38}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{9+4+25}$

2) ليكن المستوي (q) المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=t-2m+2 \\ y=t+3m+2; \quad (t;m)\in\mathbb{R}^2 \\ z=t-2 \end{cases}$

أ-عيّن شعاعي توجيه للمستوي (q)، ثمّ بيّن أنّ المستويين (p) و (q) متوازيان. **<u>الحل:</u>** شعاعا توجيه (q): $\vec{u}\,(1;1;1)$ و $\vec{v}\,(2;3;0)$
وينتج: $\vec{n}.\vec{u}=3(1)+2(1)+2(1)=0$ و $\vec{n}.\vec{v}=3(2)+2(3)+0=0$ **<u>إذن:</u>** (p) و (q) متوازيان.

ب-تحقق أنّ المستوي (q) يقبل معادلة تكافئ: $3x+2y-5z=20$ **<u>الحل:</u>** بالتعويض من التمثيل الوسيطي لـ (q) في المعادلة كما يلي: $3(t-2m+2)+2(t+3m+2)-5(t-2)=20$ وتكافئ: $20=20$ **محققة**.

ج-عيّن إحداثيات النقطة E منتصف القطعة $[AB]$، وتحقق أنّ E تنتمي إلى المستوي (q) واستنتج ماذا يمثل المستوي (q) بالنسبة للقطعة $[AB]$. **<u>الحل:</u>** $E\left(\dfrac{9}{2};2;\dfrac{-1}{2}\right)$ وهذه الاحداثيات تحقق معادلة (q) ومنه: $E\in(q)$ **<u>ولدينا</u>**: $\overrightarrow{AB}(3;2;-5)=1.\vec{n}$ ومنه (q) مستوي محوري لـ $[AB]$.

3) نعتبر (s) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

أ-بيّن أنّ (s) هي سطح كرة ثمّ عين إحداثيات مركزه Ω ونصف قطره r.
<u>الحل:</u> من تعريف سطح كرة فإنّ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي سطح كرة قطرها $[AB]$. مركزها Ω منتصف $[AB]$ ومنه: $\Omega=E\left(\dfrac{9}{2};2;\dfrac{-1}{2}\right)$ (Ω هي E) ونصف قطرها: $r=\dfrac{AB}{2}$ ومنه: $r=\dfrac{\sqrt{86}}{4}$

ب-أدرس الوضع النسبي للمستوي (q) وسطح الكرة (s). **<u>الحل:</u>** (q) مستوي محوري لـ$[AB]$، وسطح الكرة (s) قطره $[AB]$ ينتج: (q) و(s) متقاطعان في دائرة قطرها الطول AB (أي (q) مستوي قطري لـ(s)).

<u>التمرين الثاني:</u> (04 نقاط)

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7.

<u>الحل:</u>

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	$[7]$

2) بيّن أنّ العدد: $1438^{2017}-2017^{1438}-2$ يقبل القسمة على 7. **<u>الحل:</u>** نفرض العدد المعطى هو A_n <u>لدينا:</u>
$2017=6k+1$; $1438\equiv3[7]$ و $2016\equiv1[7]$ ومنه: $A_n\equiv3^{6k+1}-1^{1438}-2[7]$ ومنه: $A_n\equiv3-1-2[7]$ أي: $A_n=0[7]$

3) عين قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $1438^{6n+5}-2017^{6n+3}+15n^2+1$ يقبل القسمة على 7. **<u>الحل:</u>** نفرض العدد المعطى هو B_n لدينا: $B_n\equiv0[7]$ يكافئ: $3^{6n+5}-1^{6n+3}+15n^2+1\equiv0[7]$ ومنه: $5-1+n^2+1\equiv0[7]$ ومنه:
$n^2+5\equiv0[7]$ ويكافئ: $n^2-9\equiv0[7]$ ومنه: $(n-3)(n+3)\equiv0[7]$ ولأنّ 7 عدد أولي نجد: $n+3\equiv0[7]$ أو
$n-3\equiv0[7]$ وأخيرا: $n=7k'+4$; $n=7k'+3$;

4) عيّن قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(4n+3)\times 3^{6n+2}+4^{6n+1}\equiv 0[7]$ **الحل:** نفرض العدد المعطى هو C_n

