إمتحانات تجريبية

لولاية وهران

2017

إضغط على الموضوع

ثانوية إبراهيم التازي الموضوعين والحل المفصل شعبة رياضي الصفحة1

ثانوية مراح عبد القادر الموضعين والحل المفصل شعبة رياضي ....الصفحة 19

ثانوية مراح عبد القادر الموضوعين علـــــــــــوم تجريبية الصفحة35

ثانوية حيرش محمد الموضوعين تقني رياضــــــــــــي ....الصفحة 39

ثانوية حيرش محمد الموضوعين رياضــــــــــــــي ....الصفحة 43

ثانوية الضاية الموضوعين تقني رياضـــــــــــــي ....الصفحة 48

ثانوية بن عثمان الكبيـــر رياضـــــــــــــي..................................الصفحة 52

ثانوية بن عثمان الكبير علوم تجريبيـــــــــــة ....الصفحة 54

ثانوية حيرش محمد الموضوعين علوم تجريبية ....الصفحة 58

ثانوية زرقاني لحسن السانية الموضوعين علوم تجريبية ....الصفحة 62

ثانوية مصطفى هدام الموضوعين علوم تجريبية ....الصفحة 66

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران **ثانوية الشيخ ابراهيم التزي**

اختبار بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: **رياضيات** المدة: **4 ساعات ونصف** **15** ماي **2017**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

$p\left(z\right)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث : $p\left(z\right)=8z^3+\left(-16+12i\right)z^2+50z-100+75i$

1. أ – عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها يكون $p\left(\alpha i\right)=0$.

ب – عين العدد المركب β حيث من أجل كل عدد مركب z : $p\left(z\right)=\left(z^2+\frac{25}{4}\right)\left(8z+\beta\right)$

ج–استنتج حلول المعادلة $p\left(z\right)=0$.

2. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=2-\frac{3}{2}i$ و $z_B=\frac{5}{2}i$.

أ – عين z_C لاحقة النقطة C حيث : $\begin{cases}2\left|z_C-z_A\right|=\left|z_B-z_A\right|\\ \arg\left(z_C-z_A\right)=\frac{\pi}{2}+\arg\left(z_B-z_A\right)\end{cases}$

ب – استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

ج – حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم أحسب مساحته .

د – لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S. بين أن مساحة المثلث ACD تساوي $\frac{5}{4}ua$.

3. أ–عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S.

ب–من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي T_n المعرف بـ : $T_n=\underbrace{S\circ S\circ ....\circ S}_{n \text{ مرة}}$

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل T_n هي: $z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}\left(z-z_A\right)+z_A$.

جـ – عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها التحويل T_n تحاكيا مركزه النقطة A يطلب تعيين نسبته.

4. نعتبر النقطتين M و N صورتي النقطة B بالتحويليين T_{4k} و T_{4k-2} على الترتيب حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

أ – بين أن من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم النقطة A تنتمي إلى $\left[MN\right]$.

ب – أحسب بدلالة العدد طبيعي k الطول MN.

جـ – أحسب $\lim_{k\to+\infty}MN$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

I) t ، a و b أعداد طبيعية حيث : $1<t\le a\le b$.

عين الأعداد t ، a و b علماً أنه في النظام ذي الأساس t يكون $a+b=\overline{46}$ و $a.b=\overline{545}$.

II) نعتبر المعادلة (1)..........$21x-17y=8$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1. أ – عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (1).

ب – حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة (1).

2. أ – ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13.

ب–بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ – بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب – عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي يكون من أجلها $p\gcd(x;y)=4$.

التمرين الثالث : (4.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$؛ نعتبر النقطتين $A(3;0;-2)$، $B(3;3;1)$

والمستقيمين (Δ)الذي يشمل A و $\vec{u}(3;1;-1)$ شعاع توجه له و (d) الذي يشمل B و $\vec{v}(0;2;2)$ شعاع توجه له.

1. تحقّق أنّ المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين: $(P_1): x-2y+z-1=0$ و $(P_2): x-y+2z+1=0$

2. (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المتساوية المسافة عن المستويين (P_1) و (P_2).

أ – بيّن أنّ النقطة $I(3;\alpha+2;\alpha)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) حيث α وسيط حقيقي.

ب – بيّن أنّ مجموعة النقط I ، لما تمسح α مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي المستقيم (d) .

جـ – جد نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) و بين أن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (Δ).

د – أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها النقطة B وتمس المستويين (P_1) و (P_2) في النقطتين C و D على الترتيب.

هـ – بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي.

و–استنتج أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

3. أ – بيّن أنّ المجموعة (Γ) هي اتحاد مستويين (Q_1) و (Q_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما .

(حيث (Q_1) المستوي الذي يشمل المستقيم (d)).

ب – تحقق أنّ المستويين (Q_1) و (Q_2) متعامدان

جـ–نسمي d_1 المسافة بين النقطة C والمستوي (Q_1) ، d_2 المسافة بين النقطة C والمستوي (Q_2).

بيّن أنّ : $d_1=\dfrac{\sqrt{22}}{4}$ و $d_2=\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$.

التمرين الرابع : (6.5 نقاط)

I) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1. أ – احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$.

ب–ادرس اتجاه تغير الدالة g

جـ–بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4 \le \alpha < \ln 6$.

د –استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)$

أ – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n < \alpha$.

ب – تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ–بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ–أُحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ فسر النتيجة بيانيا .

ب–تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha=1{,}5$) .

III) F الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$F(0)=-\ln 2$ و من أجل $x>0$ ، $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$.

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل $x>0$ ، $F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x\ln 2 \le \displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \le e^{2x}\ln 2$.

3. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة F مستمرة عند القيمة 0 من اليمين .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

I) f دالة معرفة على المجال $]2,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2,+\infty[$.

II) (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0=\dfrac{5}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2<u_n<3$.
2. استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n^2<\dfrac{9}{10}\left(u_n^2+1\right)$.
3. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
4. تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-2=\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$.
5. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

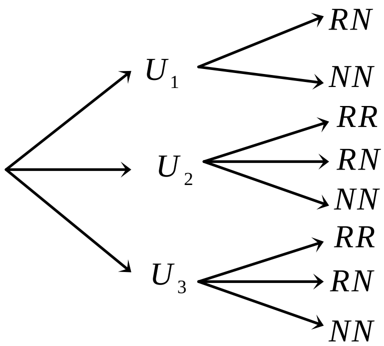
التمرين الثاني : (3.5 نقاط)

لدينا ثلاثة صناديق U_1 ، U_2 و U_3 حيث الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء ،الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء أما U_3 يحتوي على 3 كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

نسمي RR "حادثة الحصول على كرتين حمراوين " ، NN "حادثة الحصول على كرتين سوداوين "

و RN "حادثة الحصول على كرتين مختلفتين ".



1. أنقل هذه الشجرة موضحا عليها كل الاحتمالات .
2. ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ – حدد قيم المتغير العشوائي X .

ب – بين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $\dfrac{2}{285}$.

ج – بين أن احتمال الحادثة $(X=1)$ يساوي $\dfrac{53}{285}$.

د . استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 ؟

التمرين الثالث : (5.5 نقاط)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2=-2-2i\sqrt{3}$. (يمكنك وضع $z=x+iy$)

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. النقط A ، B و C لاحقاتها:

$z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$ على الترتيب.

أ – علّم النقط A ، B و C.

ب – بين أنّ: $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ–عين المركز ونصف القطر للدائرة$\left(\mathcal{C}\right)$ المحيطة بالمثلث ABC.

3. $\left(\Gamma\right)$ هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z=2\left(-1+e^{i\theta}\right)$ و $\theta\in\mathbb{R}$.

أ – بين أن $\left(\Gamma\right)$ هي دائرة مركزها النقطة Ω ذات اللاحقة -2 ، يطلب تحديد نصف قطرها.

ب – تحقق أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى $\left(\Gamma\right)$.

4. أ – بين أنّ الدائرة$\left(\mathcal{C}\right)$هي صورة الدائرة$\left(\Gamma\right)$ بالدوران الذي مركزه A و يحول B إلى C.

5. S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ، نسبته $\sqrt{2}$ و وزاويته $-\dfrac{\pi}{4}$.

أ – عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S.

ب – بين أنّ لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه المباشر S هي: $z_D=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

جـ – أُكتب كل من z_A و z_D على الشكل الأسي، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكلّ من $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

6. أ–حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $\left(x;y\right)$ التالية: $5x-24y=14$

ب – استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n حيث يكون: $\arg\left(z_D\right)^n=\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(z_A\right)$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

f الدالة المعرّفة بِ : $f\left(0\right)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$ ،

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right)+1$.

$\left(C_f\right)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

1. أ – ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة $x=0$.

ب – احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3. أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ، $f'\left(x\right)=2x\left(1-\ln x\right)$.

ب–استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4. جد معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة E ذات الفاصلة 1 .

5. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$

أ –احسب $g'(x)$ و $g''(x)$.

ب– بيّن أنّ الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1 ثم استنتج اشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

جـ – استنتج اتجاه تغير الدالة g ، احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

د–استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ، فسر النتيجة هندسيا .

6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $4,6<\alpha<4,7$.

7. ارسم في المعلم السابق (Δ) و (C_f) على المجال $[0;5]$.

8. أ –باستعمال المكاملة بالتجزئة جد الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ و التي تنعدم عند القيمة 1.

ب – احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\alpha$ و $y=0$.

جـ – بيّن أن $A(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+12\alpha-29}{18}\,u.a.$.

بالتوفيـــق

التصحيح النموذجي لإختبار الباكالوريا التجريبي

- شعبة الرياضيات -

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

$$p(z)=8z^3+(-16+12i)z^2+50z-100+75i$$

1. أ - $p(\alpha i)=0$ يكافئ

$8(\alpha i)^3+(-16+12i)(\alpha i)^2+50\alpha i-100+75i=0$ ويكافئ

$$(16\alpha-100)+i(-8\alpha-12\alpha+50\alpha+75)=0$$

ويكافئ $\begin{cases}16\alpha-100=0\\-8\alpha-12\alpha+50\alpha+75=0\end{cases}$

ويكافئ $\begin{cases}\alpha=\frac{5}{2} \text{ أ } \alpha=-\frac{5}{2} \text{ و}\\-8\alpha^3-12\alpha^2+50\alpha+75=0\end{cases}$

و يكافئ $\alpha=-\frac{5}{2}$ أو $\alpha=-\frac{5}{2}$

ب - من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$p(z)=\left(z^2+\frac{25}{4}\right)(8z+\beta)$$
$$=8z^3+\beta z^2+50z+\frac{25}{4}\beta$$

بالمطابقة نجد : $\beta=-16+12i$

جـ - استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$.

$p(z)=0$ يكافئ $\left(z^2+\frac{25}{4}\right)(8z-16+12i)=0$ يكافئ

$z^2+\frac{25}{4}=0$ أو $8z-16+12i=0$

ويكافئ $z^2=\frac{25}{4}$ أو $8z=16-12i$

ويكافئ $z=\frac{5}{2}i$ أو $z=-\frac{5}{2}i$ أو $z=2-\frac{3}{2}i$

2. $z_A=2-\frac{3}{2}i$ و $z_B=\frac{5}{2}i$.

