

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الاولالتمرين الأول (04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1; 0; 1)$ ، $B(2; -1; 1)$ و $C(0; 1; 1)$

1. تحقق ان النقط A ، B و C لاتعين مستويا وحيدا

2. (P_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $mx - y + (2 - m)z + m + 4 = 0$ ، (m عدد حقيقي)

(ا) بين ان (P_m) مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

(ب) بين ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

3. (ا) احسب احداثيات النقطة H المعرفة بـ $\vec{0} = 2\vec{HA} - \vec{HB} + e.\vec{HC}$: (e اساس اللوغارتم النيبيري)

(ب) احسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ)

4. (ا) اوجد (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + e.\vec{MC}\| = \sqrt{5} \cdot (1 + e)$

(ب) اوجد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S)

التمرين الثاني (05):

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول: $(I) \dots z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

▪ اكتب الحلول على الشكل المثلثي

2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقط، والتي لواحقها على الترتيب: $z_A = 2i$

$z_C = \overline{z_B}$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ ، وليكن العدد المركب L حيث: $L = \frac{(1-i)z_B}{z_C}$

(ا) اكتب العدد L على الشكل الاسي ثم احسب L^{2016}

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف

3. (ا) بين انه يوجد دوران r مركزه B ويحول A الى C ، يطلب تعيين زاويته.

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

4. (ا) عين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب

(ب) عين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح \mathbb{R}

التمرين الثالث (04):

1. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - x \ln x$. ادرس تغيرات الدالة f

2. (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ: $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

احسب الحدود: u_1, u_2, u_3, u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها

3. $v_n = \ln(u_n)$ متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ : $v_n = \ln(u_n)$

(ا) اثبت ان : $v_n = n - n \ln(n)$

(ب) باستعمال الدالة f ، ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة

(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 < u_n \leq e$

(د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

التمرين الرابع (07):

الجزء 1:

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ حيث

الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور الترتيب

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

2. (ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$

(ب) احسب نهاية f عند $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3. نعتبر على المجال $]-1; +\infty[$ الدالة g المعرفة بـ : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$

(ا) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$

(ب) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(t)$ من اجل t موجب تماما

4. (ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

(ب) استنتج ان f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

(ج) انشئ (C_f)

الجزء 2:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين ان : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$

3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = \ln 4$ ، $y = 0$

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الثانيالتمرين الأول (3.5):

نعتبر المعادلة $(E): 3x - 8y = 5$ حيث x و y صحيحان نسبيان

(1) اثبت ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث $x = 8k - 1$ ، $y = 3k - 1$ ، $k \in \mathbb{Z}$

(2) ا) لتكن n, x و y ثلاثة اعداد صحيحة تحقق $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ اثبت ان $(x; y)$ حل للمعادلة (E)

ب) نعتبر الجملة $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح. اثبت ان n حل للجملة (S) اذا وفقط اذا كان $n \equiv 23[24]$

(3) تأكد ان 2015 حل للجملة (S) ثم استنتج ان $1 - 2015^{1436}$ يقبل القسمة على 24

التمرين الثاني (4.5):

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس نعتبر النقط $A(-2; -1; 3)$ ، $B(1; 3; 5)$ ، $C(2; -\frac{1}{2}; -4)$ و $D(2; -2; -3)$

$$\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = -\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2 t) \end{cases} ; t \in]0; +\infty[$$

التالي معرف بالتمثيل الوسيطى (Δ) والمستقيم $F(1; -1; 1)$ ، $E(1; -1; 2)$ ،

1. ا) بين ان النقط A, B, C تعين مستويا (ABC)

ب) تحقق ان الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له

2. ا) اوجد \vec{u} احد اشعة توجيه المستقيم واحداثيات نقطة منه (Δ)

ب) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من المستقيم (Δ) اوجد EM^2 بدلالة t

ج) اوجد اصغر قيمة EM^2 ثم استنتج المسافة بين النقطة E والمستقيم (Δ) واستنتج احداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على

المستقيم (Δ)

د) اكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E ويمس المستقيم (Δ)

3. ا) بين ان المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الثالث (05):

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود: $P(z) = z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$

1. ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3} + i)^2$ ثم استنتج في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C} حلول المعادلتين: $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ و

$$z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

ب) تحقق انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D ذات اللاحقات $z_A = \sqrt{3} + i$

$$z_D = -z_B \text{ و } z_C = -z_A, z_B = -1 + \sqrt{3}i,$$

(ا) اكتب الاعداد المركبة A, B, C, D على الشكل الاسي.