لدينا: $C_n \equiv 0[7]$ يكافئ: $(4n+3)\times 3^{6n+2}+4^{6n+1}\equiv 0[7]$ ومنه: $(4n+3)\times 2+(-3)^{6n+1}\equiv 0[7]$ ومنه:

$8n+6+(-1)^{6n+1}\times 3^{6n+1}\equiv 0[7]$ ومنه: $n+6-1\times 3\equiv 0[7]$ نجد: $n-3\equiv 0[7]$ وأخيرا: $n=7k+3$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(z-\sqrt{3}+1\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0.....(*)$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$. **الحل:** $z_0=\sqrt{3}-1$ ، $\Delta=-4=(2i)^2$ ، $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطة A صورة العدد الحقيقي $z_A=\sqrt{3}-1$ ،
والنقطتين B وC صورتي العددين المركبين: $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\overline{z_B}$

أ) أكتب على الشكل الأسي كل من الأعداد: z_A ، z_B و z_C ؛ ثمّ أنشئ هندسيا النقط: B ،C وA

الحل: $z_A=\left(\sqrt{3}-1\right)e^{i0}$ ، $z_B=2e^{i\pi/6}$ و $z_C=2e^{-i\pi/6}$ **الإنشاء أنظر الرسم**

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون $\left(z_B\right)^n$ حقيقيا. **الحل:** $\arg(z_B{}^n)\equiv 0[\pi]$ يكافئ: $n.\frac{\pi}{6}=k\pi$ ويكافئ: $n=6k$ و $k\in\mathbb{N}$

ج) عيّن قيم العدد n الطبيعية حتى يكون $\left(z_B\right)^n$ تخيليا صرفا. **الحل:** $\arg(z_B{}^n)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ يكافئ: $n.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$
ويكافئ: $n.\pi=3.\pi+6k\pi$ ويكافئ: $n=6k+3$ و $k\in\mathbb{N}$

د) أحسب $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017}-\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439}$ **الحل:** نضع: $A=\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017}-\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439}$

$$A=e^{2017i\frac{\pi}{6}}-e^{1438i\frac{\pi}{6}}=e^{i(0+\frac{\pi}{6})}-e^{i(\pi+\frac{4\pi}{6})}=e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{5\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$$

3) أكتب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي. واستنتج طبيعة المثلث ABC.

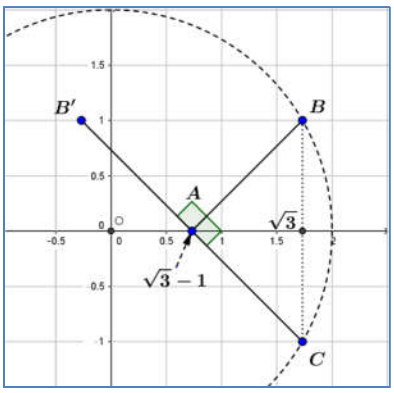
الحل: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+1}=\frac{1+i}{1-i}=i$ ومنه: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث ABC: لدينا $AC=AB$ و $\left(\overline{AC};\overline{AB}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه: ABC قائم متساوي الساقين.

4) ليكن الدوران f الذي مركزه A ويحوّل C إلى B. عيّن زاوية الدوران وأكتب عبارته المركبة.

الحل: من السؤال 3) تنتج زاوية الدوران $\frac{\pi}{2}$ والعبارة هي: $z'-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ وتكافئ:

$z'-\sqrt{3}+1=i\left(z-\sqrt{3}+1\right)$



- لتكن النقطة B' صورة B بالدوران f، بيّن أنّ B' هي صورة C بتناظر يطلب تعيينه.

الحل: لدينا: $B=f(C)$ و $B'=f(B)$ ومنه $B'=f(f(C))$ ، وزاوية مركب دورانين هي مجموع زاويتي كل من الدورانين وعليه:
$\left(\overline{AC};\overline{AB'}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ إذن B' هي صورة C بتناظر مركزه A.