أ - تعيين z_C لاحقة النقطة C حيث :

$$\begin{cases}2|z_C-z_A|=|z_B-z_A|\\\arg(z_C-z_A)=\frac{\pi}{2}+\arg(z_B-z_A)\end{cases}$$

يكافئ $\begin{cases}|z_C-z_A|=\frac{1}{2}|z_B-z_A|\\\arg(z_C-z_A)-\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

و يكافئ $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$

و يكافئ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}i$

و يكافئ $z_C-z_A=\frac{1}{2}i(z_B-z_A)$

ويكافئ $z_C=\frac{1}{2}i(z_B-z_A)+z_A$

ويكافئ $z_C=\frac{1}{2}i\left(\frac{5}{2}i-2+\frac{3}{2}i\right)+2-\frac{3}{2}i=-\frac{5}{2}i$

ب - استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

يطلب تعيين نسبته و زاوية له . $z_C-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$

وعليه فان C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

و نسبته $\frac{1}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له

جـ -حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم أُحسب مساحته .

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$

معناه $AB=2AC$ و $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}$ و هذا يعني أن

المثلث ABC قائم في A

مساحة المثلث ABC:

$AB=|z_B-z_A|=2\sqrt{5}$ و $AC=|z_C-z_A|=\sqrt{5}$

إذن $S_{(ABC)}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{2}=5ua$

د - لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S. بين أن مساحة المثلث ACD تساوي $\frac{5}{4}ua$.

لدينا : $S(A)=A$ ، $S(B)=C$ و $S(C)=D$

إذن: $S(ABC)=ACD$ وعليه $S_{(ACD)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2S_{(ABC)}=\frac{5}{4}ua$

3. أ -عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S.

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$S(M)=M'$ يكافئ $z'-z_A=\frac{1}{2}i(z-z_A)$

و يكافئ $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{5}{4}-\frac{5}{2}i$

ب - من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي T_n المعرف بـ : $T_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\ldots\circ S}_{n \text{ مرة}}$

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل T_n هي:

$z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$.

نسمي $P(n)$ الخاصية * العبارة المركبة للتحويل T_n هي:

$* \; z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$

- نتحقق من $P(2)$

لدينا: $T_2 = S \circ S$

لتكن $M(z)$ صورتها النقطة $M_1(z_1)$ بالتحويل S و النقطة $M_1(z_1)$ صورتها النقطة $M'(z')$ بالتحويل S

لدينا : $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

و $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_A) + z_A$

معناه $M' = T_2(M)$

$$z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A - z_A\right) + z_A$$

ومعناه $z' = \frac{1}{2^2}e^{i\,2\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$ ومنه $P(2)$

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي العبارة المركبة للتحويل T_n هي:

$z' = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$

أي العبارة المركبة للتحويل T_{n+1} هي:

$$z' = \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$$

لدينا: $T_{n+1} = T_n \circ s$ ،

لتكن $M(z)$ صورتها النقطة $M_1(z_1)$ بالتحويل S و النقطة $M_1(z_1)$ صورتها النقطة $M'(z')$ بالتحويل T_n

لدينا : $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

و $z' = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

معناه $M' = T_{n+1}(M)$

$$z' = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A - z_A\right) + z_A$$

أي: $z' = \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$ ومنه $P(n+1)$

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، العبارة المركبة للتحويل T_n هي:

$z' = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$.

جـ–عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها التحويل T_n تحاكيا مركزه النقطة A يطلب تعيين نسبته.

التحويل T_n هو التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2^n}$ و $n\frac{\pi}{2}$ زاوية له. يكون التحويل T_n تحاكيا مركزه النقطة A إذا وفقط إذا كان $n\frac{\pi}{2} = k\pi$ مع $(k \in \mathbb{Z})$ ويكافئ $n = 2k$ مع $(k \in \mathbb{Z})$ وبما أن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نضع $n = 2\alpha$ مع $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$

إذن: من أجل $n = 2\alpha$ مع $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$ يكون T_n تحاكيا مركزه النقطة A نسبته $\frac{1}{2^n}$ أو $-\frac{1}{2^n}$

–إذ كان α عدد طبيعي زوجي غير معدوم ، $\alpha = 2\beta$ مع $(\beta \in \mathbb{N}^*)$ أي $n = 4\beta$ مع $(\beta \in \mathbb{N}^*)$ فان نسبة التحاكي T_n هي $\left(\frac{1}{16}\right)^\beta$

–إذ كان α عدد طبيعي فردي غير معدوم ، $\alpha = 2\beta - 1$ مع $(\beta \in \mathbb{N}^*)$ أي $n = 4\beta - 2$ مع $(\beta \in \mathbb{N}^*)$ فان نسبة التحاكي T_n هي $-4\left(\frac{1}{16}\right)^\beta$

4. نعتبر النقطتين M و N صورتي النقطة B بالتحويليين T_{4k} و T_{4k-2} على الترتيب حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

أ – بين أن من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم النقطة A تنتمي إلى $[MN]$.

لدينا: $M = T_{4k}(B)$ يكافئ $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{AB}$

و $N = T_{4k-2}(B)$ يكافئ $\overrightarrow{AN} = -4\left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{AB}$

ومنه $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AM}$ إذا االشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعاكسان في الاتجاه ومنه النقطة A تنتمي إلى القطعة $[MN]$

ب –أحسب بدلالة العدد طبيعي k الطول MN.

معناه $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{AB} + 4\left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{NM} = 5\left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{AB}$ ومعناه $NM = 5\left(\frac{1}{16}\right)^k AB$

أي: $NM = 5\left(\frac{1}{16}\right)^k 2\sqrt{5} = 10\sqrt{5}\left(\frac{1}{16}\right)^k$

جـ–أحسب $\lim_{k \to +\infty} MN$.

$$\lim_{k \to +\infty} MN = \lim_{k \to +\infty} 10\sqrt{5}\left(\frac{1}{16}\right)^k = 0$$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

I) t ، a و b أعداد طبيعية حيث : $1 < t \leq a \leq b$.

عين الأعداد t ، a و b علماً أنه في النظام ذي الأساس t يكون $a + b = \overline{46}$ و $a.b = \overline{545}$.

$a + b = \overline{46} = 4t + 6$ و $a.b = \overline{545} = 5t^2 + 4t + 5$

a و b هما حلا المعادلة ذات المجهول x التالية:

$(E)\ldots\ldots\ x^2-(4t+6)t+5t^2+4t+5=0$

$\Delta'=(2t+3)^2-(5t^2+4t+5)=-t^2+8t+4$

المعادلة (E) تقبل حلولا إذا فقط إذا كان $-t^2+8t+4\geq 0$

أي: $t\in\left[4-\sqrt{20};4+\sqrt{20}\right]$

بما أن: t عدد طبيعي أكبر تماما من 6 فإن $(t=7)$ أو $(t=8)$

- إذا كان $(t=7)$ فإن: $\Delta'=11$ ومنه المعادلة (E) ليس لها حل في $\mathbb{N}$.
- إذا كان $(t=8)$ فإن: $\Delta'=4$ ومنه المعادلة (E) تقبل حلين هما: 17 و 21 .

و بما أن: $a\leq b$ فإن: $a=17$ و $b=21$

وبالتالي: $(t=8)$ و $(a=17)$ و $(b=21)$

II) نعتبر المعادلة (1)..........$21x-17y=8$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1. أ – الثنائية $(x_0;y_0)=(2;2)$ حل خاص للمعادلة (1).

ب –حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة (1).

$\begin{cases}21x-17y=8\\21x_0-17y_0=8\end{cases}$ ومنه: $21(x-x_0)=17(y-y_0)\ldots(*)$

17 يقسم $21(x-x_0)$ و $PGCD(21;17)=1$

ومنه حسب مبرهنة غوص 17 يقسم $(x-x_0)$

أي: $x-x_0=17k$

ومن $(*)$ نحصل على: $21(17k)=17(y-y_0)$

أي: $y-y_0=21k$

إذن: $(x;y)\in\{(17k+2;21k+2)/k\in\mathbb{N}\}$

2. أ–ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13.

$9^0\equiv1[13]$، $9^1\equiv9[13]$، $9^2\equiv3[13]$، $9^3\equiv1[13]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k، $9^{3k+r}\equiv9^r[13]$

حيث $r\in\{0;1;2\}$

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 9^n على 13.	1	9	3

ب – الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (1) معناه $21\alpha-17\beta=8$

و معناه $17\beta=21\alpha-8$

لدينا: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^2-1-2[13]$

أي: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv0[13]$

3. أ – بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) و $x\equiv0[4]$ فإن $y\equiv0[4]$.

$(x;y)$ حلا للمعادلة (1) و $17y=21x-8$

$x\equiv0[4]$ معناه : $x=4\lambda$

وعليه : $17y=21(4\lambda)-8=4(21\lambda-2)$

أي: $17y\equiv0[4]$ ولكن $PGCD(4;17)=1$ إذن: $y\equiv0[4]$

ب – عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي يكون من أجلها $p\gcd(x;y)=4$.

$x\equiv0[4]$ معناه : $17k+2\equiv0[4]$ أي: $k\equiv2[4]$

أي: $k=4\delta+2$

إذن: $x=17(4\delta+2)+2=4(17\delta+9)$

و $y=21k+2=21(4\delta+2)+2=4(21\delta+11)$

$p\gcd(x;y)=4$ معناه

$p\gcd(4(17\delta+9);4(21\delta+11))=4$ ومعناه

$4\times p\gcd(17\delta+9\ ;\ 21\delta+11)=4$

أي: $p\gcd(17\delta+9\ ;\ 21\delta+11)=1$

وبما أن: $21(17\delta+9)-17(21\delta+11)=2$ فإن:

$p\gcd(17\delta+9\ ;\ 21\delta+11)=1$ معناه $p\gcd(17\delta+9\ ;2)=1$

و معناه $17\delta+9\equiv1[2]$ أي: $\delta\equiv0[2]$ (δ زوجي)

إذن: $x=4(17(2k')+9)=136k'+36$

و $y=4(21(2k')+11)=168k'+44$ ، مع $k'\in\mathbb{N}$

ط2: $p\gcd(x;y)=4$ معناه $p\gcd(x\ ;\ 21x-17y)=4$

ومعناه $p\gcd(x\ ;8)=4$

ومنه $x\equiv4[8]$

أي: $17k+2\equiv4[8]$ أي: $k\equiv2[8]$

أي: $k=8k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$

إذن: $x=17k+2=17(8k'+2)+2=136k'+36$

و $y=21k+2=21(8k'+2)+2=168k'+44$ مع $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

نعتبر النقطتين $A(3;0;-2)$، $B(3;3;1)$ والمستقيمين (Δ) الذي يشمل A و $\vec{u}(3;1;-1)$ شعاع توجه له و (d) الذي يشمل B و $\vec{v}(0;2;2)$ شعاع توجه له.