(ب) علم النقط A, B, C, D ثم بين انها تنتمي الى الدائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

(ج) بين ان $i = \frac{z_A + z_B}{z_A + z_D}$ ثم اعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A + z_B}{z_A + z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث ABD

3. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$

(ا) عين طبيعة التحويل T محدد عناصره المميزة

(ب) تحقق ان $T(A) = B$ ، $T(B) = C$ ، $T(C) = D$

(ج) بين انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z') = P(z)$

(د) احسب $P(z_A)$ ثم استنتج مرة اخرى حلول المعادلة $P(z) = 0$

التمرين الرابع (07):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2 + 1)$; $x > 0$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

. I .

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسياً

3. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4. بين انه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \geq 0$ بحيث $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق ان: $4.6 < \alpha < 4.7$

5. اكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1

II . دالة معرفة على $[0; +\infty[$ ب: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1. احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g' واستنتج اشارتها على المجال $[0; +\infty[$

2. حدد اتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

3. انشئ (D) و (C_f)

. III .

1. من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع: $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$

▪ احسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (D) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$ ثم احسب $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$

التنقيط	التصحيح المفصل	التصحيح المفصل	التنقيط
0.5	<p>معناه: $t = -\frac{2}{3}$: $\begin{cases} x_{H'} + 2y_{H'} + z_{H'} - 3 = 0 \\ x_{H'} = -1 + t \\ y_{H'} = 4 + 2t \\ z_{H'} = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$</p> <p>ومنه $H' \left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{2}{3} \right)$</p> <p>$d(H; (\Delta)) = HH' = \frac{5}{\sqrt{3}}$</p> <p>4. (ا) إيجاد مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $\ 2\vec{MA} - \vec{MB} + e\vec{MC}\ = \sqrt{5}(1+e)$</p> <p>معناه: $\ (2-1+e)\vec{MH}\ = \sqrt{5}(1+e)$</p> <p>$\ \vec{MH}\ = \sqrt{5}$ ومنه (S) سطح كرة مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{5}$</p> <p>(ب) إيجاد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S) المستويات (P_m) تمس المجموعة (S) معناه:</p>	<p>التمرين 01: التحقق ان النقط C و B, A لاتعين مستويا وحيدا:</p> <p>$\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$</p> <p>بما ان: $\vec{AB} = -\vec{AC}$ فان الشعاعين \vec{AC}, \vec{AB} مرتبطان خطيا وبالتالي النقط C و B, A على استقامة واحدة ومنه النقط C و B, A تعين ملا نهاية من المستويات وهي حزمة المستويات المتقاطعة وفق المستقيم المار بالنقط الثلاث</p> <p>2. $P(m)$ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:</p> <p>$mx - y + (2-m)z + m + 4 = 0$ عدد حقيقي m</p> <p>(ا) نبين ان $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m: لدينا من اجل كل m من \mathbb{R} الثلاثية $(m; -1; 2-m) \neq (0; 0; 0)$ ومنه $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m</p> <p>(ب) نبين ان جميع المستويات $P(m)$ تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له:</p> <p>$mx - y + (2-m)z + m + 4 = 0$ يكافئ $(-y + 2z + 4) + m(x - z + 1) = 0$ يكافئ $(x - z + 1) = 0$ و $(-y + 2z + 4) = 0$</p> <p>منه (Δ) معرف بالجملة: $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ -y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ اي ان $\begin{cases} x = -1 + z \\ y = 4 + 2z \end{cases}$ بوضع $z = t$ عدد حقيقي</p> <p>ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$</p>	0.5
0.75	<p>التمرين 02: نحل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$</p> <p>$\Delta = -4$ ومنه $z_1 = \sqrt{3} - i$ او $z_2 = \sqrt{3} + i$ ومنه $S = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i\}$</p> <p>كتابة الحلول على الشكل المثلي:</p> <p>$z_1 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$</p> <p>$z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$</p> <p>(2) كتابة العدد L على الشكل الاسي ثم حساب L^{2016}</p> <p>لدينا: $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$</p> <p>$L = \frac{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ ومنه $1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$</p> <p>$L^{2016} = \sqrt{2}^{2016} e^{i2016\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}^{2016} e^{i168\pi}$</p> <p>$L^{2016} = \sqrt{2}^{2016}$</p> <p>(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n تخيلي صرف:</p> <p>لدينا: $L^n = \sqrt{2}^n e^{i(n\frac{\pi}{12})}$, $L = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$</p> <p>$L^n$ عدد تخيلي صرف معناه $n\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $k \in \mathbb{N}, n = 12k + 6$</p>	<p>3. (ا) حساب احداثيات النقطة H حيث:</p> <p>$2\vec{HA} - \vec{HB} + e\vec{HC} = \vec{0}$</p> <p>بما ان: $2 - 1 + e \neq 0$ فان النقطة H موجودة ووحيدة هي مرجح الجملة $\{(A; 2); (B; -1); (C; e)\}$</p> <p>$\begin{cases} x_H = \frac{2x_A - x_B + ex_C}{2-1+e} = 0 \\ y_H = \frac{2y_A - y_B + ey_C}{2-1+e} = 1 \\ z_H = \frac{2z_A - z_B + ez_C}{2-1+e} = 1 \end{cases}$ ومنه $H = C(0; 1; 1)$</p> <p>(ب) المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ): لتكن النقطة H' المسقط العمودي (Δ), $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيهه، $\vec{HH'} \begin{pmatrix} x_{H'} \\ y_{H'} - 1 \\ z_{H'} - 1 \end{pmatrix}$</p> <p>معناه $\begin{cases} \vec{HH'} \cdot \vec{u} = 0 \\ H' \in (\Delta) \end{cases}$</p>	0.5