- أحسب $z_{B'}$ لاحقة B' ثمّ أنشئها. **الحل:** $z_{B'}-\sqrt{3}+1=i\left(z_B-\sqrt{3}+1\right)$
وينتج: $z_{B'}=i\left(\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{3}-1$ يكافئ: $z_{B'}=\sqrt{3}-2+i$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{4.e^x}{e^x+1}$ (C) المنحنى الممثل لـf في معلم متعامد ومتجانس، وحدة الطول $1cm$

1) أحسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **الحل:** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. وشكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

الحل: $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2e^{x} + 1}{(e^{x}+1)^2}$ ، إشارتها: $f'(x) = 0$ يكافئ: $x = 0$ و $f'(x) > 0$ يكافئ: $x \neq 0$

إذن: من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ الدالة f متزايدة تماما. **جدول التغيرات**:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2	↗ $+\infty$

3) أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x) = x - 4 + \dfrac{4}{1+e^{x}}$ واستنتج أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 4$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ ثمّ أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

الحل: $f(x) = x - \dfrac{4.e^{x}}{e^{x}+1} = x - 4\dfrac{(e^{x}+1)-1}{e^{x}+1} = x - 4 + \dfrac{4}{e^{x}+1}$

استنتاج معادلة المقارب (Δ) لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-4) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^{x}+1} = 0$

الوضعية النسبية بين (C) والمستقيم (Δ): لدينا: $f(x) - (x-4) = \dfrac{4}{e^{x}+1} > 0$ **ومنه: (C) يقع فوق (Δ)** من أجل $x \in \mathbb{R}$

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل عند $-\infty$ ثمّ أدرس وضعية (C) بالنسبة (Δ).

الحل: معادلة المقارب (Δ') لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-4e^{x}}{e^{x}+1} = 0$

الوضعية النسبية بين (C) وللمستقيم (Δ'): لدينا: $f(x) - x = \dfrac{-4e^{x}}{e^{x}+1} < 0$ **ومنه: (C) يقع تحت (Δ')** من أجل $x \in \mathbb{R}$

4) أ) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0. **الحل:** $y = f'(0)(x-1) + f(0)$ ومنه: $y = -2$

ب) بيّن $f(x) + f(-x) = -4$ ، ماذا تستنتج؟

الحل: $f(x) + f(-x) = x - \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1} - x - \dfrac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} = -\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1} - \dfrac{4}{1+e^{x}} = \dfrac{-4(e^{x}+1)}{e^{x}+1} = -4$

الاستنتاج: $(0;-2)$ مركز تناظر المنحنى (C).

جـ) بيّن أنّ $\Omega\ (0;-2)$ نقطة انعطاف للمنحنى(C).

الحل: ندرس وضعية المماس (T) والمنحنى (C) لدينا: $d(x) = f(x) - (-2) = 2 - \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1} = \dfrac{-2(e^{x}-1)}{e^{x}+1}$

إذن: $d(x) = 0$ يكافئ: $x = 1$ و $d(x) < 0$ يكافئ: $x > 1$ و $d(x) > 0$ يكافئ: $x < 1$

الخلاصة: المماس (T) يخترق البيان في النقطة ذات الفاصلة 0 ومنه $\Omega\ (0;-2)$ نقطة انعطاف.

ملاحظة -طريقة أخرى-: يمكن دراسة إشارة المشتقة الثانية $f''(x)$

د) بيّن أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3.9 \leq \alpha \leq 4$

الحل: f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $[f(3.9) \approx -0.02] \times [f(4) \approx 0.07] < 0$ **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** تنتج أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل α حلا وحيدا لها حيث: $3.9 \leq \alpha \leq 4$

5) أرسم المستقيمين المقاربين (Δ)، (Δ')، المماس (T) والمنحنى (C). **أنظر الرسم أدناه**

6) أ) عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$ على $\mathbb{R}$.

الحل: $\int \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}dx = \int \dfrac{u'}{u}dx = \ln|u| = \ln(e^{x}+1)$

ب) أحسب بالسنتمتر المربع، المساحة A للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 4$. ثمّ عيّن مدوّر A إلى 10^{-2}

الحل: $A = \int_0^4 f(x) - (x-4)dx = \int_0^4 -4\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} + 4dx = 4x - 4\ln(e^{x}+1)\Big|_0^4$

ومنه: $A = 16 - 4\ln(e^{4}+1) + 4\ln(2)\ \text{cm}^2$ تعيين مدوّر A: $A = 2.70\ \text{cm}^2$

7) نعرّف على $\mathbb{R}$ الدالة g كما يلي: $g(x) = |x| - \dfrac{4.e^{|x|}}{e^{|x|}+1}$

أ) بيّن أنّ g زوجية وأرسم (C_g) انطلاقا من (C).

