الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الونشريسي – حي النصر . | السنة الدراسية : 2017/2016

الشعبة علوم تجريبية | دورة مــــــــــــايـــــــــ 2017

اختبار في مادة الرياضيات | المـــــــــــدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: 05 ن

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$ و من اجل العدد الطبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{6}{5}$

أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n-2\succ 0$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

❷ (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

ب) نضع $\alpha=-2$ اكتب عبارة v_n بدلالة n .

جـ) احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$.

❸ (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=\ln(v_n)$.

أ) أكتب عبارة w_n بدلالة n ، ثم استنتج أن (w_n) متتالية حسابية .

ب) نضع : $p_n=v_0\times v_1\times....\times v_n$. أكتب عبارة $\ln(P_n)$ بدلالة n ، ثم استنتج P_n بدلالة n .

التمرين الثاني : 04 ن

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقطة $A(2;-4;1)$ و المستقيم (Δ) حيث : $t\in\mathbb{R}$ ، $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1-2t\\ z=-1+t\end{cases}$

❶ عين معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة A والمستقيم (Δ) .

❷ عين إحداثيات النقطة C من (Δ) بحيث يكون $(AC)\perp(\Delta)$.

❸ تحقق أن النقطة $B(2;-3;0)$ نقطة من (Δ) ثم استنتج مساحة المثلث ABC .

❹ أحسب المسافة بين النقطة $D(0;0;2)$ والمستوي (P) ، ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

❺ ادرس وضعية المستقيم (Δ) مع (AD)

اقلب الورقة

✍التمرين الثالث: 04 ن

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=2Z_B$.

❶اكتب على الشكل المثلثي العدد Z_A ثم استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين Z_B ، Z_C .

❷ احسب العدد $\left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^{2017}$ ، عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عدد حقيقيا سالبا تماما .

❸ لتكن (C) دائرة مركزها النقطة I ذات اللاحقة 3 و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

أ) اكتب العدد $\frac{Z_C-3}{Z_A-3}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث IAC .

ب) بين أن النقط A ، B ، C تنتمي الى الدائرة (C) .

❹ عين لاحقة كل من النقطتين E و D بحيث يكون الرباعي $ABDE$ مستطيل مركزه I.

✍التمرين الرابع: 07 ن

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

❷ ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ أ) بين انه من اجل كل x من $]-2,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+2)^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها ..

❸ أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) .

❹ اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

❺ ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f) .

❻ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ و $x=1$ و $y=0$.

III) h الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $h(x)=|x+1|+\frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$

- انطلاقا من المنحنى (C_f) ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم .

✍ التمرين الأول: 04ن

الموضوع الثاني

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ،

نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ والتي تحقق : $x^2+y^2+z^2+x-\frac{1}{4}=0$

❶ بين أن (S) هي سطح كرة محددا مركزها ω ونصف قطرها .

❷ نعتبر النقط $E(2;3;-2)$ ، $F(-1;0;1)$ من الفضاء و H المسقط العمودي للنقطة ω على المستقيم (EF)

أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EF) .

ب) عين إحداثيات النقطة H .

جـ) أثبت أن المستقيم (EF) مماس لسطح الكرة (S) .

❸ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية $2x-y+z+1=0$

أ) أحسب بعد النقطة ω عن المستوي (P) .

ب) إستنتج تقاطع سطح الكرة (S) و المستوي (P) ، لا يطلب تحديد نقاط التقاطع .

✍ التمرين الثاني: 04 ن

❶ (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث : $\begin{cases}\ln u_1+\ln u_5=-12\\ \ln u_2-\ln u_4=4\end{cases}$.

أ) احسب الأساس q و الحد الأول u_0 .

ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، ثم احسب $limS_n$

❷ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\ln u_{n+1}+\ln u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) احسب بدلالة n المجموع : $t_n=v_0+v_1+...+v_n$

✍ التمرين الثالث: 05 ن

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

I) نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب $Z_A=2$ ، $Z_B=1+\sqrt{3}i$ ، $Z_C=1-\sqrt{3}i$.

❶ اكتب Z_B و Z_C على الشكل الأسي .