$$u_2 = \frac{e^2}{4} \approx 1.85, u_1 = e \approx 2.71 \quad (1)$$

$$u_4 = \frac{e^4}{256} \approx 0.21, u_3 = \frac{e^3}{27} \approx 0.74,$$

$$0 < u_5 = \frac{e^5}{3125} \approx 0.05, \text{ متناقصة ونهايتها } 0$$

$$(a) \text{ اثبات ان: } v_n = n - n \ln(n)$$

$$v_n = \ln n = n - n \ln n \quad (1)$$

(ب) ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة:

$$v_n = f(n) \text{ والدالة } f \text{ متناقصة على المجال } [1; +\infty[$$

وبالتالي (v_n) متناقصة وبما ان $u_n = e^{v_n}$ والدالة الاسية

متزايدة فان اتجاه تغير (u_n) هو اتجاه تغير (v_n) اي (u_n)

متناقصة

(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$0 < u_n \leq e$$

بما ان (u_n) متناقصة فان $u_n \leq u_0 = e$ ولدينا

$$0 < u_n \leq e \text{ اي } u_n > 0 \text{ وبالتالي } e^n > 0, n^n > 0$$

(د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة.

ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -\infty$ اي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty$$

التمرين 04:

الجزء 1: $D_f = \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

$$(2) \text{ بوضع } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \right]$$

$$\text{ومنه } \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+t)}{t} \right] = 1 \text{ نجد: } t = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 1$

بجوار $-\infty$

(3) (ا) لدينا من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = e^{-x} [\ln e^x + \ln(e^{-x} + 1)] \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$$

(ب) حساب نهاية f عند $+\infty$ وتفسيرها هندسيا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ لان}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) \right] = 0$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 0$

بجوار $+\infty$

$$(4) D_g =]-1; +\infty[, g(x) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

(ا) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

من اجل كل عدد حقيقي t من $[0; +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2}$$

(1) (ا) نبين انه يوجد دوران r مركزه النقطة B ويحول A الى C

يطلب تعيين زاويته:

ليكن r تحويل عبارته المركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث

b, a عددان مركبان

$$\text{لدينا معناه } \begin{cases} r(A) = C \\ r(B) = B \end{cases} \text{ ومنه: } a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = z_B(1 - a) = 2\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } z' = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2\sqrt{3}$$

$$|a| = \left| -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

فان r هو دوران مركزه B وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

(ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته

$$\text{لدينا: } \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{2\pi}{3} \text{ و } AB = BC$$

المثلث ABC متقايس الاضلاع

$$\text{لتكن } z_{B'} = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, [AC]$$

ارتفاع وعمود ومتوسط ومحور متعلق ب: $[AC]$ في

$$\text{المثلث } ABC \text{ المتقايس الضلعين مساحته } S = \frac{BB' \times AC}{2}$$

$$BB' = |z_{B'} - z_B| = 1, AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } S = \sqrt{3}ua$$