الحل: لدينا: $|x| = |-x|$ ومنه: $g(x) = |x| - \dfrac{4.e^{|x|}}{e^{|x|}+1} = |-x| - \dfrac{4.e^{|-x|}}{e^{|-x|}+1} = g(-x)$ ومنه: g زوجية.

رسم (Cg): لانّ g زوجية فإنّ تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

عندما $x \geq 0$ **لدينا:** $|x| = x$ و $g(x) = f(x)$ ومنه: (Cg) منطبق على (C).

وعندما $x < 0$ نرسم الجزء الآخر من (Cg) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب. **أنظر الرسم**

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m$

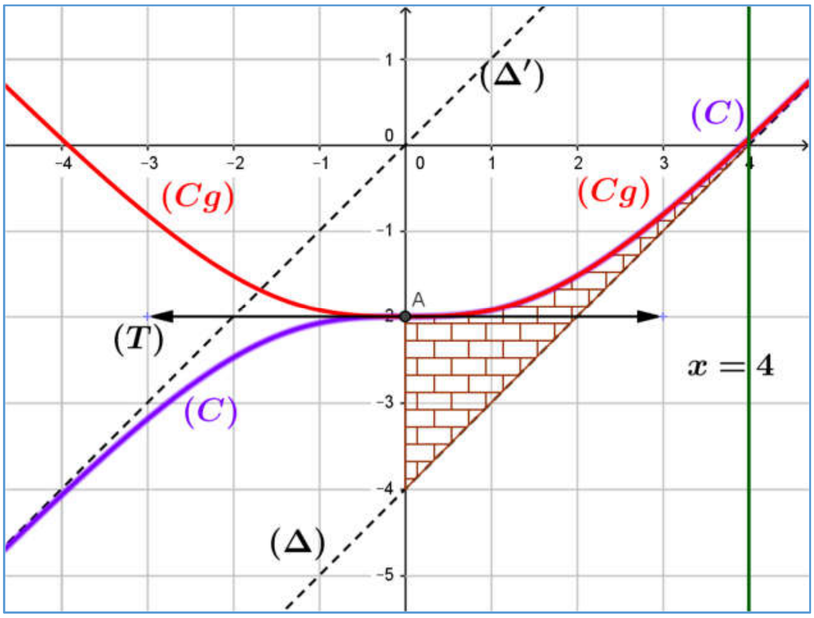
الحل: حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع البيان (Cg) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$ الموازي لمحور الفواصل.

المناقشة:

عندما $m < -2$ لا توجد حلول؛

عندما $m = -2$ يوجد حل مضاعف معدوم.

وعندما $m > -2$ يوجد حلان متعاكسان.



انتهى تصحيح الموضوع الأول

بالتوفيق

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1- جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=2+2i\sqrt{3}......(1) \\ 2\overline{z_1}-z_2=1-i\sqrt{3}......(2) \end{cases}$

الحل: من (1) نجد: $z_1=2+2i\sqrt{3}-\overline{z_2}....(1')$ ومنه: $\overline{z_1}=2-2i\sqrt{3}-z_2$ وبالتعويض في (2) نجد:

$3z_2=4-4i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}$ وعليه : $z_2=1-i\sqrt{3}$ وبالتعويض في (1') نجد: $z_1=1+i\sqrt{3}$

2- لدينا النقط: A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ) أكتب على الشكل المثلثي ثمّ الأسي الأعداد: z_A، z_B و z_C. **الحل:** $z_A=2(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i0}$،

$z_B=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\pi/3}$ و $z_B=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{-i\pi/3}$

ب) أكتب على الشكل الجبري العدد: $t=(z_B{}^7-z_C{}^7)+(z_B{}^{1438}-z_C{}^{1438})$