❷ علم النقط A ، B و C ثم عين طبيعة الرباعي $OABC$.

❸ عين (E) مجموعة النقط $M(Z)$ التي تحقق : $Z=Z_A+2e^{i\theta}$ ، $\theta\in\Re$

II) (T) تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ حيث $Z\neq Z_A$ النقطة $M(Z')$ بحيث $Z'=\frac{-4}{Z-4}$.

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z'=Z$ ثم استنتج صورتي النقطتين A و B بالتحويل (T) .

❷ لتكن G مركز ثقل المثلث OAB ، عين لاحقة G' صورة النقطة G بالتحويل (T) .

3

اقلب الورقة

التمرين الرابع : 07 ن

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❶ عين a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

❶ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا . نذكر $\left(\lim\limits_{t\to+\infty} te^{t}=0\right)$

❷ ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثيها .

❹ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

❺ ارسم كلا من (T) و (C_g) .

❻ H الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ ، حيث α و β عددان حقيقيان .

أ) عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$

ب) استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $k(x)=g\left(x^2\right)$

أ) باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

انتهى

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2017- أساتذة المادة .

ثانوية الونشريسي - الشلف — السنة الدراسية 2016 / 2017

تصحيح إختبار الفصل الثالث مادة الرياضيات

علوم تجريبية.

تمرين 01:

لدينا $u_0=3$ و $u_{n+1}=\frac{2}{5}(u_n+3)$

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-2>0$

نضع $P(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n-2>0$

• نتحقق من صحة الخاصية من اجل $n=0$ أي $u_0-2>0$ ومنه $3-2>0$ محققة.

•• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $u_n-2>0$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$u_{n+1}-2>0$$

لدينا: $u_n-2>0$ أي $u_n>2$ ومنه $u_n+3>5$ ومنه $\frac{2}{5}(u_n+3)>2$

اذن $u_{n+1}>2$ وعليه $u_{n+1}-2>0$

••• من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n-2>0$

ب/ إثبات أن (u_n) متناقصة.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{5}(u_n+3)-u_n$$
$$=\left(\frac{2}{5}-1\right)u_n+\frac{6}{5}$$
$$=\frac{-3}{5}u_n+\frac{6}{5}=\frac{-3}{5}(u_n-2)$$

لدينا حسب فرضية التراجع $u_n-2>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n<0$

وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

• (u_n) محدودة من الاسفل و متناقصة تماما فهي متقاربة.

② لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+\alpha$.

أ/ تعيين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha$$
$$=\frac{2}{5}(u_n+3)+\alpha$$
$$=\frac{2}{5}u_n+\frac{6}{5}+\alpha=\frac{2}{5}(u_n+\alpha)+\frac{6}{5}+\frac{3}{5}\alpha$$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{5}\alpha+\frac{6}{5}=0$ ومنه $\alpha=-2$

ب/ عبارة v_n بدلالة n :

$v_0=u_0-2=3-2=\boxed{1}$

$$v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

جـ/ حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$$
$$=v_0\times\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]=1\left[\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{5}-1}\right]=1\left[\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{-3}{5}}\right]$$
$$S_n=\frac{-5}{3}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1\right]$$

③ لدينا: (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=\ln(v_n)$.

أ/ كتابة عبارة w_n بدلالة n :

لدينا $w_n=\ln(v_n)$ أي $w_n=\ln\left(\frac{2}{5}\right)^n$ أي $w_n=n\ln\left(\frac{2}{5}\right)$

إستنتاج أن (w_n) متتالية حسابية.

(w_n) متتالية حسابية معناه $w_n=w_0+n.r$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln\left(\frac{2}{5}\right)$، وحدها الأول $w_0=0$

ب/ نضع : $P_n=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$

- كتابة $\ln(P_n)$ بدلالة n.