(1) (ا) تعيين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

$$\text{العدد } \frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i} = \frac{z - z_C}{z - z_A} \text{ حقيقي موجب: لدينا}$$

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ معناه } \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = (\overline{MA}; \overline{MC}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$ هي

(ب) تعيين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

$$iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta} \text{ عندما } \theta \text{ يمسح } \mathbb{R}$$

لدينا: $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ اي $iz = i(i + \sqrt{3} + 2e^{i\theta})$

$$z = \sqrt{3} + i + 2e^{i\theta}$$

$z = z_B + 2e^{i\theta}$ ، θ يمسح \mathbb{R} ومنه: (E_2) هي دائرة مركزها

النقطة B ونصف قطرها 2

التمرين 03:

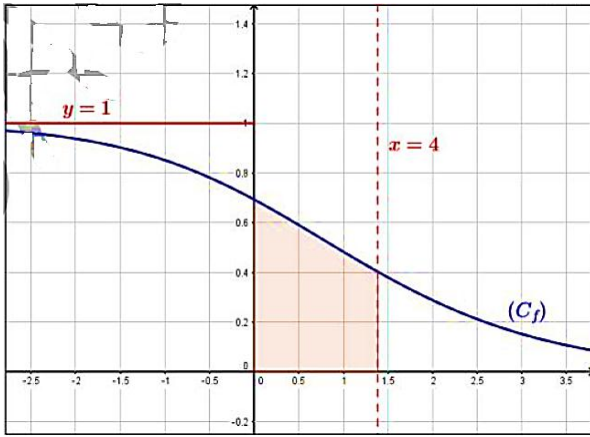
(1) دراسة تغيرات الدالة f

$$f'(x) = -\ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		0	$-\infty$

احسب الحدود: u_5, u_4, u_3, u_2, u_1 ثم ضع تخميننا حول اتجاه

0.5



تغيرها ونهايتها

0.5

نلاحظ انه من اجل كل عدد حقيقي t من $[0; +\infty[$: $g'(x) < 0$

جدول التغيرات :

t	0	$+\infty$
$g'(t)$		-
$g(t)$	0	$-\infty$

0.5

0.75

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما

ان t : $g(t) < 0$

(1) حساب $f'(x)$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + \frac{e^x}{1+e^x} \times e^{-x}$$

0.5

ومنه بعد التبسيط نجد : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

(ب) من اجل كل عدد حقيقي x نضع $t = e^x$ نجد $\frac{g(t)}{t} < 0$ ومنه

نجد $0 < \frac{g(e^x)}{e^x} < 0$ اي $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة على مجموعة

تعريفها

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0

0.5

(ج) انشاء (C_f) : (انظر في اخر الصفحة)

الجزء 2: $\int_0^x f(t) dt$

0.5

(1) لدينا من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

(2) حساب التكامل بالتجزئة :

نضع : $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ و $\begin{cases} u(t) = \ln(1 + e^t) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ ومنه :

0.75

$$F(x) = [\ln(1 + e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x -e^{-t} \times \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

$$F(x) = [\ln(1 + e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$$

$$F(x) = [\ln(1 + e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt$$

$$= -f(x) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + 2 \ln 2$$

(3) حساب المساحة :

0.75

$$\int_0^{\ln 4} f(x) dx = \left[-f(x) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + 2 \ln 2 \right]_0^{\ln 4}$$

بعد الحساب نجد :