الحل: لدينا: $z_C=\overline{z_B}$ وينتج: $z_C{}^7=\overline{z_B{}^7};\ z_C{}^{1438}=\overline{z_B{}^{1438}}$ ومنه:

$$\begin{cases} z_B{}^7-z_C{}^7=2^7\times 2i\sin\left(7\frac{\pi}{3}\right)=2^7\times 2i\sin\frac{\pi}{3}=2^7\times 2i\frac{\sqrt{3}}{2}=2^7\times i\sqrt{3} \\ z_B{}^{1438}-z_C{}^{1438}=2^{1438}\times 2i\sin\left(1438\frac{\pi}{3}\right)=-2^{1438}\times 2i\sin\frac{\pi}{3}=-2^{1438}\times 2i\frac{\sqrt{3}}{2}=-2^{1438}i\sqrt{3} \end{cases}$$

وعليه: $t=\left(2^8-2^{1438}\right)\times i\sqrt{3}$

جـ) بيّن أنّ النقط: A، B و C تنتمي إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

الحل: لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ ومنه: $OA=OB=OC=2$ إذن الدائرة قطرها 2

د) أثبت أنّ الرباعيّ $OCAB$ معيّن وأحسب مساحته. **الحل:** لدينا: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}=(1;-\sqrt{3})$ و $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB}=0$

المساحة: $\blacktriangle=4\times 1\times\sqrt{3}/2=2\sqrt{3}u.a$

3- التحويل S الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1-i)z+2i$

أ) بين أنّ A صامدة بالتحويل S، ثمّ عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

الحل: النقطة الصامدة لاحقتها: $z_0=\frac{b}{1-a}=\frac{2i}{1-(1-i)}=2=z_A$ ولدينا: $k=|a|=|1-i|=\sqrt{2}$

و $\theta=\arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}$، ومنه: S تشابه مباشر مركزه A، نسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=\frac{-\pi}{4}$

ب) ماهي طبيعة ومساحة الرباعي $O'C'AB'$ حيث: $B'=S(B)$، $C'=S(C)$ و $O'=S(O)$

الحل: التشابه يحافظ على الزوايا الموجهة و نسبة الأطوال فإنّ $O'C'AB'$ معيّن و**مساحته**: $\blacktriangle'=\sqrt{2}^2\times\blacktriangle=4\sqrt{3}u.a$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقط: $\Omega(2;2;3)$، $A(2;-1;3)$، $B(-3;1;2)$ و $C(1;-2;0)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A، B، و C تعين مستويا نرمز له (p)

الحل: $\overrightarrow{AB}(-5;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;-1;-3)$ ولأنّ: $\frac{2}{-1}\neq\frac{-5}{-1}$ إذن النقط: A، B، و C تعين مستويا (p).

ب) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ ناظمي للمستوي (p) تم استنتج معادلة لـ(p).

الحل: لدينا: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-5+4+1=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-1-2+3=0$

معادلة لـ (p): $x+2y-z+d=0$ و $C(1;-2;0)\in(p)$ ينتج: $d=3$ إذن: $(p):x+2y-z+3=0$

2) أ) أحسب المسافة بيّن Ω و(p). الحل: $d(\Omega;p)=\frac{|2+4-3+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}$

ب) عيّن معادلة لسطح الكرة (s) التي مركزها Ω وتمسّ المستوي(p).

الحل: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$

3) نعتبر المستقيم (Δ) الذي يشمل $E(-2;-1;8)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(3;2;-3)$

أ) عيّن بدلالة الوسيط الحقيقي t تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ). **الحل:** $(\Delta):\begin{cases} x = 3t-2 \\ y = 2t-1; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -3t+8 \end{cases}$

ب) M نقطة من المستقيم (Δ)، عيّن بدلالة t مركبات الشعاع $\overrightarrow{\Omega M}$ **الحل:** $\overrightarrow{\Omega M}\,(3t-4; 2t-3; -3t+5)$

جـ) أحسب المسافة بيّن النقطة Ω والمستقيم (Δ). **الحل:** أولا: نحل المعادلة $\vec{u}_\Delta.\overrightarrow{\Omega M} = 0$ تكافئ:

$3(3t-4)+2(2t-3)+-3(-3t+5)=0$ ونجد: $t_0 = \frac{21}{11}$ ثانيا: نعيين مركبتي الشعاع $\overrightarrow{\Omega M_0}$ من أجل $t = t_0$ فنجد:

$\overrightarrow{\Omega M_0}\left(\frac{19}{11}; \frac{9}{11}; -\frac{8}{11}\right)$ ثالثا نحسب طويلته: $d(\Omega;\Delta) = \left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\| = \frac{1}{11}\sqrt{19^2+9^2+8^2} = \frac{\sqrt{205}}{11} \approx 2.04$

د) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والسطح (s).