لدينا $P_n=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$ أي $\ln(P_n)=\ln(v_0\times v_1\times\dots\times v_n)$

$$=\ln v_0+\ln v_1+\dots+\ln v_n$$
$$=w_0+w_1+\dots+w_n$$
$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)(w_0+w_n)$$
$$\ln(P_n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right)$$

إستنتاج P_n بدلالة n :

لدينا: $\ln(P_n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n.\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right)$ أي

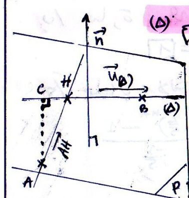
$$e^{\ln(P_n)}=e^{\left[\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right]^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$$

ومنه.

$$P_n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

تمـ 02:

① تعيين معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و المستقيم (Δ):



لدينا $A(2;-4;1)$ و $(\Delta): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = -1+t \end{cases}$

من أجل $t=0$ نجد $H(1;-1;-1)$

(H نقطة كيفية من المستقيم (Δ)).

$\vec{AH}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{AH} = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} -a+3b-2c=0 \;\ldots(1) \\ a-2b+c=0 \;\ldots(2) \end{cases}$

نجمع (1) و (2) نجد: $b-c=0$ أي $b=c$

بوضع $\boxed{c=1}$ نجد $\boxed{b=1}$. بتعويض b و c في العلاقة (2) نجد $\boxed{a=1}$

و عليه $\vec{n}(1;1;1)$

$\vec{n}(1;1;1)$ ناظمي للمستوي (P) معناه $x+y+z+d=0$:

$A\in(P)$ معناه: $2-4+1+d=0$ ، ومنه $\boxed{d=1}$

وعليه معادلة المستوي (P) هي: $(P): x+y+z+1=0$

② تعيين إحداثيات النقطة C من (Δ) بحيث: $(AC)\perp(\Delta)$:

$(AC)\perp(\Delta)$ معناه $\vec{u}_{(\Delta)}\cdot\vec{u}_{(AC)}=0$

$\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}_{(AC)}\begin{pmatrix}x_c-2\\y_c+4\\z_c-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_{(\Delta)}\cdot\vec{u}_{(AC)}=0$ معناه: $(x_c-2)-2(y_c+4)+z_c-1=0$

معناه: $x_c-2y_c+z_c-11=0$

إحداثيا النقطة C من (Δ) معناه $\begin{cases} x_c = 1+t \\ y_c = -1-2t \;;\; t\in\mathbb{R} \\ z_c = -1+t \end{cases}$

ومنه $(1+t)-2(-1-2t)+(-1+t)-11=0$ أي $6t-9=0$

ومنه $\boxed{t=\frac{3}{2}}$

بتعويض قيمة $t=3/2$ في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $C(5/2;-4;1/2)$

$\begin{cases} x_c = 1+3/2 \\ y_c = -1-2(3/2) \\ z_c = -1+3/2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_c = 5/2 \\ y_c = -4 \\ z_c = 1/2 \end{cases}$

③ تحقق أن النقطة $B(2;-3;0)$ نقطة من المستقيم (Δ)

$B\in(\Delta)$ معناه t وحيد.

$\begin{cases} 2 = 1+t \\ -3 = -1-2t \\ 0 = -1+t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$ ومنه B نقطة من المستقيم (Δ).

استنتاج مساحة المثلث ABC:

المثلث ABC قائم في C معناه $S = \frac{1}{2}CA\cdot CB$.

$\vec{CA}\begin{pmatrix}2-5/2\\-4+4\\1-1/2\end{pmatrix}$ أي $\vec{CA}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$ ، $CA=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(0)^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{CB}\begin{pmatrix}2-5/2\\-3+4\\0-1/2\end{pmatrix}$ أي $\vec{CB}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$ ، $CB=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(1)^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$S=\frac{1}{2}CA\cdot CB=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{8}\sqrt{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ومنه $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\,u.a$

④ حساب بعد النقطة $D(0;0;2)$ عن المستوي (P):

$$d(D;(P))=\frac{|0+0+2+1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

استنتاج حجم رباعي الوجوه ABCD:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot d(D;(P)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{4}$$

⑤ دراسة وضعية المستقيم (Δ) مع (AD)

• إيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم (AD):

$M(x,y,z)$ نقطة من (AD) معناه $\vec{AM}=\lambda\vec{AD}$

ومنه $\vec{AD}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ ، $(AD): \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -4+4\lambda \;;\; \lambda\in\mathbb{R} \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