$$\int_0^{\ln 4} f(x) dx = \frac{-25 \ln 5}{2} + 10 \ln 2 \text{ cm}^2$$

التنقيط	التصحيح المفصل	التصحيح المفصل	التنقيط
0.5	<p>تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي :</p> $2x - 2y + z = 1$ <p>1 (ا) إيجاد \vec{u} احد اشعة توجيه المستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي</p> $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ x = -\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2t) \end{cases}$ <p>هو [0; +∞[; t ∈]0; +∞[يكافئ</p>	<p>التمرين 01 :</p> <p>1. اثبت ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات</p> $k \in \mathbb{Z}; y = 3k - 1; x = 8k - 1$ <p>ومنه : $3(x + 1) = 8(y + 1)$</p> <p>3 يقسم الجداء $8(y + 1)$ واولي مع فهو يقسم $y + 1$</p> <p>يعني $y = 3k - 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبتعويض في نجد $x = 8k - 1$</p> $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ <p>يستلزم $3x + 2 = 8y + 7$ يعني $3x - 8y = 5$</p> <p>ومنه $(x; y)$ حل للمعادلة (E)</p>	0.5
0.75	<p>2 (ا) إثبات ان $(x; y)$ حل للمعادلة (E) :</p> $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ <p>(ب) اثبت ان n حل للجملة (S) اذا و فقط اذا كان $n \equiv 23[24]$</p> <p>EM^2 بدلالة t</p> $EM^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2$ $EM^2 = (\ln(t))^2 + (\ln(t))^2 + (\ln(t) - 1)^2$ $EM^2 = 3(\ln(t))^2 - 2\ln(t) + 1$	<p>2. اثبات ان $(x; y)$ حل للمعادلة (E) :</p> $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ <p>(ب) اثبت ان n حل للجملة (S) اذا و فقط اذا كان $n \equiv 23[24]$</p> <p>$(x; y)$ حل للمعادلة (E) حسب السؤال 2 (ا) ومنه</p> $x = 8k - 1 \text{ و } y = 3k - 1$ <p>اذن $n = 3x + 2 = 24k - 1$</p> <p>يعني : $n \equiv -1[24] \equiv 23[24]$</p> <p>فرض ان $n - 2 = 24k + 21$ ومنه</p> $\begin{cases} n - 7 = 24k + 16 \\ n - 7 = 8(8k + 7) \end{cases}$ <p>يعني $n - 7 = 8(8k + 7)$</p> <p>3 (ا) تأكد ان 2015 حل للجملة (S) :</p> <p>لدينا $2015 = 3 \times 671 + 2$ يعني $2015 \equiv 2[3]$ و</p> <p>يعني $2015 = 8 \times 251 + 7$ يعني ان $2015 \equiv 7[8]$</p> <p>اذن $2015 \equiv 23[24]$ اذن $2015 \equiv (-1)^{1436} [24] \equiv 1[24]$</p> <p>$2015^{1436} - 1 \equiv 0[24]$ اخيرا</p> <p>يعني ان $2015^{1436} - 1$ يقبل القسمة على 24</p>	0.5 0.5 0.75 0.75
0.25	<p>ج) إيجاد اصغر قيمة $EM^2 = f(t)$ وندرس اتجاه</p> <p>تغير الدالة f نجد ان $f'(t) = \frac{2(3\ln(t)-1)}{t}$ تنعدم f' عند</p> <p>$t = e^{\frac{1}{3}}$ وسالبة على المجال $]0; e^{\frac{1}{3}}[$ ومنه f متناقصة على المجال $]0; e^{\frac{1}{3}}[$</p> <p>و متزايدة على المجال $]e^{\frac{1}{3}}; +\infty[$ اذن اصغر قيمة تصلها</p> <p>EM^2 عندما $t = e^{\frac{1}{3}}$ اي $EM^2 = \frac{2}{3}$ ومنه المسافة بين النقطة E والمستقيم (Δ) هي $\frac{2}{3}$</p> <p>د) استنتاج احداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم</p> <p>(Δ) نعوض في التمثيل الوسيطي $t = e^{\frac{1}{3}}$ هي $H\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$</p> <p>و كتابة معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E ويمس</p> <p>المستقيم (Δ) هي مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث</p> $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + \frac{16}{3} = 0$ $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{2}{3}$	<p>3. تأكد ان 2015 حل للجملة (S) :</p> <p>لدينا $2015 = 3 \times 671 + 2$ يعني $2015 \equiv 2[3]$ و</p> <p>يعني $2015 = 8 \times 251 + 7$ يعني ان $2015 \equiv 7[8]$</p> <p>اذن $2015 \equiv 23[24]$ اذن $2015 \equiv (-1)^{1436} [24] \equiv 1[24]$</p> <p>$2015^{1436} - 1 \equiv 0[24]$ اخيرا</p> <p>يعني ان $2015^{1436} - 1$ يقبل القسمة على 24</p> <p>التمرين 02 :</p> <p>1. اثبات ان النقط C, B, A تعين مستويا (ABC) لدينا</p> $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ <p>فان النقط C, B, A بما ان $\frac{3}{4} \neq 8$</p> <p>تعين مستويا</p> <p>2 (ب) التحقق ان الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) نحسب</p> <p>$\vec{AC} \cdot \vec{n} = 8 - 7 - 1 = 0$ و $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 6 - 8 + 2 = 0$</p> <p>اذن محققة</p>	0.5 0.5 0.75 0.5 0.5
0.5	<p>2 (ا) تبين ان المثلث ABC قائم في A لدينا $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ ومنه</p> <p>محققة</p> <p>حساب مساحة المثلث $ABC : S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{87}{4}$</p> <p>ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD نحسب</p> <p>$d(D; (ABC)) = \frac{4}{3}$ ومنه الحجم</p> $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d = \frac{87}{9}$	<p>2 (ب) تبين ان المثلث ABC قائم في A لدينا $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ ومنه</p> <p>محققة</p> <p>حساب مساحة المثلث $ABC : S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{87}{4}$</p> <p>ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD نحسب</p> <p>$d(D; (ABC)) = \frac{4}{3}$ ومنه الحجم</p> $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d = \frac{87}{9}$	0.5
0.5	<p>حساب مساحة المثلث $ABC : S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{87}{4}$</p> <p>ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD نحسب</p> <p>$d(D; (ABC)) = \frac{4}{3}$ ومنه الحجم</p> $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d = \frac{87}{9}$	<p>حساب مساحة المثلث $ABC : S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{87}{4}$</p> <p>ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD نحسب</p> <p>$d(D; (ABC)) = \frac{4}{3}$ ومنه الحجم</p> $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d = \frac{87}{9}$	0.5

لندرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2) + 1 - 1}{x} = 0$$

ومنه قابلة للاشتقاق على يمين 0 والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0; 1)$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f

0.5 حساب المشتق: الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

حيث $f'(x) = x(3 - 2 \ln x) - x$ ومنه

$$f'(x) = 2x(1 - \ln x)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1 - \ln x)$ لأن $2x > 0$

$f'(x) \geq 0$ يكافئ $(1 - \ln x) \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 1$

أي $x \leq e$ أي $x \in]0; e]$ إذن:

$f'(x) \geq 0$ يكافئ $x \in]0; e]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ونستنتج $f'(x) \leq 0$ يكافئ $x \in]e; +\infty[$ ومنه الدالة f

متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}e^2 + 1$	$-\infty$

0.5 تبيان انه يوجد عدد حقيقي α وحيد حيث $\alpha \geq 0$

0.5 $f(\alpha) = 0$ من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما

على $]e; +\infty[$ ومستمرة على هذا المجال ولدينا:

و $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ إذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل

حلا α وحيدا في المجال $]e; +\infty[$ يحقق $f(\alpha) = 0$

التحقق ان: $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$ لدينا $\times (4.7)$

$f(4.6) < 0$ ومنه $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$

(2) كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات

الفاصلة 1:

$(D): y = f'(x)(x - 1) + f(1)$ ومنه:

$$(D): y = 2x + \frac{1}{2}$$

لدينا $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث

$g'(x) = f'(x) - 2$ أي $g'(x) = 2x(1 - \ln x)$

0.5 الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث:

$g''(x) = 2(1 - \ln x) + 2x \left(-\frac{1}{x}\right)$

$$g''(x) = -2 \ln x$$

التمرين 03:

1. (ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3} + i)^2$

0.25

$$(\sqrt{3} + i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

استنتاج: $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ معناه: $z^2 = (\sqrt{3} + i)^2$ معناه:

$$z = -\sqrt{3} - i \text{ او } z = \sqrt{3} + i$$

0.5

$$z^2 = (i(\sqrt{3} + i))^2 \text{ معناه: } z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\text{معناه: } z = 1 - \sqrt{3}i \text{ او } z = -1 + \sqrt{3}i$$

$$S = \{-\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i; 1 - \sqrt{3}i; -1 + \sqrt{3}i\}$$

(ب) التحقق: $P(z) = (z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)$

$$= z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$$

0.25

2. (ا) اكتب الاعداد المركبة A, B, C, D على الشكل الاسي

$$z_C = 2e^{i(\frac{7\pi}{6})}, z_B = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}, z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

0.5

$$z_D = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

(ب) تعليم النقط:

0.5

$OA = OB = OC = OD = 2$ ونصف قطر الدائرة هو 2

0.5

$$\frac{z_A + z_B}{z_A + z_D} = \frac{z_A - z_D}{z_A - z_B} = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ و } \frac{z_A + z_B}{z_A + z_D} = i$$