الحل: من تمثيل (Δ) نعوض في معادلة (s) نجد: $(3t-4)^2+(2t-3)^2+(-3t+5)^2=6$ تكافئ: $22t^2-66t+44=0$

وتكافئ: $t^2-3t+2=0$ ونجد: $t=1; \quad t=2$ وبالتعويض في تمثيل(Δ) مرة أخرى نجد: $\Omega'(1;1;5)$ و $\Omega''(4;3;2)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. f الدالة المعرفة على المجال $\left[\frac{3}{8}; +\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{8x-3}{2x+1}$

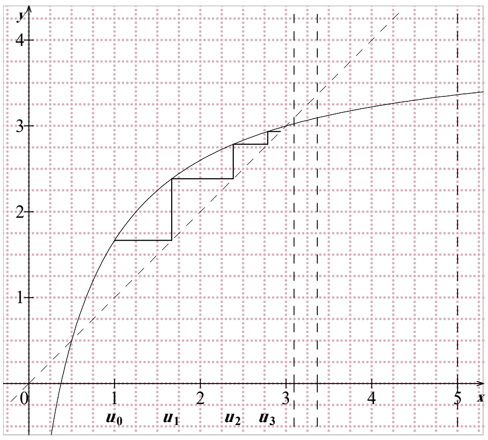
C_f تمثيلها البياني و(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

x	$\frac{3}{8}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow 4$

أ) شكل جدول تغيرات الدالةf، استنتج أنه من أجل $x \in [3/8; +\infty[$ فإنّ: $0 \le f(x) < 4$

الحل: من البيان ينتج **جدول التغيرات المقابل** ونستنتج: أنه من أجل: $x \ge \frac{3}{8}$ فإنّ: $0 \le f(x) < 4$

ب) عيّن العددين الحقيقين α وβحيث $(\alpha > \beta)$، حلّي المعادلة: $f(x) = x$ واستنتج فاصلتي نقطتي تقاطع C_f و(Δ) الذي معادلته $y = x$ ، ثمّ عيّن بيانيا وضعية C_f و(Δ).



الحل: $f(x) = x$ تكافئ: $8x-3 = (2x+1)x$ وتكافئ: $2x^2-7x+3=0$

ويكافئ: $\alpha = 3$ ؛ $\beta = \frac{1}{2}$ وهما فاصلتا نقطتي التقاطع. استنتاج وضعية C_f و(Δ):

عندما: $\frac{3}{8} \le x < \frac{1}{2}$ أو $x > 3$ فإنّ **C_f يقع أسفل (Δ)** و $f(x)-x < 0$

وعندما $\frac{1}{2} < x < 3$ فإنّ **C_f يقع فوق (Δ)** و $f(x)-x > 0$

2) نعرّف(u_n) و (v_n) كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود: u_0، u_1

، u_2و u_3 والحدود: v_0، v_1 و v_2 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء). **الحل:** **أنظر الشكل**

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين: (u_n) و (v_n). **التخمين:** (u_n) متقاربة ومتزايدة، و (v_n) متقاربة ومتناقصة.

3) أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعيn: $1 \le u_n < 3$ و $3 < v_n \le 5$

الحل: أ)**1)** أنّه من أجل: $n \in \mathbb{N}$ فإنّ: $1 \le u_n < 3$

ملاحظة: لأنّ f متزايدة لدينا: من أجل $1 \le x \le 3$ فإنّ: $[f(1) = 1.67] < f(x) \le [f(3) = 3]$ .... (1)

أولا: $1 \le (u_0 = 1) < 3$ (محققة) ثانيا: نفرض: $1 \le u_n < 3$ ونبرهن: $1 \le u_{n+1} < 3$ **البرهان:** لدينا: $1 \le u_n < 3$ ومنه:

$1 \le 1.67 \le f(u_n) < 3$ وأخيرا: $1 \le u_{n+1} < 3$ و هـ م. ثالثا: مما سبق ينتج: من أجل: $n \in \mathbb{N}$ فإنّ: $1 \le u_n < 3$