1. تحقّق أنّ المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين:

$(P_1): x-2y+z-1=0$ و $(P_2): x-y+2z+1=0$

$\overrightarrow{n_1}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

و $\overrightarrow{n_2}(1;-1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

بما أن $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{-1}$ فان $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطان خطيا و منه المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم

لدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{n_1}=(3)\times(1)+(1)\times(-2)+(1)\times(-1)=0$

و $\vec{u}.\overrightarrow{n_2}=(3)\times(1)+(1)\times(-2)+(1)\times(-1)=0$

بما أن $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}$ و $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}$ فان $\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم تقاطع المستويين: (P_1) و (P_2) ومن جهة أخرى لدينا:

$3-2(0)+(-2)-1=0$ و $3-(0)+2(-2)+1=0$ أي أن A نقطة مشتركة بين المستويين (P_1) و (P_2)

إذا المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)

طريقة2: نتحقق أنّ: $(\Delta)\subset(P_1)$ و $(\Delta)\subset(P_2)$

2. (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المتساوية المسافة عن المستويين (P_1) و (P_2).

أ – بيّن أنّ النقطة $I(3;\alpha+2;\alpha)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) حيث α وسيط حقيقي.

$$d(I,(P_1))=\frac{|3-2(\alpha+2)+\alpha-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-\alpha-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|\alpha+2|}{\sqrt{6}}$$

و $$d(I,(P_2))=\frac{|3-(\alpha+2)+2\alpha+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{|\alpha+2|}{\sqrt{6}}$$

بما أن $d(I,(P_1))=d(I,(P_2))$ فان $I\in(\Gamma)$

ب – بيّن أنّ مجموعة النقط I ، لما تمسح α مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي المستقيم (d) .

لدينا : $\overrightarrow{IB}(0;1-\alpha;1-\alpha)$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{IB}=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\vec{v}$

إذا مجموعة النقط I ، لما تمسح α مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي المستقيم الذي يشمل B و $\vec{v}(0;2;2)$ شعاع توجيه له وهو المستقيم (d)

جـ ـ جد نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) و بين أن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (Δ).

$I\in(\Delta)$ يكافئ $d(I,(P_1))=d(I,(P_2))=0$ (لأن المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)) ويكافئ $\frac{|\alpha+2|}{\sqrt{6}}=0$

وهذا يعني $\alpha=-2$ ، إذن $A(3;0;-2)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d).

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=(3)(0)+(1)(2)+(-1)(2)=0$ وهذا يعني أن المستقيمين (Δ) و (d) متعامدان وبالتالي النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (Δ).

د – أ كتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها النقطة B وتمس المستويين (P_1) و (P_2) في النقطتين C و D على الترتيب.

سطح الكرة (S) التي مركزها ا النقطة B وتمس المستويين (P_1) و (P_2) نصف قطرها هو $d(B,(P_1))=d(B,(P_2))=\frac{\sqrt{6}}{2}$

لتكن $M(x;y:z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(S)$ يكافئ $BM=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ومعناه $BM^2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

و يكافئ $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{3}{2}$

هـ– بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي

النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1)

ومنه الشعاع $\overrightarrow{CB}$ ناظمي للمستوي (P_1)

النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_2)

ومنه الشعاع $\overrightarrow{DB}$ ناظمي للمستوي (P_2)

وبما أن المستويين (P_1) و (P_2) غير متوازين فان الشعاعين $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DB}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي النقط B ، C و D ليست في استقامية فهي تعين مستويا (BCD)

لدينا : $(\Delta)\subset(P_1)$ و $(\Delta)\subset(P_2)$ إذا $\overrightarrow{DB}\perp\vec{u}$ و $\overrightarrow{CB}\perp\vec{u}$

وهذا يعني أن الشعاع $\vec{u}$ ناظمي للمستوي (BCD)

و بما أن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (Δ)

فإن $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ وهذا معناه $A\in(BCD)$

إذا النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي

–استنتج أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

المثلث ABC قائم في C ($\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$) ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

المثلث ABD قائم في D ($\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BD}$) ومنه النقط A ، B و D تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

إذا النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ أي سطح الكرة التي مركزها النقطة $E\left(3;\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ منتصف $[AB]$ ونصف قطرها $\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ وبما أن النقط

A ، B ، C و D من نفس المستوي فانها تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $E\left(3;\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. أ – بيّن أنّ المجموعة (Γ) هي اتحاد مستويين (Q_1) و (Q_2)

يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما

لتكن $M\left(x;y:z\right)$ نقطة من الفضاء

$M\in(\Gamma)$ يكافئ $d\left(M,(P_1)\right)=d\left(M,(P_2)\right)$ ويكافئ

$$\frac{|x-2y+z-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y+2z+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

ويكافئ $|x-2y+z-1|=|x-y+2z+1|$

ويكافئ $\left[\begin{array}{l} x-2y+z-1=x-y+2z+1 \\ \text{أو} \\ x-2y+z-1=-x+y-2z-1 \end{array}\right.$

ويكافئ $(y+z+2=0)$ أو $(2x-3y+3z=0)$

إذا المجموعة (Γ) هي اتحاد مستويين $(Q_1): 2x-3y+3z=0$

و $(Q_2): y+z+2=0$

ب– تحقق أنّ المستويين (Q_1) و (Q_2) متعامدان

$\overrightarrow{n_3}(2;-3;3)$ شعاع ناظمي لـ (Q_1) و $\overrightarrow{n_4}(0;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (Q_2)

$\overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{n_4}$ فان المستويين (Q_2) و (Q_1) متعامدان

بما أن $\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_4}=(0)(2)+(1)(-3)+(1)(3)=0$

ج – نسمي d_1 المسافة بين C والمستوي (Q_1) ، d_2 المسافة بين C والمستوي (Q_2) حيث (Q_1) المستوي الذي يشمل المستقيم (d)

لتكن النقطة H_1 المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (Q_1)

و النقطة H_2 المسقط العمودي لـ C على المستوي (Q_2)

إذن: $d_1=CH_1$ و $d_2=CH_2=AH_1$ (لأن $(Q_1)\perp(Q_2)$)

المثلثان ABC و ACH_1 قائمان في النقطتين C و H_1 على الترتيب ولهما نفس الزاوية $C\widehat{A}B$ (لأن النقط A ، B و H_1) وعليه فهما مثلثان متشابهان إذن : $\frac{AH_1}{AC}=\frac{CH_1}{CB}=\frac{AC}{AB}$

$AB=3\sqrt{2}$ ، $CB=\frac{\sqrt{6}}{2}$ و $AB^2=AC^2+CB^2$ أي

$AC=\sqrt{AB^2-CB^2}=\sqrt{\frac{33}{2}}$ إذن: $\frac{d_2}{AC}=\frac{d_1}{CB}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

لدينا: $\frac{d_2}{AC}=\frac{\sqrt{33}}{6}$ ومعناه $d_2=\frac{\sqrt{33}}{6}\times AC=\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{2}}$

أي: $d_2=\frac{11\sqrt{2}}{4}$

$\frac{d_1}{CB}=\frac{\sqrt{33}}{6}$ معناه $d_1=\frac{\sqrt{33}}{6}\times CB=\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}$

أي: $d_1=\frac{\sqrt{22}}{4}$

التمرين الرابع : (6,5 نقاط)

I) g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1. أ – $\lim_{x\to0}g(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

ب ـ اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x)=2e^{-x}-1$

$g'(x)=0$ معناه $x=\ln 2$ ،

$g'(x)>0$ معناه $x<\ln 2$ ، $g'(x)<0$ معناه $x>\ln 2$

جدول التغيرات:

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

ج–بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4<\alpha<\ln 6$

لدينا : $g(\ln 6)\simeq-0,12$ و $g(\ln 4)\simeq0,11$

أي $g(\ln 4)\times g(\ln 6)<0$

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $[\ln 4;\ln 6]$ ولدينا $g(\ln 4)\times g(\ln 6)<0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 4<\alpha<\ln 6$

د – استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$g(x)=0$ معناه $x=\alpha$ ، $g(x)>0$ معناه $x\in]0;\alpha[$ ،

$g(x)<0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)$

أ–بين أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<\alpha$

نسمي $P(n)$ الخصية " $1\le u_n<\alpha$ "

• نتحقق من $P(0)$

لدينا : $u_0=1$ و $1\le1<\alpha$ ومنه $1\le u_0<\alpha$ إذن $P(0)$

• نفرض $P(n)$ أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<\alpha$

ونبرهن على $P(n+1)$ أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_{n+1}<\alpha$

نعتبر الدالة h المعرفة على $[1;\alpha[$ بـ : $h(x)=2\left(1-e^{-x}\right)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[1;\alpha]$ ولدينا : $h'(x)=2e^{-x}$ ، $h'(x)>0$ فهي دالة متزايدة

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1\le u_n<\alpha$ معناه $h(1)\le h(u_n)<h(\alpha)$ وهذا يعني

أن: $1\le 2(1-e^{-1})\le u_{n+1}<2(1-e^{-\alpha})$ و بما أن $g(\alpha)=0$

فان: $2(1-e^{-\alpha})=\alpha$ ومنه $1\le u_{n+1}<\alpha$ أي $P(n+1)$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<\alpha$

ب – تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=2(1-e^{-u_n})-u_n=g(u_n)$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<\alpha$ فان: $g(u_n)>0$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ ، المتتالية (u_n) متزايدة

جـ–بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

بما أن المتتالية (u_n) متزايد ومحدودة من الأعلى فهي متتالية متقاربة

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ معناه $2(1-e^{-\ell})=\ell$ وهذا يعني

$2(1-e^{-\ell})-\ell=0$ أي: $\ell=\alpha$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

II) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ فسر النتيجة بيانيا

- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}=-\frac{1}{x}\times\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

بما أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ فان $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$

ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

ب ـ تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

$f(\alpha)=\dfrac{1-e^\alpha}{\alpha^2}=\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1-e^\alpha}{\alpha}\right)$ ، نعلم أن: $2(1-e^{-\alpha})=\alpha$

أي: $e^\alpha=\dfrac{2}{2-\alpha}$ ، نعوض فنحصل على $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1-e^x}{x^2}=\frac{-x^2e^x-2x(1-e^x)}{x^4}=\frac{e^xg(x)}{x^3}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

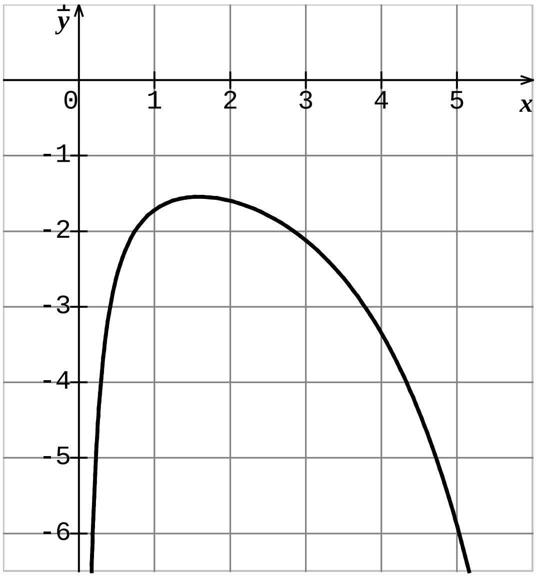
$f'(x)=0$ معناه $x=\alpha$ ، $f'(x)>0$ معناه $x\in]0;\alpha[$

و $f'(x)<0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $f(\alpha)$ $\searrow$ $-\infty$

3. الإنشاء:



III) F الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$F(0)=-\ln 2$ و من أجل $x>0$ ، $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن من أجل $x>0$ ،

$$F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

نضع: $\begin{cases}u(t)=(1-e^t)\\ v'(t)=\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(t)=-e^t\\ v(t)=-\dfrac{1}{t}\end{cases}$

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt=\left[-\frac{1-e^t}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ،

$$e^x\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\le e^{2x}\ln 2$$

بما أن: $x \le t \le 2x$ فإن $e^x \le e^t \le e^{2x}$

وبما أن: $t > 0$ فان $\frac{e^x}{t} \le \frac{e^t}{t} \le \frac{e^{2x}}{t}$

$\frac{e^x}{t} \le \frac{e^t}{t} \le \frac{e^{2x}}{t}$ ومعناه $\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}dt$

وهذا يعني أنّ: $e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \le e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$

ومعناه $e^x \left[\ln t\right]_x^{2x} \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \le e^{2x} \left[\ln t\right]_x^{2x}$

أي: $e^x\left(\ln 2x - \ln x\right) \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \le e^{2x}\left(\ln 2x - \ln x\right)$

ومنه: $e^x \ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \le e^{2x} \ln 2$

3. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة F مستمرة على اليمين في الصفر

بما أنّ : $e^x \ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \le e^{2x} \ln 2$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^{2x} \ln 2 = \lim\limits_{n \xrightarrow{>} 0} e^x \ln 2 = \ln 2$

فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt = \ln 2$

لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt = \ln 2$ ومنه: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} F\left(x\right) = \ln 2 = F\left(0\right)$

إذن: الدالة F مستمرة على اليمين في الصفر.