لدينا $\vec{u}_{(\Delta)}\neq K\vec{u}_{(AD)}$ إذن (Δ) و (AD) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي:

$\begin{cases} 2-2\lambda = 1+t \\ -4+4\lambda = -1-2t \;\ldots(*) \\ 1+\lambda = -1+t \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2-2\lambda = 1+t \;\ldots(1) \\ 1+\lambda = -1+t \;\ldots(2) \end{cases}$

من العلاقة (2) نجد $t=2+\lambda$ وبتعويضه $t=2+\lambda$ في العلاقة (1) نجد:

$2-2\lambda=1+2+\lambda$ أي $3\lambda=-1$ ، ومنه $\boxed{\lambda=-1/3}$ و $\boxed{t=\frac{5}{3}}$

بتعويض قيمة t و λ في العلاقة (*) نجد: $-4+4(-\frac{1}{3})=-1-2(\frac{5}{3})$

$\frac{-16}{3}\neq\frac{-13}{3}$ ومنه (Δ) و (AD) مستقيمان ليسا من نفس المستوي.

ت 03 :

لدينا: $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2.z_B$

$z_B=1-i$ ، $z_C=2-2i$

① كتابة z_A على الشكل المثلثي ثم استنتاج الشكل المثلثي لـ z_B و z_C :

$$|z_A|=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt2$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}\qquad \theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$z_A=\sqrt2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$z_B=\sqrt2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

لأن:

$$\begin{cases}|z_B|=|\overline{z_A}|=|z_A|=\sqrt2\\ \arg(z_B)=\arg(\overline{z_A})=-\arg(z_A)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$$

$$z_C=2\sqrt2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

لأن

$$\begin{cases}|z_C|=|2z_B|=2|z_B|=2\sqrt2\\ \arg(z_C)=\arg(2z_B)=\arg(z_B)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$$

② حساب العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^{2017}$.

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^{2017}=\left(\frac{\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt2}\right)^{2017}=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2017}$$

$$=\cos\frac{2017\pi}{4}+i\sin\frac{2017\pi}{4}$$

$$=\cos\left(504\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(504\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$
$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha.$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^n=\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

$\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^n$ حقيقي سالب تماما معناه $\sin\frac{n\pi}{4}=0$

معناه $\frac{n\pi}{4}=\pi+2k\pi$

معناه $\boxed{n=4+8k}$ مع $k\in\mathbb{N}$

③ (C) دائرة مركزها $I(3;0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt5$

$(C):(x-3)^2+y^2=5.$ $\quad z_I=3$

أ/ كتابة العدد $\frac{z_C-3}{z_A-3}$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_C-3}{z_A-3}=\frac{2-2i-3}{1+i-3}=\frac{-1-2i}{-2+i}\times\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{5i}{5}=i$$

$$\frac{z_C-3}{z_A-3}=e^{\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث IA

لدينا $\left|\frac{z_C-3}{z_A-3}\right|=|i|=1$ معناه $IC=IA$

$\arg\left(\frac{z_C-3}{z_A-3}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ معناه $(\vec{IA};\vec{IC})=\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث IAC قائم في I ومتساوي الساقين.

ب/ تبيان أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة (C).

- $|z_C-z_I|=|z_C-3|=|-1-2i|=\sqrt5$
- $|z_A-z_I|=|z_A-3|=|-2+i|=\sqrt5$
- $|z_B-z_I|=|z_B-3|=|1-i-3|=|-2-i|=\sqrt5$

بما أن $|z_C-z_I|=|z_B-z_I|=|z_A-z_I|=\sqrt5=r$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C).

④ تعيين لاحقة كل من النقطتين E و D بحيث يكون ABDE متوازي أضلاع مركزه I

أي $z_I=\frac{z_B+z_E}{2}$ ومنه $2z_I=z_B+z_E$

$$z_E=2z_I-z_B$$
$$=2(3)-(1-i)$$
$$=6-1+i$$
$$\boxed{z_E=5+i}$$

أي $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}$ ومنه $2z_I=z_A+z_D$

$$z_D=2z_I-z_A$$
$$=2(3)-1-i$$
$$\boxed{z_D=5-i}$$

ت 04:

I) لدينا: $g(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$ ، $D_g=]-2;+\infty[$.