أ)**2)** البرهان بالتراجع: أنّه من أجل: $n \in \mathbb{N}$ فإنّ: $3 < v_n \le 5$

ملاحظة: لأنّ f متزايدة لدينا: من أجل $3 < x \le 5$ فإنّ: $[f(3) = 3] < f(x) \le [f(5) = 3.36]$ .... (2)

أولا: $3 < (v_0 = 5) \le 5$ (محققة) ثانيا: نفرض $3 < v_n \le 5$ ونبرهن: $3 < v_{n+1} \le 5$ **البرهان:** لدينا: $3 < v_n \le 5$ ومنه:

$3 < f(v_n) \le 3.36 \le 5$ وأخيرا: $3 < v_{n+1} \le 5$ و هـ م. ثالثا: مما سبق ينتج: من أجل: $n \in \mathbb{N}$ فإنّ: $3 < v_n \le 5$

ب) عين اتجاه تغيركل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

الحل: ب) 1) اتجاه تغير (u_n): لدينا: من أجل $1 \le x < 3$ فأنّ: $f(x)-x > 0$ ومنه: $\boxed{u_{n+1}-u_n > 0}$ وينتج: (u_n) متزايدة.

ب) 2) اتجاه تغير (v_n): لدينا: من أجل $x > 3$ فأنّ: $f(x)-x < 0$ ومنه: $\boxed{v_{n+1}-v_n < 0}$ وينتج: (v_n) متناقصة.

4) أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{14}{(2v_n+1)(2u_n+1)}\times\left(v_n-u_n\right)$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(v_n-u_n\right)$

الحل: بعد توحيد المقامات والتبسيط نجد: $(1)...\boxed{v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{14(v_n-u_n)}{(2v_n+1)(2u_n+1)}}$

ونبين أنّ $\frac{1}{7}<\frac{1}{2u_n+1}\le\frac{1}{3}$ وأنّ $\frac{1}{11}\le\frac{1}{2v_n+1}<\frac{1}{7}$ وينتج: $(2)...\boxed{\frac{14}{(2v_n+1)(2u_n+1)}<\left(\frac{14}{21}=\frac{2}{3}\right)}$

وعليه: $\boxed{v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{2}{3}(v_n-u_n)}$

الاستنتاج: لدينا: $u_n<3$ و $v_n>3$ وينتج: $\boxed{0<v_n-u_n}$ أخيرا: $\boxed{0<v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{2}{3}(v_n-u_n)}$ (أعداد موجبة).

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<v_n-u_n<4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

الحل: لدينا: $u_0=1$ و $v_0=5$ و $\boxed{v_0-u_0=4}$

نشكل جملة المتباينات: $\begin{cases} v_n-u_n<\cancel{(v_{n-1}-u_{n-1})}\times\frac{2}{3} \\ \cancel{v_{n-1}-u_{n-1}}<\cancel{(v_{n-2}-u_{n-2})}\times\frac{2}{3} \\ \quad / \quad ... \quad / \\ \cancel{v_1-u_1}<(v_0-u_0)\times\frac{2}{3} \end{cases}$ وبضرب المتباينات طرفا إلى طرف ينتج: $\boxed{0<v_n-u_n<4\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

جـ) استنتج أنّ: $\lim_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$ وأستنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

الحل: لدينا: $0<\lim_{n\to+\infty}v_n-u_n<\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{2}{3}\right)^n$ وينتج: $\boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n-u_n=0}$

تحديد النهاية l: هي حل المعادلة: $\boxed{l=\frac{8l-3}{2l+1}}$ وينتج: $\boxed{l=3}$ أو $l=0.5$ مرفوض

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة f معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ وفسّر النتيجة.

الحل: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=-\infty$ **التفسير:** محور التراتيب مقارب للمنحنى (C).