0.25

التفسير: $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{2}$ و $AD = AB$

فالمثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

0.75

$$3. T: z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$$

0.5

(ا) عين طبيعة التحويل T محدد عناصره المميزة

T دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

(ب) التحقق: $T(A) = B$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_B$

$$T(B) = C \text{ معناه } e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_C$$

$$T(C) = D \text{ معناه } e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_D$$

0.5

$$P(z') = P(e^{i\frac{\pi}{2}}z) = (iz)^4 + 8 - 8\sqrt{3}i = P(z)$$

0.25

$$P(z_A) = 0$$

0.25

لدينا: $P(z_A) = P(z_B)$ ومنه $P(z_B) = 0$

$$P(z_C) = 0 \text{ ومنه } P(z_B) = P(z_C)$$

$$P(z_D) = 0 \text{ ومنه } P(z_C) = P(z_D)$$

0.25

إذا حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي:

$$S = \{-\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i; 1 - \sqrt{3}i; -1 + \sqrt{3}i\}$$

التمرين 04:

1. لدينا $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2 + 1; x > 0)$

0.25

$$f(0) = 1$$

2. حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

0.25

3. دراسة قابلية اشتقاق f عند 0

من الواضح ان f غير قابلة للاشتقاق عند لانها ليست نعرفة على يسار

0.5

0

2) استنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$:

بما ان $0 < x < 1$ اي $0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1$ فان

$$f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$$

حسب السؤال 2 من الجزء II اي من اجل $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ فان

$$f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$$

وبالتالي : ولدينا : $A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 (f(x) - (2x + \frac{1}{2})) dx$

$$f(x) - (2x + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x$$

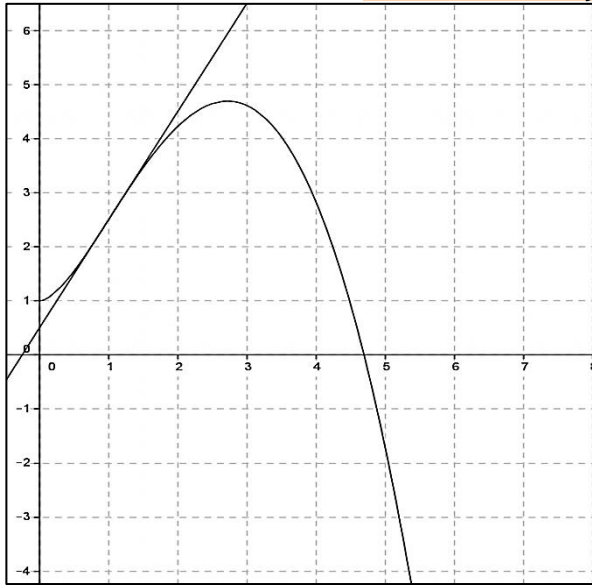
ومنه : $A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n$ بعد التبسيط نجد :

$$A(n) = \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3} \left(\frac{\ln(n)}{n^3} \right) + \frac{1}{9} \right) \times 4cm^2$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0$ ومنه نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \frac{4}{9}$$



دراسة اتجاه تغير g'

$g''(x) \geq 0$ يكافئ $-2 \ln x \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 0$ يكافئ

$0 < x \leq 1$ اذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0; 1]$

$g''(x) < 0$ يكافئ $-2 \ln x < 0$ يكافئ $\ln x > 0$

يكافئ $x < 1$ اذن الدالة g' متناقصة تماما على $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g' :

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-
$g'(x)$		0	

اشارة الدالة g' على المجال $]0; +\infty[$:

من جدول التغيرات الدالة g' نجد من اجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) \leq 0$$

4. تحديد اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال 1. $g'(x) \leq 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على

المجال $]0; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	1	0	

من جدول تغيرات الدالة g نجد : $g(x) \geq 0$ من اجل $x \in]0; 1]$ ،

$$g(x) \leq 0$$
 من اجل $x \in]1; +\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة الى يعود الى (D) دراسة اشارة

$$f(x) - 2x - \frac{1}{2}$$
 الفرق اشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

5. انشاء (C_f) و (D) :

6. (1) حساب بدلالة باستعمال الكاملة بالتجزئة :

لدينا : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right. \text{ ونضع : } \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{array} \right. \text{ ومنه : } \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

اذن : $I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{3} x^2 \times \frac{1}{x} dx$

$$I_n = \frac{1}{3n^3} \left(\frac{1}{3} + \ln n \right) - \frac{1}{9}$$

0.75

0.75

0.5

0.25

0.25

0.25

0.5

0.5

0.75