① حساب:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{(x+2)^2}_{+\infty}+2-\underbrace{2\ln(x+2)}_{-\infty}\right)=$ ح.ع.ت

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(x+2)}_{+\infty}\left[\underbrace{(x+2)}_{+\infty}+\underbrace{\frac{2}{(x+2)}}_{0}-2\underbrace{\frac{\ln(x+2)}{(x+2)}}_{0}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\boxed{+\infty}$

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\left[\underbrace{(x+2)^2}_{0}+2-2\underbrace{\ln(x+2)}_{-\infty}\right]=\boxed{+\infty}$

② دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها.

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-2;+\infty[$ ولدينا:

$g'(x)=2(x+2)-2\cdot\frac{1}{x+2}$

$=2(x+2)-\frac{2}{x+2}=\frac{2(x+2)^2-2}{x+2}=$

$g'(x)=0$ معناه $2(x+2)^2-2=0$

معناه $(x+2)^2=1$ أي $(x+2)^2-1^2=0$

معناه $(x+2-1)(x+2+1)=0$

ومنه $x=-3$ مرفوض أو $x=-1$

x	-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

③ إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$

x	-2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

II) الدالة f معرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$.

① حساب:

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\left(x+1+\underbrace{\frac{2}{x+2}}_{+\infty}\cdot\underbrace{\ln(x+2)}_{-\infty}\right)=\boxed{-\infty}$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-2$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\underbrace{\frac{2}{x+2}}_{0}\cdot\underbrace{\ln(x+2)}_{+\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x+1}_{+\infty}+2\underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+2}}_{0}\right)=\boxed{+\infty}$

2. أ/ تبيان أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+2)^2}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-2;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x)=1+\frac{-2}{(x+2)^2}\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\cdot\frac{2}{x+2}$

$=\frac{(x+2)^2-2\ln(x+2)+2}{(x+2)^2}=\frac{g(x)}{(x+2)^2}$ و.هـ.م.

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها.

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ لأن $(x+2)^2>0$

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③ أ/ تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x+2}\cdot\ln(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\,\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ أي $f(x)-y=\frac{2\ln(x+2)}{x+2}$

$f(x)-y=0$ معناه $2\cdot\frac{\ln(x+2)}{x+2}=0$ معناه $2\cdot\ln(x+2)=0$

معناه $\ln(x+2)=\ln 1$ أي $x+2=1$

ومنه $x=-1$

x	-2		-1		$+\infty$
$2\frac{\ln(x+2)}{x+2}$		$-$		$+$	
$f(x)-y$		$-$		$+$	
الوضعية النسبية		(C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-1;0)$	(C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل (Δ).	

④ اثبات ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها

الدالة f' تقبل الاشتقاق على $]-2;+\infty[$ و لدينا:

$$f''(x) = \left(\frac{g(x)}{(x+2)^2}\right)'$$

$$= \frac{g'(x)\cdot(x+2)^2 - 2(x+2)\cdot g(x)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}\left[(x+2)\cdot g'(x) - 2\,g(x)\right]}{(x+2)^{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}\left(\frac{2(x+2)^2-2}{\cancel{x+2}}\right) - 2\left((x+2)^2+2-2\ln(x+2)\right)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{2\cancel{(x+2)^2} - 2 - 2\cancel{(x+2)^2} - 4 + 4\ln(x+2)}{(x+2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-6+4\ln(x+2)}{(x+2)^3}$$

$f''(x)=0$ معناه: $-6+4\ln(x+2)=0$

معناه $\ln(x+2) = 3/2$

و منه $x = e^{3/2}-2$

$f''(x)$ تنعدم عند $e^{3/2}-2$ وتغير اشارتها

ومنه النقطة $A\left(e^{3/2}-2\,;\ e^{3/2}-1+3e^{-3/2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