2) أحسب $f'(x)$ وأستنتج أنّ f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

الحل: $f'(x)=\frac{1+x}{x^2}$ ومنه من أجل $x=-1$: $f'(x)=0$ ولدينا: $-1\notin]0;+\infty[$

إذن: من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)>0$ والدالة f متزايدة تماما. **جدول التغيرات:** ←

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3) أ) عيّن معادلة المماس (T) لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1. **الحل:** $(T):y=2x-2$

ب) أدرس تغيرات الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-(2x-2)$ (لا تُحسب النهايتان)

الحل: $g'(x)=f'(x)-2$ ويكافئ: $g'(x)=\frac{-2x^2+x+1}{x^2}$ إشارتها من إشارة

البسط: $-2x^2+x+1$ الذي ينعدم من أجل $x=-\frac{1}{2}\notin D_g$; $x=1\in D_g$

جـ) شكل جدول تغيراتها. واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

الحل: جدول تغيرات g: وجدول إشارتها **أنظر الجدولين المقابلين**

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	0	↘

x	0	1	$+\infty$
$sgn\,g(x)$	$--$	0	$--$

د) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمماس (T).

الحل: عندما $x\neq1$ المماس يقع فوق المنحنى وعندما $x=1$ (T) و (C) متقاطعان.

وكذلك ينتج **جدول الوضعية التالي:** ←

x	0	1	$+\infty$
$posi(C)(T)$	$\frac{(T)}{(C)}$	X	$\frac{(T)}{(C)}$

4) بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=2$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α، ثم تحقق أنّ: $3.59<\alpha<3.60$

الحل: f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $[f(3.59)\approx 1.99]<2<[f(3.60)\approx 2.003]$ **حسب م.ق.م** تنتج أن المعادلة: $f(x)=2$ تقبل α حلا وحيدا لها.

5) أرسم المماس (T) والمنحنى (C). الرسم: **أنظر الشكل أدناه.**

6) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي k عدد حلول المعادلة: $f(x)=2x+k$

الحل: ليكن المستقيم $(T_k): y=2x+k$ الموازي للمماس (T). الحلول البيانية للمعادلة المعطاة هي فواصل نقط تقاطع (T_k) والمنحنى (C). وحسب الوضعية النسبية لهما المدروسة أعلاه نجد:

عندما $k>-2$ لا توجد حلول؛ عندما $k=-2$ يوجد حل مضاعف وعندما $k<-2$ يوجد حلان.

7) أ) بيّن أنّ الدالة: $x\mapsto x.\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

الحل: $(x.\ln x-x)'=\ln x$

ب) أحسب المساحة A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C)، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$, $x=\alpha$ حيث α هي القيمة المعرّفة في السؤال 4).

الحل:

$$A=\int_1^{\alpha} f(x)dx=\int_1^{\alpha}\frac{x-1}{x}+\ln x\,dx=$$

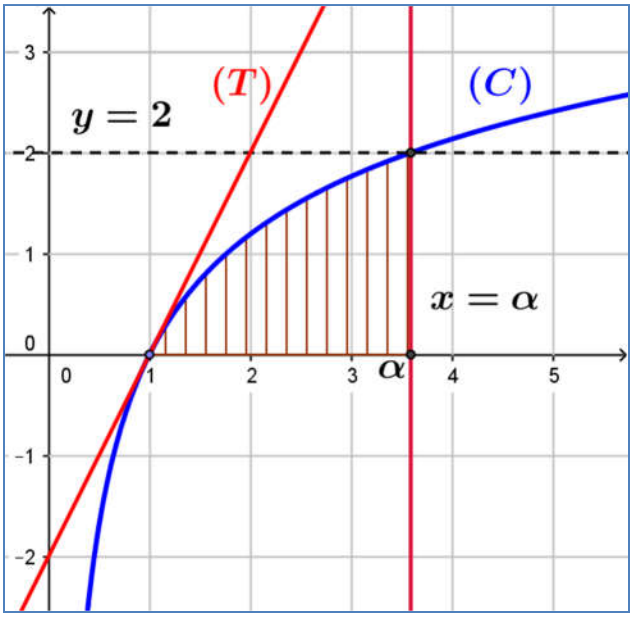
$$\int_1^{\alpha} 1-\frac{1}{x}+\ln x\,dx=[-\ln x+x\ln x]_1^{\alpha}$$

منه: $\boxed{A=-\ln\alpha+\alpha\ln\alpha}\,u.a$ حيث:

$3.59<\alpha<3.60$

جـ) عيّن حصرا للعدد A.

الحل: $\boxed{3.31<A<3.33}$



انتهى تصحيح الموضوع الثاني

بالتوفيق