التصحيح النموذجي لإختبار الباكالوريا التجريبي
- شعبة الرياضيات -
الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

I) من أجل كل $x\in[2;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$

بما أن: $x^2+x+4>0$ و $(x^2+1)^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $x(x-1)$. من أجل كل $x\in[2;+\infty[$ ، $x(x-1)>0$
ومنه من أجل كل $x\in[2;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على $[2;+\infty[$.

II) 1. نسمي الخاصية التالية: $p(n)$: " $2<u_n<3$ "

- نتحقق من $p(0)$ ، لدينا : $u_0=2,5$ و $2<2,5<3$
  أي $2<u_0<3$ إذن: $p(0)$ محققة
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $2<u_n<3$ ونبرهن على $p(n+1)$ أي نبرهن أن $2<u_{n+1}<3$
  لدينا : $2<u_n<3$ معناه أن $f(2)<f(u_n)<f(3)$
  لأن f متزايدة تماما على المجال $]2;3[$ وهذا يعني أنّ: $2<u_{n+1}<\frac{29}{10}$ ومنه $2<u_{n+1}<3$ أي $p(n+1)$
  ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل عدد طبيعي n : $2<u_n<3$

2. $u_n^2-\frac{9}{10}(u_n^2+1)=\frac{u_n^2-9}{10}$

لدينا: $u_n<3$ ومنه $u_n^2<9$ ومنه $u_n^2-9<0$ ومنه $\frac{u_n^2-9}{10}<0$

إذن: $u_n^2-\frac{9}{10}(u_n^2+1)<0$ ومنه $u_n^2<\frac{9}{10}(u_n^2+1)$

3. $u_{n+1}-u_n=\frac{2-u_n}{u_n^2+1}$

بما أن $2<u_n<3$ فإن: $-1<2-u_n<0$ و $u_n^2+1>0$
وعليه من أجل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.
(u_n) متناقصة تماما وهي محدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متقاربة.

4. $u_{n+1}-2=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-2=\frac{u_n^3-2u_n^2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

5. نسمي الخاصية التالية: $p(n)$: " $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ "

- نتحقق من $p(0)$ ، لدينا : $u_0-2=0,5$ و $\left(\frac{9}{10}\right)^0=1$
  إذن: $0<u_0-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^0$ ومنه: $p(0)$ محققة
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ونبرهن على $p(n+1)$ أي نبرهن أن $0<u_{n+1}-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$

لدينا: $u_{n+1}-2=\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

و من $u_n^2<\frac{9}{10}(u_n^2+1)$ نستنتج أن $\frac{u_n^2}{u_n^2+1}<\frac{9}{10}$

ومنه $\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)<\frac{9}{10}(u_n-2)$ لأن: $u_n-2>0$

أي: $0<u_{n+1}-2<\frac{9}{10}(u_n-2)$

ولدينا: $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ (فرضية التراجع)

وعليه $0<u_{n+1}-2\le\frac{9}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^n$ أي: $0<u_{n+1}-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$

أي $p(n+1)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل عدد طبيعي n : $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$

بما أن: $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-2=0$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

التمرين الثاني : (3.5 نقاط)

U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء
U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء
U_3 يحتوي على 3 كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

1. شجرة الاحتمالات .(انظر في آخر التمرين)

$P_{u_1}(RN)=\frac{C_1^1\times C_{19}^1}{C_{20}^2}=\frac{19}{190}=\frac{1}{10}$ ومنه $P_{u_1}(NN)=\frac{9}{10}$

وبنفس الطريقة:

$P_{u_2}(RR)=\frac{1}{190}$ ، $P_{u_2}(NR)=\frac{36}{190}$ و $P_{u_2}(NN)=\frac{153}{190}$

$P_{u_3}(RR)=\frac{3}{190}$ ، $P_{u_3}(NR)=\frac{51}{190}$ و $P_{u_3}(NN)=\frac{136}{190}$

2. ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ–قيم المتغير العشوائي X هي: 0 ، 1 و2

ب– بين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $\frac{2}{285}$.

$$P(X=2)=P(U_2\cap RR)+P(U_3\cap RR)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{190}=\frac{1}{190}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{285}$$

جـ – بين أن احتمال الحادثة $(X=1)$ يساوي $\frac{53}{285}$.

$$P(X=1)=P(U_1\cap RN)+P(U_2\cap RN)+P(U_3\cap RN)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{19}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{36}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{51}{190}$$
$$=\frac{106}{3\times190}=\frac{53}{285}$$

د – استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

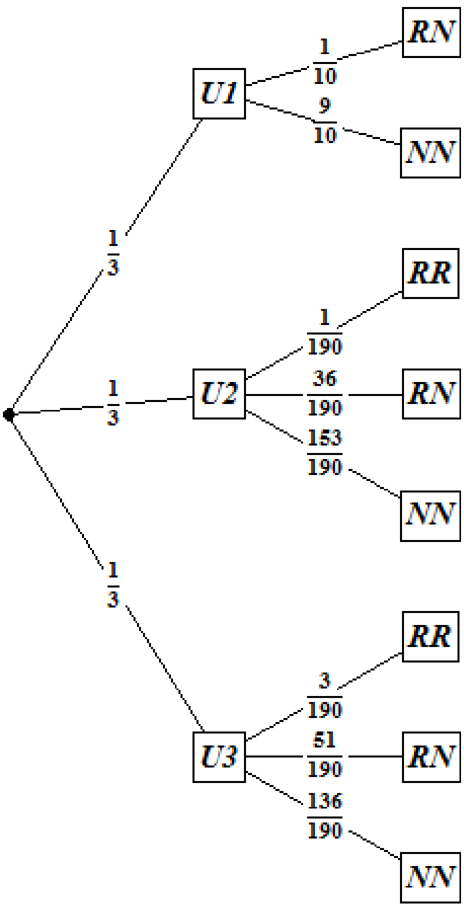
$$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$$
$$=1-\frac{2}{285}-\frac{53}{285}=\frac{230}{285}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{230}{285}$	$\frac{53}{285}$	$\frac{2}{285}$

$$E(X)=\frac{53}{285}+2\times\frac{2}{285}=\frac{57}{285}=0,2$$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 ؟

$$P_{RR}(U_3)=\frac{P(U_3\cap RR)}{P(RR)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{190}}{\frac{2}{285}}=\frac{57}{76}$$



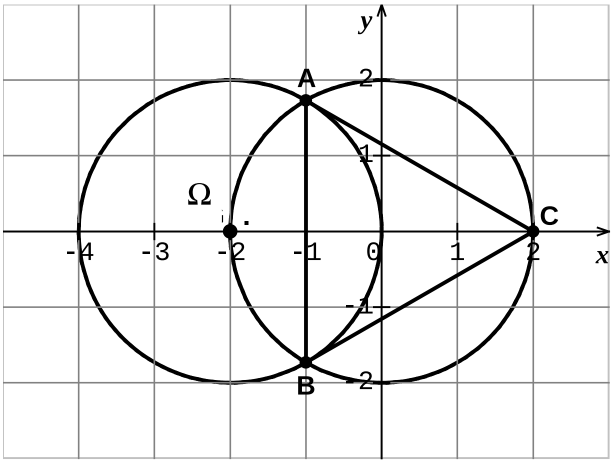
التمرين الثالث : (5,5 نقاط)

1. بوضع $z=x+iy$ ، $z^2=-2-2i\sqrt{3}$

معناه $\begin{cases}x^2-y^2=-2\\ 2xy=-2\sqrt{3}\\ x^2+y^2=4\end{cases}$ ومعناه $(x;y)\in\left\{(1;-\sqrt{3});(-1;\sqrt{3})\right\}$

إذن للمعادلة المطلوبة حلين هما: $z_1=1-\sqrt{3}i$ و $z_2=-1+\sqrt{3}i$

2 .أ – تعليم النقط: (الشكل)



ب – $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

المثلث ABC متقايس الأضلاع لأن: $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\frac{BC}{AC}=1$

و $Arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$.

جـ –لدينا: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=0$ ، إذن النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC وهي مركز الدائرة المحيطة به لأنه متقايس الأضلاع ونصف قطرها هو: $r=OA=|z_A|=2$.

3. أ – $z=2\left(-1+e^{i\theta}\right)$ معناه $z+2=2e^{i\theta}$ أي $|z-z_\Omega|=2$ وبالتالي $\Omega M=2$ ، إذن (Γ) هي الدائرة ذات المركز Ω ونصف القطر 2.

ب– $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=2$ و $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=2$.

إذن: $A\in(\Gamma)$ و $B\in(\Gamma)$

4. C هي صورة B بالدوران $r(A;\frac{\pi}{3})$ الذي كتابته المركبة: $z'-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)$ ، إذن صورة Ω بهذا التحويل هي:

$z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_\Omega-z_A)+z_A=0=z_O$ و O مركز (C)

ومنه الدائرة (C) هي صورة الدائرة (Γ) بالدوران $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$.

5. أ – الكتابة المركبة ل S هي: $z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.z = (1-i)z$

ب – $(1-i)z_A = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i = z_D$

ج $z_A = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

إذن: $z_D = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{12}}$

ولكن: $z_D = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$

إذن: $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

و $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

6. أ – حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $5x-24y=14$

$5x-24y=14$

معناه

$5x = 24y+14$

ومنه

$5x \equiv 14[24]$

ومنه $25x \equiv 70[24]$ أي $x \equiv 22[24]$ ،

إذن: $x = 24k+22$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$5x-24y=14$ معناه $24y = 5(24k+22)-14$

أي: $y = 5k+4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وعليه: $(x;y) \in \{(24k+22 \ ; 5k+4)/k \in \mathbb{Z}\}$

ب – استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n حيث يكون:

$$\arg(z_D)^n = \frac{\pi}{2}+\arg(z_A)$$

$\arg(z_D)^n = \frac{\pi}{2}+\arg(z_A)$ معناه $\frac{5n\pi}{12} = \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومعناه $5n-24k=14$ ومنه $n = 24\lambda+22$ مع $\lambda \in \mathbb{N}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \ ; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1. أ – ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة $x=0$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{3}{2}x^2 - x^2\ln x + 1 = 1$$

بما أن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0)$ فإن الدالة f مستمرة عند الصفر من اليمين.