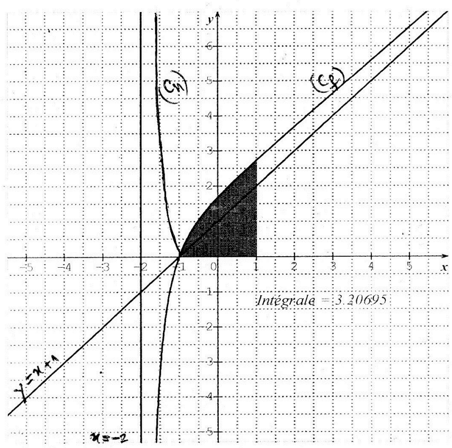
⑥ حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $x=-1$ ، $x=1$ ، $y=0$

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2+x+\ln^2(x+2)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(2+\ln^2 3\right)\ cm^2$$

⑤ رسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f):



III لدينا الدالة h المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ $h(x)=|x+1|+\frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$

كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x)=\begin{cases} x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)\ ; & h(x)\geqslant 0 \text{ في } [-1;+\infty[\\ -(x+1)-\frac{2}{x+2}\ln(x+2)\ ; & h(x)\leqslant 0 \text{ في }]-2;-1] \end{cases}$$

و منه (C_h) منطبق على (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة الى محور الفواصل على المجال $]-2;-1]$

تصحيح موضوع الثاني

التمرين الأول:

1) $(S): x^2+y^2+z^2+x-\frac{1}{4}=0$

$(S): (x+\frac{1}{2})^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

(S) سطح كرة مركزها $\omega(-\frac{1}{2},0,0)$

ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 - أ التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF)

$\vec{EF}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من الفضاء

$M\in(EF)$ معناه يوجد $t\in\mathbb{R}$ حيث $\vec{EM}=t\vec{EF}$

حالة ①

$(EF):\begin{cases}x=-1-3t\\y=0-3t\quad;\ t\in\mathbb{R}\\z=1+3t\end{cases}$

حالة ②

$(EF)\begin{cases}x=2-3t\\y=3-3t\quad;\ t\in\mathbb{R}.\\z=-2+3t\end{cases}$

2 - ب تعيين احداثيات النقطة H

$H\in(S)\cap(EF)$ معناه $H\in(EF)$ و $H\in(S)$

$\begin{cases}x_H=-1-3t\\y_H=0-3t\quad;\ t\in\mathbb{R}.\\z_H=1+3t\end{cases}$ --- ①

نعوض ① في معادلة سطح كرة نجد

$(1+3t)^2+9t^2+(1+3t)^2-1-3t-\frac{1}{4}=0$

بعد نشر وتبسيط نجد ان

$(6t+1)^2=0$

وعليه $\boxed{t=-\frac{1}{6}}$

نعوض t في جملة ① نجد ان

$\begin{cases}x_H=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\\y_H=\frac{1}{2}\\z_H=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$ $H(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2 - جـ اثبات أن المستقيم (EF) مماس لسطح الكرة (S)

$\vec{\omega H}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\omega H=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\omega H=\frac{\sqrt{2}}{2}=R$

ومنه (EF) مماس لسطح الكرة (S) عند H

3 - أ

$(P): 2x-y+z+1=0$

$d((P),\omega)=\frac{|2(-\frac{1}{2})-0+0+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=0$

3 - ب الاستنتاج

$d((P),\omega)=0$ معناه (P) تقطع (S) في دائرة مركزها ω ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

التمرين الثاني.

1 - أ) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة

$\begin{cases}u_1\times u_5=e^{-12}\ \text{---①}\\\frac{u_2}{u_4}=e^4\ \text{---②}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\ln u_1+\ln u_5=-12\\\ln u_2-\ln u_4=14\end{cases}$

$u_n=u_0q^n$

② تكافئ $\frac{u_0q^2}{u_0q^4}=e^4$

تكافئ $q^2=\frac{1}{e^4}$.