ب – احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)}{x}$$

أي: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{3}{2}x - x\ln x = 0$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر من اليمين ، بيانياً المنحني (C_f) يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(0;1)$ معامل توجيهه .معدوم معادلته $y=1$.

2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

3. – الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x) = x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x\left(\frac{-2}{x}\right) = 2x(1-\ln x)$.

ب– استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

$f'(x)=0$ معناه $x=0$ أو $x=e$

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ و معناه $0<x<e$

$f'(x)<0$ معناه $1-\ln x<0$ و معناه $x>e$

إذن:الدالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$

x	$-\infty$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(e) = 1+\frac{1}{2}e^2 \simeq 4,7$

4. معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة1

$(\Delta): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ أي: $(\Delta): y = 2x+\frac{1}{2}$

5. g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ– احسب $g'(x)$ و $g''(x)$.

$g'(x) = f'(x)-2$ و $g''(x) = f''(x) = -2\ln x$

ب – بيّن أنّ الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1 ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

$g''(x)=0$ معناه $\ln x=0$ و معناه $x=1$

$g''(x)>0$ معناه $\ln x<0$ و معناه $x<1$

الدالة g'' متزايدة تماما على $]0;1[$ ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ وتنعدم من أجل $x=1$ وبالتالي الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1

جـ – استنتج اتجاه تغير الدالة g ، احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

بما أن الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1 فإن من اجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)\le g'(1)$ أي: $g'(x)\le 0$

وعليه الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

$$g(1)=f(1)-2-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$$

– إذا كان $0<x\le 1$ فإن $g(x)\ge g(1)$ أي: $g(x)\ge 0$

– إذا كان $x\ge 1$ فإن $g(x)\le g(1)$ أي: $g(x)\le 0$

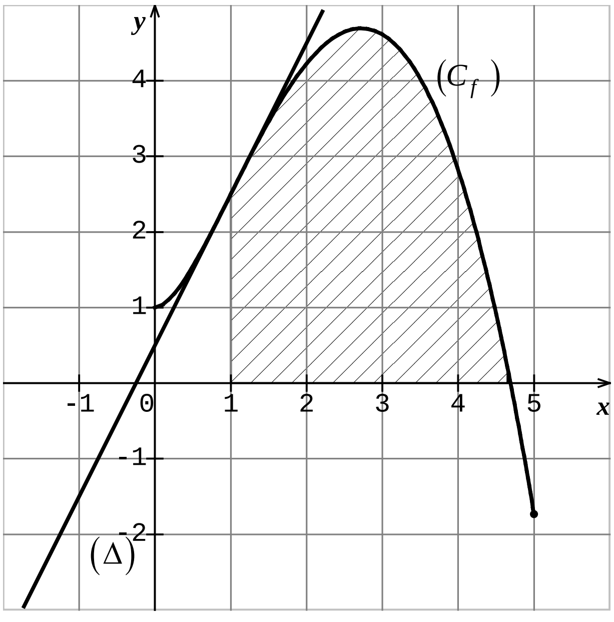
د– استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

تفسير النتيجة بيانياً: (C_f) يخترق (Δ) في النقطة $\Omega\left(1;\frac{5}{2}\right)$ وعليه هذه النقطة هي **نقطة انعطاف** للمنحني (C_f).

6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $4,6<\alpha<4,7$ (تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة).

7. رسم (Δ) و (C_f) على المجال $[0;5]$.



8. أ – باستعمال المكاملة بالتجزئة جد الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ و التي تنعدم عند القيمة 1.

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ و التي تنعدم عند القيمة 1 هي الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=\int_1^x t^2\ln t\,dt$

نضع: $\begin{cases}u(t)=\ln t\\ v'(t)=t^2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(t)=\dfrac{1}{t}\\ v(t)=\dfrac{1}{3}t^3\end{cases}$

$$F(x)=\int_1^x t^2\ln t\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\times\frac{t^3}{3}\ln t\,dt$$

ومنه: $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{9}$

ب – احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\alpha$ و $y=0$.

$$A(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)\,dx=\int_1^\alpha\left(\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1\right)dx$$

أي : $A(\alpha)=\left[\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{3}\ln x+\dfrac{1}{9}x^3+x\right]_1^\alpha$

أي : $A(\alpha)=\dfrac{11}{18}\alpha^3-\dfrac{\alpha^3}{3}\ln\alpha+\alpha-\dfrac{29}{18}$

جـ ـ لدينا: $f(\alpha)=0$ معناه $\alpha^2\ln\alpha=\dfrac{3}{2}\alpha^2+1$

إذن: $A(\alpha)=\dfrac{11}{18}\alpha^3-\dfrac{\alpha}{3}\left(\dfrac{3}{2}\alpha^2+1\right)+\alpha-\dfrac{29}{18}$

أ ي: $A(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+12\alpha-29}{18}\,u.a$.

على التـــلميذ أن يعـــالج أحد الموضـــوعين على الخيـــــار

الموضـــــوع الأول

التمرين الأول : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ وليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
2. بين أن المستقيمين (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي
3. ليكن المستوي (P) الذي يوازي (D) و يشمل (AB)
   - أ. بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
   - ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P)
   - ج. بين أن المسافة بين نقطة كيفية من (D) و (P) ثابتة ، حدد هذا الثابت
   - د. أعط تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) المعرف بتقاطع (P) و المستوي (Oxy)
   - ه. عين مجوعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$
   - و. لتكن (S) سطح كرة التي تمس (P) في النقطة $C(10;1;6)$ حيث مركزها ω يبعد عن (P) بمسافة $d=6$ و يقع من جهة O ، عين معادلة ديكارتية لـ (S)
4. أ/ عين تمثيل الوسيطي للمستوي (OAB) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له
   ب/ بين أن المستوي (OAB) و سطح الكرة (S) يتقاطعان و فق دائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

التمرين الثاني : (6 نقط)

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-4z+16=0$
   ب/ استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$ ، حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركب y_k المعرف كمايلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : k عدد صحيح
   - بين أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن $y_{2013}=0$ و أكتب العد $-2^{2015}y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث α عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $Z_B=2-2i\sqrt{3}$ و لتكن C النقطة ذات اللاحقة : $Z_C=5-2^{2015}y_{2015}$
   - أ. تحقق أن : $Z_C=\frac{3}{2}Z_A+Z_B$

ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = -2^{2015} y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له

5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث: Z_n لاحقة A_n

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و $U_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي

أ. بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول U_0 و أساسها q

ب. استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(U_0^4 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}$

التمرين الثالث : (3نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)......5x - 6y = 3$

1. أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د/ حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية

2. عين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3. a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الرابع (6 نقط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها

4. أرسم (D')، و (C)

5. ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) و المنحنى (C)

II. نضع : $I=\int_{2}^{3}\left[f(x)-x\right]dx$

1. فسر هندسيا العدد I
2. بين أنه من كل x من ، $\ln(1+X)\le X$
3. استنتج أن: $0\le I\le\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$

الموضـــــوع الثاني

التمرين الأول :(5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B ، C ، D و H التي لواحقها على الترتيب : $z_A=a$ ، $z_B=1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C=ia$ ، $z_D=-\frac{1}{a}i$ ، $z_H=z_D+1$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن

1. أ / تحقق أن : $z_B-z_D=\overline{z_D}(z_A-z_C)$

ب/ استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان

2. أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D

ب/ حدد z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S ، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل

ج/ بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما

3. لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي : $M_{n+1}=S(M_n)$

حيث z_n لاحقة النقطة M_n و نضع : $U_n=|z_n-z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي

أ/ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب/ عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة

ج/ نرمز بـ T_n إلى مجموع الأطوال القطع المستقيمة $[A\Omega],[M_1\Omega]...............,[M_n\Omega],[M_{n+1}\Omega]$

- أحسب المجموع T_n بدلالة

4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a(1+e^{i\theta})$ حيث : $\theta\in\mathbb{R}$

- حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$

التمرين الثاني : (4 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

II. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$ ....(1)

1. عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. بين أن العددين x و y أوليان فيمابينهما باعتبار الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (1)
4. عين قيم العدد الطبيعي بحيث : $n\equiv 4[25]$ و باقي قسمة على العدد 106 هو 17
5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10

التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$
2. استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و أن $2x-y+2z+2=0$ معادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3. أ/ أكتب معادلة الديكارتية للمستوي (P) ، المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب/ بين أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $AM=CM$ هي المستوي (P') الذي معادلته الديكارتية $4y+2z-7=0$

ج/ بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4. أ/ بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2);(C;-2\alpha^2)\}$ حيث α وسيط حقيقي

- عين بدلالة α إحداثيات G_α و استنتج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في $\mathbb{R}$

التمرين الرابع :(7 نقط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1. أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2. أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ،ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f .
3. شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. حل المعادلة $f(x)=0$ استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
5. أحسب $f(1)$ ثم أنشئ (C_f).
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=f(m)$
7. أ) عين العددين الحقيقين a ، b بحيث تكون الدالة F دالة أصلية للدالة f حيث : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$.

ب) أحسب بـ cm^2 وبدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=\lambda$ حيث $\lambda\prec\frac{1}{2}$.

ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} S(\lambda)$

II

نسمي $f'=f^{(1)}$ ، $f''=f^{(2)}$ ، $f^{(3)}$ ،.......... $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$
2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحنى $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ يقبل مماس في النقطة $M_n(x_n;y_n)$ يوازي حامل محور الفواصل ،حيث $f^{(n)}$ هي الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f .

أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n ، y_n .

ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} x_n$.

جـ) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ،ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} y_n$.