وعليه $q=\frac{1}{e^2}$ أو $q=-\frac{1}{e^2}$ مرفوض

ومنه $\boxed{q=e^{-2}}$

و ① تكافئ $u_0q\times u_0q^5=e^{-12}$

وعليه $u_0^2q^6=e^{-12}$

$u_0^2 e^{-12} = e^{-12}$ معناه $u_0^2 q^6 = e^{-12}$ وعليه

$u_0 = 1$ أو $u_0 = -1$ مرفوض معناه $u_0^2 = 1$

$\boxed{u_0 = 1}$

1-ب: عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$u_n = u_0 q^n$

$\boxed{u_n = e^{-2n}}$

1-جـ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$\cancel{S_n = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n)}$

$S_n = \cancel{\frac{(n+1)}{2}}\left(u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)\right)$

$S_n = \frac{e^{-2n-2}-1}{e^{-2}-1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{-1}{e^{-2}-1}$

2- $v_n = \ln u_{n+1} + \ln u_n$

2-أ (v_n) متتالية حسابية

$v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+2} + \ln u_{n+1} - \ln u_{n+1} - \ln u_n$

$= \ln u_{n+2} - \ln u_n$

$= -2(n+2) + 2n = -4$

وعليه (V_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = -4}$ وحدها الأول هو

$v_0 = \ln u_1 + \ln u_0$

$= -2 + 0 = -2$ $\boxed{v_0 = -2}$

$t_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$v_n = v_0 + nr = -2 - 4n$

$t_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(\cancel{2}v_0 + u_n)$

$t_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(-2-2-4n)$

$\boxed{t_n = -(n+1)^2}$

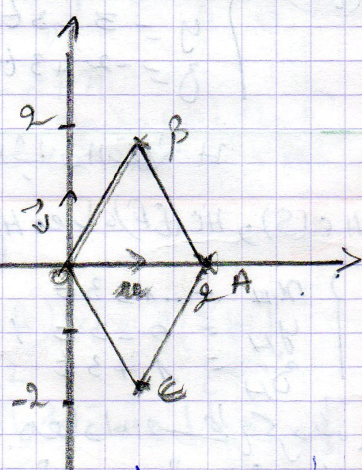
التمرين الثالث

$z_A = 2,\ z_B = 1+\sqrt{3}i,\ z_C = 1-\sqrt{3}i$

① الشكل الأسي لـ z_B و z_C

$z_B = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_C = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

2- تعليم A, B, C



طبيعة الرباعي $OABC$

لدينا لاحقة الشعاع $\vec{OB}$ هي $z_B = 1+i\sqrt{3}$

لاحقة الشعاع $\vec{OC}$ هي $z_C = 1-\sqrt{3}i$

لاحقة الشعاع $\vec{BA}$ هي $z_A - z_B = 1-i\sqrt{3}$

لاحقة الشعاع $\vec{CA}$ هي $z_A - z_C = 1+i\sqrt{3}$

وبما أن $OB = OC = AB = AC = 2$

2

G مركز ثقل المثلث OAB

$$z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{2}{3}$$

$$z'_G = \frac{-4}{z_G - 4} = \frac{-4}{\frac{2}{3} - 4} = \frac{6}{5}$$

التمرين الرابع:

$f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$, $D_f = [-2, +\infty[$

نعين قيمتي a و b

$A \in (C_f)$ معناه $f(-1) = 1$

معناه $(-a+b)e + 1 = 1$

معناه $\boxed{-a + b = 0} \to ①$

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$

الدالة f قابلة للإشتقاق على D

$f'(x) = (a - ax - b)e^{-x}$

$f'(-1) = -e$ معناه $\boxed{2a - b = -1} \to ②$

بجمع ① و ② نتحصل على أن $\boxed{a = -1}$

بالتعويض نجد أن $\boxed{b = -1}$

$f(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$

II

$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$, $D_g = [-2, +\infty[$

2

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} - \lim_{x \to +\infty} e^{-x} + 1$$

$$= 0 - 0 + 1 = 1$$

علما أن $\lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = 0$ و

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل

كما أن $\vec{OC} = \vec{BA}$ و $\vec{OB} = \vec{CA}$ فإن الرباعي OABC متوازي أضلاع ولدينا

$OB = OC = AB = AC = 2$

ومنه فهو معين.

3

$(E): z - z_A = 2e^{i\theta}$

$(E): z - z_A = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

$(x-2) + iy = 2\cos\theta + 2i\sin\theta$

$$\begin{cases} x - 2 = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

بالتربيع والجمع نجد

$(x-2)^2 + y^2 = \cancel{4} = 2^2$

مجموعة النقط E هي دائرة مركزها النقطة A ونصف قطرها $R = 2$

II

$T(M) = M'$ معناه $z' = \frac{-4}{z-4}$ --- ①

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z' = z$

① تكافئ $z = \frac{-4}{z-4}$

تكافئ $z^2 - 4z + 4 = 0$

تكافئ $(z-2)^2 = 0$

وحلها $z = 2$

$$z'_A = \frac{-4}{z_A - 4} = \frac{-4}{2-4} = 2$$

$$z'_B = \frac{-4}{1 + \sqrt{3}i - 4} = \frac{-4}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{4}{3 - i\sqrt{3}}$$

$$z'_B = \frac{4(3 + i\sqrt{3})}{12} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$

ب) دراسة تغيرات الدالة g

g تقبل الإشتقاق على D_g

$$g'(x) = x e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$

$g'(x)=0$ معناه $x=0$

-2	$-$	0	$+$	$+\infty$

جدول التغيرات

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-2)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	1

$g(-2) = \underset{=1{,}13}{e^{2}+1}$ ، $g(0)=0$

ج) الدالة g' تقبل الإشتقاق على D_g

$$g''(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$g''(x)=0$ معناه $x=1$

إشارة $g''(x)$

-2	$+$	1	$-$	$+\infty$

ومنه المنحنى (C_g) تقبل نقطة انعطاف I ذات فاصلة 1

$$g(1) = -2e^{-1}+1$$

$$I(1, -2e^{-1}+1)$$

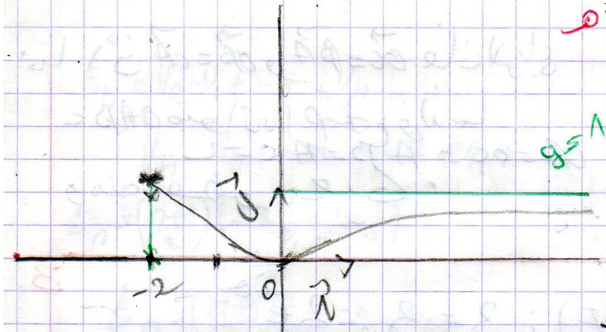
د) معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I

$$(T): y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

$$(T): y = e^{-1}(x-1) - 2e^{-1} + 1$$

$$(T): y = \frac{1}{e}x - \frac{3}{e} + 1$$

ه)



و) الدالة الأصلية لـ $x \mapsto g(x)-1$ هي دالة H

$$H(x) = (\alpha x+\beta)e^{-x}$$

لدينا $H'(x) = g(x)-1$

الدالة H قابلة للإشتقاق على $[-2,+\infty[$

$$H'(x) = (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x}$$

بالمطابقة نجد أن $\alpha = 1$ و $\beta = 2$

$$\boxed{H(x) = (x+2)e^{-x}}$$

الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم في 0

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x (g(t)-1+1)\,dt$$

$$= \int_0^x (g(t)-1)\,dt + \int_0^x dt = [H(t)]_0^x + [t]_0^x$$

$$= (x+2)e^{-x} - 2 + x$$

F الدالة الأصلية لـ g

$$F(x) = (x+2)e^{-x} - 2 + x$$

III

$$K(x) = g(x^2)$$

$$K(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$$

نضع $h(x) = x^2$

بإستعمال مشتقة دالة مركبة

الدالة h متناقصة على $[-2,0]$ والدالة g متناقصة على $[-2,0]$ فإن الدالة $g \circ h$ متزايدة على $[-2,+\infty[$

الدالة h متزايدة على $[0,+\infty[$ والدالة g متزايدة على $[0,+\infty[$ ومنه K متزايدة على $[0,+\infty[$

جدول التغيرات

x	-2		0		$+\infty$
$K'(x)$		$+$	0	$+$	
$K(x)$	$K(-2)$		0	$\nearrow$	1