بالتوفيق والسداد

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1.تمثيل الوسيطي لـ (AB) :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه ويشمل النقطة $A(8;0;8)$ إذن : $(AB):\begin{cases}x=2\lambda+8\\y=3\lambda\\z=2\lambda+8\end{cases};\lambda\in IR$

2.تبيان أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه لـ (AB) و $\overrightarrow{u_{(D)}}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه لـ (D) و منه : $\frac{-2}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$ ومنه (AB) و (D) غير متوازيين أي متقاطعان

لنبحث عن نقطة التقاطع :

نحل الجملة : $\begin{cases}-5+3t=2\lambda+8...(1)\\1+2t=3\lambda....(2)\\-2t=2\lambda+8....(3)\end{cases}$ بعد التبسيط بين المعادلتين (2) و (3) نجد : $(t;\lambda)=\left(\frac{-13}{5};\frac{-7}{5}\right)$ و الثنائية لا تحقق المعادلة (1) إذن $(AB)\cap(D)=\varnothing$ إذن نستنتج أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي

3. (P) المستوي الذي يوازي (D) و يشمل (AB)

أ/ تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) :

يكفي أن نبين أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{u_{(D)}}$

لدينا : $\begin{aligned}&\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+3(-2)+1(2)=0\\&\vec{n}.\overrightarrow{u_{(D)}}=2(3)+2(-2)1(-2)=0\end{aligned}$

ب. تعيين المعادلة الديكارتية لـ (P) :

$\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) و $A(8;0;8)\in(P)$ ينتج : ومنه : $\begin{aligned}&2(8)+0(-2)+1(8)+d=0\\&d=-24\end{aligned}$

$(P):2x-2y+z-24=0$

ج. تبيان أن المسافة $d((P);(D))$ ثابتة مع تحديد الثابت :

لتكن $M(x;y;z)\in(D)$ معناه : $M(-5+3t;1+2t;-2t)$

ومنه :

$$d((P);(D))=d((P);M)=\frac{|2(-5+3t)-2(1+2t)+(-2t)-24|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

ومنه : $d((P);(D))=\frac{|-36|}{\sqrt{9}}=\frac{36}{3}=12$

د. التمثيل الوسيطي لـ (Δ) المعرف بتقاطع (P) و (Oxy) :

لدينا : $\begin{cases}(P):2x-2y+z-24=0\\(Oxy):z=0\end{cases}$ و بوضع : $y=k$ ينتج :

$\begin{cases}x=y+12\\y=k\\z=0\end{cases}$ أي : $(\Delta):\begin{cases}x=k+12\\y=k\\z=0\end{cases};k\in IR$

هـ. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ هي :

لدينا $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$ يكافىء $\begin{cases}2x-2y+z-24=0\\z=0\end{cases}$ مما سبق ينتج المستقيم (Δ)

و. تعيين معادلة ديكارتية لـ (S) :

نصف قطر لـ (S) هو $C\omega=6$

لنعين إحداثيات ω : لنفرض (Δ') حيث $\omega(x;y;z)\in(\Delta')$ المستقيم العمودي على (P) في C ينتج :

$(\Delta'):\begin{cases}x=2k'+10\\y=1-2k'\\z=6+k'\end{cases};k'\in IR$ ومنه : $d((P);\omega)=6$ بعد التبسيط نجد : $d((P);\omega)=\frac{|9t|}{3}=6$ ومنه : $t=2$ أو $t=-2$

ومنه : $\omega(14;-3;8)$ أو $\omega(6;5;4)$

بتعويض إحداثيات كل من ω و النقطة O في معادلة (P)

$O(0;0;0):-24<0$

نجد : $\omega(14;-3;8):2(14)-2(-3)+8-24=18>0$ اذن

$\omega(6;5;4):2(6)-2(5)+4-24=-18<0$

$\omega(6;5;4)$ و النقطة O في نفس جهة من المستوي (P) **إذن معادلة لـ(S) هي : $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$**

4.أ.تعيين تمثيل الوسيطي للمستو(OAB) :

لدينا $\overrightarrow{OA}(8;0;8)$ و $\overrightarrow{OB}(10;3;10)$ أشعة التوجيه لـ(OAB) و يشمل النقطة O إذن :

$(OAB):\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases};(t';\lambda')\in IR^2$

استنتاج المعادلة الديكارتية لـ(OAB) :

$\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ تكافىء : $\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\\lambda'=\frac{y}{3}\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ وبوضع : $x=z$ أي

$(OAB):x-z=0$:

ب. تبيان أن (S) و (OAB) متقاطعان وتعيين عناصر المميزة للتقاطع :

لدينا : $6<\sqrt{2}=\frac{|6-4|}{\sqrt{1+0+1}}=d\left((OAB);\omega\right)$ إذن :

$(OAB)\cap(S)$ هو دائرة

المستقيم الذي يشمل ω ويعامد (OAB) هو :

$\begin{cases}x=6+h\\ y=15 \quad ;h\in IR\\ z=4-h\end{cases}$ ومنه مركز الدائرة هو Ω نقطة تقاطع

هذا المستقيم مع (OAB) وبعد الحساب ينتج : $h=-1$ و

$\Omega(5;5;5)$ و نصف قطرها r حيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2\left((OAB);\omega\right)}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$$

التمرين الثاني :

1.تعيين العددين الحقيقين a و b :

$\begin{matrix}(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}\\ (b-i)^2=2-2i\sqrt{3}\end{matrix}$ ومنه : $\begin{matrix}a^2-1+2ai=2+2i\sqrt{3}\\ b^2-1-2bi=2-2i\sqrt{3}\end{matrix}$ بالمطابقة

نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$

2.أ.حل في $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه الحلول هي : $z_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2=2-2i\sqrt{3}$

ب.استنتاج حلول المعادلة $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2=L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2=L_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2^2=L_2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج :

$$z=\sqrt{3}+i;z=-\sqrt{3}-i;z=\sqrt{3}-i;z=-\sqrt{3}+i$$

3.تبيان أن : $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$:

$$y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

استنتاج أن $y_{2013}=0$: لدينا

$$y_{2013}=\frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3}=\frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

كتابة $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$:

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3}=-2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi=$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi=-2i\sin\frac{-\pi}{3}=\sqrt{3}i$$

4.أ.تحقق أن : $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$:

لدينا $z_C=5-2^{2015}y_{2015}=5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C=\frac{2}{3}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2-2i\sqrt{3}=5+i\sqrt{3}$

ب.تبيان : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}y_{2015}$:

لدينا :
$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$=i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=-2^{2015}y_{2015}$$

تحديد طبيعة التحويل f :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}$ يكافىء $z_B-z_C=i\sqrt{3}\left(z_A-z_C\right)$

ومنه : $|z_B-z_C|=\sqrt{3}|z_A-z_C|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

يكافىء: $\begin{matrix}CB=\sqrt{3}CA\\ \left(\overline{CB};\overline{CA}\right)=\frac{\pi}{2}\end{matrix}$ اذن f تشابه مباشر مركزه C و

نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ايجاد العبارة المركبة : f تشابه مباشر مركزه C ونسبته

$\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha=i\sqrt{3};\beta=z_C\left(1-\alpha\right)=8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f:z'=i\sqrt{3}z+8-4i\sqrt{3}$

5.أ.تبيان أن (U_n) **متتالية هندسية مع تحديد أساسها** q **و حدها الأول** U_0 :

لدينا :

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|i\sqrt{3}z_{n+1}+\beta-i\sqrt{3}z_n-\beta\right|$$

$$=\left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|=\left|i\sqrt{3}\right|\left|z_{n+1}-z_n\right|=\sqrt{3}U_n$$

ومنه (U_n) **هندسية أساسها** $q=\sqrt{3}$ **و حدها الأول**

$$U_0=|z_1-z_0|=\left|i\sqrt{3}z_0+8-4i\sqrt{3}-z_0\right|$$

$$=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$$

ب.استنتاج عبارة U_n **بدلالة** n :

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{128-32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

حساب المجموع S_n **بدلالة** n :

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=U_0\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

ج.برهان بالتراجع :

نتحقق من صحة $P(0)$ **لدينا :** $U_0=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ **الطرف1**

$\sqrt{128-32\sqrt{3}}=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}$ الطرف 2 ومنه

$P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0\times U_1\times....\times U_n\times U_{n+1}=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times U_{n+1}$$

$$=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times\left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}^{\,n+1}$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

التمرين الثالث :

1.أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :

إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x-6y=3$ ومنه : $5x=6y+3=3(y+2)$ ومنه حسب غوص $3/5x$ و 3 و 5 أوليان فيمابينها إذن $3/x$ أي $x=3k$

ب.استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)

لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن (E) تكافيء : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0-6y_0=3$ إي $5(3k)-6y_0=3$ أي : $5(k)-2y_0=1$

ايجاد الثنائية $(k;y_0)$ باستعمال القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليديس لدينا : $5=2\times2+1$ ومنه $5-2(2)=1$ أي $5(1)-2(2)=1$ إذن $(k;y_0)=(1;2)$ ومنه $(x_0;y_0)=(3;2)$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي : $5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا 6 و 5 أوليان فيمابينها و $6/5(x-3)$ أي $6/(x-3)$ ومنه $x=6k+3$

بالتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ ومنه الحلول هي الثنائيات : $(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$

ج.استنتاج حلول الجملة (S) :

(S) تكافيء : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ ومنه : $6\alpha-1=5\beta-4$ أي : $5\beta-6\alpha=3$ وحسب السؤال 1.ب. نجد : $(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α و β في x نجد : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

د.حل الجملة (S) بطرق غير استنتاجية :

(S) تكافيء $\begin{cases}5x\equiv-5[30]\\6x\equiv-24[30]\end{cases}$ إذن : $6x-5x\equiv-19[30]$ أي : $x\equiv-19[30]$ ومنه $x\equiv11[30]$ اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

2.تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث :

$(x;y)$ حلول المعادلة (E) و $x^2-y^2\le56$ فإن :

$(6k+3)^2-(5k+2)^2\le56$ تكافيء $11k^2+16k-51\le0$

دراسة أشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k=\{-3;-2;-1;0;1\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي : $(-15;-13);(-9;-8);(-3;-3);(3;2);(9;7)$

4.تعين α و β حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) :

لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^{3}$ فإن : $0\le\alpha<3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}$ فإن $0\le\beta<5$ ولدينا كذلك :

$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و

$b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times5^3=126\alpha+25\beta$

$(a;b)$ حلا للمعادلة (E) يكافيء $5a-6b=3$ ومنه :

$5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ بعد التبسيط نجد

$51\alpha+25\beta=202$ وبما أن : $0\le\alpha<3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$

ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$ إذن $\alpha=2$ و $\beta=4$

التمرين الرابع : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$

1.أ.إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{1+2e^{-2x}}{e^{-x}}\right)$

$=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-\ln e^{-x}=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$ لإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

تبيان أن (D) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$ إذن (D) م م لـ (C) عند $+\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $2e^{-2x}+1>1$ من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(2e^{-2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR ومنه $f(x)-x>0$ اذن (C) يقع فوق (D) من اجل كل x من IR

2.أ. إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^x+\frac{2}{e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^x}\right)$

$=\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln e^x=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)=+\infty$ لأن:

$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0;\ \lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

تبيان أن (D') ذو المعادلة $y=-x+\ln 2$ مستقيم مقارب م بجوار $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+\ln 2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)+x-\ln 2\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2=0$

إذن (D') م م لـ (C) عند $-\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ(C) بالنسبة (D'):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا : $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $\frac{1}{2}e^{2x}+1>1$

من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR ومنه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ اذن (C) يقع فوق (D') من اجل كل x من IR

3.دراسة إتجاه تغير f : f ق إ على IR حيث :

$$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}=\frac{e^{2x}-2}{e^x\left(e^x+2e^{-x}\right)}$$

إشارة $f'(x)$: تتعلق باشارة $e^{2x}-2$ لان $e^x\left(e^x+2e^{-x}\right)>0$

$e^{2x}-2\ge 0$ معناه : $e^{2x}\ge 2$ معناه $2x\ge\ln 2$ أي $x\ge\frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

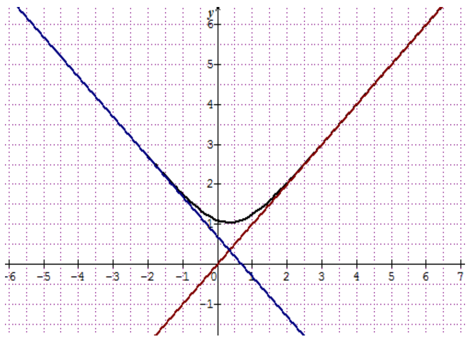
الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$

ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗ $+\infty$

4.الرسم:



5.أ.تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة

من أجل كل عدد حقيقي m : لدينا : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$

تكافىء $y-mx-\frac{\ln 2}{2}+m\frac{\ln 2}{2}=0$ ومنه :

$y-\frac{\ln 2}{2}+m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)=0$ يكافىء : $\begin{cases} y-\frac{\ln 2}{2}=0 \\ x-\frac{\ln 2}{2}=0 \end{cases}$ أي :

$x=\frac{\ln 2}{2};y=\frac{\ln 2}{2}$

ب. المناقشة البيانية:

إذا كان $m=1$ فإن (Δ_m) هو (D)

إذا كان $m=-1$ فإن (Δ_m) هو (D')

(D) و (D') يتقاطعان في نقطة الثابتة A

إذا كان $m\in[-1;1]$ فإن (Δ_m) لايقطع المنحنى (C)

إذا كان $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن (Δ_m) يقطع المنحنى (C) في نقطة وحيدة

II.1. تفسير الهندسي للعدد I : I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x$ و $x=2$ و $x=3$

2.تبيان من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $\ln(1+X)\le X$

نضع : $h(x)=\ln(1+X)-X$ ندرس تغيرات الدالة h

لدينا h ق.إ على $[0;+\infty[$ حيث :

$h'(x)=\frac{1}{1+X}-1=\frac{-X}{1+X}<0$ ومنه h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

لدينا $h(0)=0$ و h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ اذن فإن إشارة الدالة h سالبة على المجال $[0;+\infty[$ معناه

$\ln(1+X)-X\le 0$ أي $\ln(1+X)\le X$

3.استنتاج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$:

لدينا : $I=\int_2^3\left(f(x)-x\right)dx=\int_2^3\ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx$ و بما أن :

$2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR $([2;3])$

فإن : حسب السؤال السابق : $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \le 2e^{-2x}$ ومنه :

$I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ أي $\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

ونعلم أن $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \ge 0$ و بما أن $2<3$ فإن

$0 \le I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ ومنه : $I \ge 0$ أي $\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \ge 0$

الموضوع الثاني

التمرين الاول :

1ـأ/ تحقق أن : $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_C\right)$

لدينا: $z_B - z_D = 1 + \frac{a-1}{a}i + \frac{1}{a}i = 1 + \frac{a-1+1}{a}i = 1+i$

و لدينا من جهة أخرى : $\overline{z_D}\left(z_A - z_C\right) = \frac{1}{a}i\left(a - ai\right) = i+1$

ومنه : $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_C\right)$

ب/ استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان :

من السؤال ـأـ لدينا : $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{a}i$ ومنه :

$\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{a}i\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لان $\frac{1}{a}>0$ وبالتالي :

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : (AC) و (BD) متعامدان

2ـ أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$

لدينا $S(A)=B$ معناه : $z_B = \alpha z_A + \beta$ ....(1)

$S(C)=D$ معناه : $z_D = \alpha z_C+\beta$ ....(2) ومنه بطرح (1) من (2) نجد : $z_B - z_D = \alpha\left(z_A-z_C\right)$ ومنه : $\alpha = \frac{z_B-z_D}{z_A-z_C} = \overline{z_D}$

ومنه : $\alpha = \frac{1}{a}i$

لدينا : $z_D = \alpha z_C+\beta$ ومنه : $\beta = z_D - \alpha z_C$ أي :

$\beta = -\frac{1}{a}i - \frac{1}{a}i(ai)$ ومنه : $\beta = 1-\frac{1}{a}i$

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{a}iz + 1 - \frac{1}{a}i$

ب/ تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S :

نعلم أن : $z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ومنه : $z_\Omega = \frac{1-\frac{1}{a}i}{1-\frac{1}{a}i} = 1$ ومنه $z_\Omega = 1$

- **تحديد العناصرة المميزة للتشابه S :**

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 1$ و نسبته $\frac{1}{a}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لاحظ أن : $\frac{1}{a}>0$)

ج/ تبيان أن المثلثين OAC و BHD متشابهان :

لدينا $S(A)=B$ و $S(C)=D$

لنحدد لاحقة النقطة O بالتشابه S

$z' = \frac{1}{a}i(0)+1-\frac{1}{a}i = 1-\frac{1}{a}i = z_H$ لأن $z_H = 1+z_D = 1-\frac{1}{a}i$

وهكذا $S(O)=H$

إذن صورة المثلث OAC بالتشابه S هو المثلث BHD ومنه المثلثان OAC و BHD متشابهان

- **ايجاد علاقة بين مساحتي المثلثين :**

$A(BHD) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 A(OAC)$ ومنه $A(BHD)=\frac{A(OAC)}{a^2}$

3ـ أ/تبيان أن (U_n) متتالية هندسية :

لدينا : $U_{n+1} = \left|z_{n+1} - z_n\right| = \Omega M_{n+1}$

بما أن : $M_{n+1} = S\left(M_n\right)$ فإن : $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n$ ومنه :

$U_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n = \frac{1}{a}\left|z_n - z_\Omega\right| = \frac{1}{a}U_n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{a}U_n$ ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{a}$ و حدها الأول

$U_0 = \left|z_A - z_\Omega\right| = \left|z_0 - z_\Omega\right| = |a-1|$ أي : $U_0=|a-1|$

ب/ تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة :

(U_n) متقاربة يعني : $-1<q\le1$ أي : $-1<\frac{1}{a}\le1$ وبما أن $\frac{1}{a}>0$ ينتج : $0<\frac{1}{a}\le1$ أي $a\ge1$ وبما أن $a\ne1$ فإن : $a>1$

أي : $a\in\left]1;+\infty\right[$

ج/ حساب المجموع T_n بدلالة n :

$T_n = M_{n+1}\Omega + M_n\Omega+......+M_0\Omega$ (نلاحظ أن :

$U_n = \left|z_n - z_\Omega\right| = U_n$) ومنه : $T_n = U_{n+1}+U_n.......+U_0$ ومنه

$T_n = U_0\left(\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\right)$ ومنه : $T_n = |a-1|\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$ ومنه :

$$T_n = a\times\frac{|a-1|}{a-1}\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right)$$

4ـ لدينا $Z = a\left(1+e^{i\theta}\right)$ و $\theta\in IR$:

- **تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ) :**

$Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ يكافيء :

$Z = a+ae^{i\theta}$ يكافيء $Z-a = ae^{i\theta}$ وبما أن $\theta\in IR$

يكون لدينا $|Z-a|=|a|=a$ لان $a>0$ أي (Γ) هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة a ونصف قطرها $r=a$

التمرين الثاني :

I.تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة $2014\alpha = 475\beta + m$ **حلولا في** $\mathbb{Z}^2$:

$2014\alpha = 475\beta+m$ تكافيء $2014\alpha - 475\beta = m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ وهكذا

$2014\alpha=475\beta+m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافىء

$19(106\alpha-25\beta)=m$ ومنه $19/m$ أي $m=19h$ مع $h\in IR$

II. **لدينا المعادلة $2014x-475y=-19....(1)$:**

1.تعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0-4x_0=1$:

المعادلة (1) تكافىء $19(106x-25)=-19$ وتكافىء $106x-25y=-1...(*)$ ولدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل نجد : $x_0=4$ إذن $y_0=17$ أي $(x_0;y_0)=(4;17)$

2.حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) :

المعادلة (1) و المعادلة $(*)$ متكافئتان لهما نفس مجوعة الحلول إذن نحل المعادلة $106x-25y=-1...(*)$

بما أن الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة $(*)$ فإن :

$(E)...106(4)-25(17)=-1$

من $(*)$ و (E) نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ أي :

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيمابينهما

حسب غوص $25/(x-4)$ إذن : $x=25k+4$

بتعويض x نجد : $y=106k+17$ إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3.تبيان أن x و y أوليان فيمابينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y أي $\begin{matrix}d/x\\d/y\end{matrix}$ ومنه $\begin{matrix}d/106x\\d/25y\end{matrix}$ إذن : $d/106x-25y$ أي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج $d/1$ أي $d=1$

إذن : $PGCD(x;y)=1$ ومنه x و y أوليان فيمابينهما

4. تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17 :

أي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv4[25]\\n\equiv17[106]\end{cases}$ إذن : $\begin{matrix}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{matrix}$ ومنه

: $106\beta+17=25\alpha+4$ ومنه $106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$ ومنه الثنائية $(4\times13;17\times13)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال 2

نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases};p\in\mathbb{N}$ لكن $n=106\beta+17$ بالتعويض نجد

$n=106(25p+52)+17$ ومنه :

$n=2650p+5529;\ p\in\mathbb{N}$

5.تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x+y$ مضاعف لـ 10 :

لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$

ولدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv0[10]$ أي : $131k+21\equiv0[10]$ أي : $k+1\equiv0[10]$ أي $k\equiv-1[10]$ أي $k\equiv9[10]$ ومنه $k=10t+9$ ومنه :

$(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$

التمرين الثالث :

1.حساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية : $B\hat{A}C$:

لدينا $\begin{matrix}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\end{matrix}$ ومنه :

$COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{2}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=0,21$ ومنه

$B\hat{A}C=77^0$

2.استنتاج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

بما أن : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=77^0$ فإن A ، B و C ليست في استقامية

استنتاج أن معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

$A(-2;0;1):2(-2)-0+2(1)+2=-2+2=0$

لدينا : $B(1;2;-1):2(1)-2+2(-1)+2=4-4=0$

$C(-2;2;2):2(-2)-2+2(2)+2=-6+6=0$

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

3.أ. كتابة معادلة الديكارتية للمستوي (P) المستوي المحوري لـ$[AB]$:

(P) المستوي المحوري لـ$[AB]$ معناه : $AM=BM$ يكافىء :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$

ومنه بعد التبسيط نجد : $6x+4y-4z-1=0$

ب. تبيان أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $AM=CM$ هي المستوي (P') معادلته $4y+2z-7=0$:

$AM=CM$ معناه :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$

وبعد التبسيط نجد : $4y+2z-7=0$ (و.هـ.م)

ج. تبيان أن (P) و (P') متقاطعان : لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}(6;4;-4)$

و $\overrightarrow{n_{(P')}}(0;4;2)$ ومنه $\frac{0}{6}\neq\frac{4}{4}\neq\frac{2}{-4}$ إذن (P) و (P')

متقاطعان وفق مستقيم

تعيين التمثيل الوسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P')

لدينا : $\begin{cases} 6x+4y-4z-1=0 \\ 4y+2z-7=0 \end{cases}$ ومنه :

$\begin{cases} 6x-2z+7-4z-1=0 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 6x-6z=-6 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \\ z=z \end{cases}$ إذن :

$\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ إذن : $(\Delta):\begin{cases} x=t-1 \\ y=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4};t\in IR \\ z=t \end{cases}$

4.أ/ تبيان أن (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ و $\overrightarrow{n_{(ABC)}}(2;-1;2)$ ومنه : $\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$ إذن

$\vec{u}_{(\Delta)}//\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ إذن (Δ) و (ABC) متعامدان ويتقاطعان في نقطة هي ω

لدينا : $2(t-1)-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}\right)+2t+2=0$ ومنه : $t=\frac{7}{18}$

ومنه : $\omega\left(-\frac{11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$

ب/ استنتاج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

لتبيان أن ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يكفي أن نبين : $\omega A=\omega B=\omega C$

ولدينا $\omega A=\omega B=\omega C=\frac{3\sqrt{170}}{18}$

5. النقطة G_α مرجح الجملة $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2)(C;-2\alpha^2)\}$ حيث : α عدد حقيقي

ـ تعين احداثيات النقطة G_α :

$x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4$ ، $y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2$ و $z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2$

ـ استنتاج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في IR :

لدينا : $\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2 \quad ;\alpha^2\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2 \end{cases}$ بوضع : $\alpha^2=\lambda$ نجد :

$\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\lambda+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\lambda \quad ;\lambda\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\lambda \end{cases}$ ومنه تمثل النقط G_α مستقيم

I. (1 أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

- **حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$:**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2xe^{2x}\right)=0$ لان

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x}=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

(2 أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

- **حساب المشتقة :**
- $f'(x)=-2e^{2x}+(1-2x)\times 2e^{2x}=(-2+2-4x)e^{2x}=-4xe^{2x}$

$f'(x)=-4xe^{2x}$ من أجل كل عدد حقيقي x

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**
- **جدول اشارة المشتقة :**

شارة $f'(x)$ من اشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- الدالة f **متزايدة على المجال** $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

(3 شكل جدول تغيرات الدالة f.

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(4 حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

- **حل المعادلة $f(x)=0$:**
- $f(x)=0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x}=0$

يكافئ $1-2x=0$ لان $e^{2x}\neq 0$

يكافئ $x=\dfrac{1}{2}$

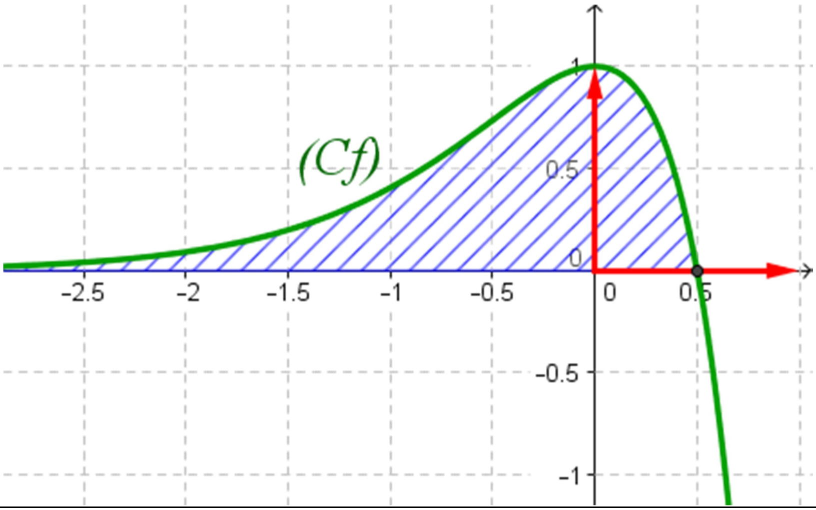
- **استنتاج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:**

$(C_f)\cap(x'x)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$

(5 أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f).

- **حساب $f(1)$:**
- $f(1)=(1-2(1))e^{2\times1}=-e^2=-7.39$

▪ **الرسم :**



6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=f(m)$

▪ **مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x)=f(m)$:**

▪ حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$.

تغير قيم $f(m)$ حسب قيم m

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(m)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

▪ **المناقشة :**

▪ إذا كان $f(m)\in]-\infty;0[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

▪ إذا كان $f(m)=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x=\frac{1}{2}$.

▪ إذا كان $f(m)\in]0;1[$ أي $m\in]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

▪ إذا كان $f(m)=1$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

7) أ) **عين العددين الحقيقيين b,a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ :** $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ **دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.**

▪ **تعيين العددين الحقيقيين b,a:**

- F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ يعني $F'(x)=f(x)$

أي $ae^{2x}+(ax+b)\times 2e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax+a+2b)e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}2a=-2\\ a+2b=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$

أي $F(x)=(-x+1)e^{2x}$

ب) أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$, $x=\frac{1}{2}$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$.

▪ **حساب $S(\lambda)$:**

f دالة مستمرة وموجبة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي :

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left[(-x+1)e^{2x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}$$

أي $S(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times us=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times 4cm^2$

ومنه $S(\lambda)=\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)cm^2$

▪ **حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$:**

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)=(2e)cm^2$ لان

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 4\lambda e^{2\lambda}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2\lambda}=0$

II. نسمي $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)},\dots, f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

▪ **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$**

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1) من أجل $n=1$ لدينا :

$$f^{(1)}(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}=f'(x)$$

ومنه $P(1)$ صحيحة .

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$

ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$$

- لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^n\times\left[-2e^{2x}+(1-n-2x)\times 2e^{2x}\right]$

ومنه $f^{(n+1)}(x)=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^n\times 2(-n-2x)e^{2x}$

أي : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحنى $(C_{f^{(n)}})$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.

أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n .

▪ **حساب x_n و y_n بدلالة n:** - $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ **يقبل مماسا يوازي** $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x)=0$ أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ ومنه $-n-2x=0$ وبالتالي $x=-\frac{1}{2}n$ أي $x_n=-\frac{1}{2}n$ من أجل $x=-\frac{1}{2}n$ لدينا : $y_n=f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)}=2^n e^{-n}=\left(2e^{-1}\right)^n$ أي $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$	
ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.	
▪ **تبيان أن (x_n) متتالية حسابية :** - **لدينا :** $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(n+1)-\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n=-\frac{1}{2}$ ومنه (x_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $x_0=0$. - **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\infty$	0.5
ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$	
▪ **تبيان أن المتتالية (y_n) هندسية :** - لدينا : $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ ومنه $y_{n+1}=\left(2e^{-1}\right)^{n+1}=2e^{-1}\times\left(2e^{-1}\right)^n=2e^{-1}\times y_n$ ومنه (y_n) هندسية أساسها $q=2e^{-1}$ وحدها الأول $y_0=1$. - **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2e^{-1}\right)^n=0$ لأن $-1<2e^{-1}<1$	

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي دورة ماي 2017

الشعبة: علوم تجريبية　　　اختبار في مادة: الرياضيــــات المــدة: 3سا و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: 4 نقاط

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n - 2 \end{cases}$ و $v_n = u_{n+1} - u_n$.

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل.

1) الحدود الثلاثة الأولى $(u_0 \,;\, u_1 \,;\, u_2)$ للمتتالية هم:

أ) $(u_0 \,;\, u_1 \,;\, u_2) = (1\,;0\,;-1)$ ، ب) $(u_0 \,;\, u_1 \,;\, u_2) = (1\,;-1\,;-2)$ ، ج) $(u_0 \,;\, u_1 \,;\, u_2) = (1\,;-2\,;4)$.

2) (u_n) هي متتالية:

أ) حسابية　　،　　ب) هندسية　　،　　ج) ليست حسابية و ليست هندسية.

3) المجموع S_n لـ n الحدود الأولى للمتتالية (v_n) تساوي:

أ) $S_n = \dfrac{n^2 - 5n}{2}$　　،　　ب) $S_n = \dfrac{1}{2}\left(n^2 - 3n - 4\right)$　　،　　ج) $S_n = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$.

4) الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n هو:

أ) $u_n = (n-1)^2$　　،　　ب) $u_n = 1 - n$　　،　　ج) $u_n = \dfrac{1}{2}\left(n^2 - 5n + 2\right)$.

التمرين الثاني: 5 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z+1)^2 + \left[2 + i\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2 = 0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A = -1 + 2i$ ، $z_B = i\left(2 - \sqrt{3}\right)$ و $z_C = \overline{\sqrt{5} - 2i}$.

أ ــ احسب $|z_C|$ و $|z_B - z_A|$ ثم أنشئ النقط A ، B و C.

ب ــ بين أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

3) أ ــ عين $z_{C'}$ لاحقة C' نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة A .

ب ــ علما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع بين أن: $z_{B'} = -2 + (2+\sqrt{3})i$.

ج ــ بين أن $\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ ثم أكتبه على شكله الأسي ثم استنتج أن:

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}) \quad \text{و} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{CB'}{CB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

التمرين الثالث: 4 نقاط

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ نعتبر النقط

$A(-1;2;4)$, $B(2;1;-1)$, $C(0;-3;1)$ و الشعاع $\vec{u}(1;2;-1)$.

1) أ- أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة B وشعاع توجيهه $\vec{u}$.

ب- تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ج- أحسب المسافة AB .

2) ليكن (S) سطح كرة مركزها A وتشمل B .

أ- أكتب معادلة ديكارتية للسطح كرة (S).

ب- أثبت أنه لإيجاد نقط تقاطع لـ (Δ) و (S) راجع إلى حل معادلة من درجة الثانية يطلب تعيينها.

ج- إستنتج نقط تقاطع (Δ) و (S).

3) ما طبيعة المثلث ABC ؟.

4) أثبت أن المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{29}$.

التمرين الرابع: 7 نقط

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 1 - \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

$\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

1) أحسب نهايات f عند أطراف مجالي تعريفها ، أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أحسب $f(x) + f(-x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1 \prec \alpha \prec -\dfrac{1}{2}$

4) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس (C_f) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

5) أكتب معادلة المماس (T) ثم أنشئ (C_f) و (T).

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $\ln(x^2) + mx^2 = 0$.

7) احسب بـ (cm^2) ، مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات: $y = 1$ ، $x = e$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4.5نقط)

نذكر أنه إذاكانت A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء و I منتصف القطعة $[AB]$.

فإن من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(-1;0;4)$ ، $B(3;-4;2)$

1) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $MA^2+MB^2=AB^2$.

أ- بين أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب- تحقق أن المعادلة الديكارتية لـ (S) هي: $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$

2) (P) مستوي من الفضاء معادلته: $3x+4y+z-1=0$.

أ- عين معادلة للمستوي (P') الذي يشمل A و $\vec{n}(1;-2;-1)$ شعاع ناظمي له.

ب- بين أن المستويين (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ)،يطلب تعيين تمثيله الوسيطي.

جـ- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

3) أ- عين إحداثيات نقط تقاطع المستقيم (Δ) والمجموعة (S).

ب- عين معادلة المستوي (Q) الذي يمس (S) في النقطة A.

4) حل في $\mathbb{R}^3$ الجملة ذات المجاهيل x، y، z:
$$\begin{cases}2x-4y-2z+10=0\\3x+4y+z-1=0\\2x-2y-z+6=0\end{cases}$$

التمرين الثاني: (5نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها على الترتيب $z_A=i$ ، $z_B=-2+i$ ، $z_C=-3$ ، $z_H=-3+4i$ و $z_I=-1-i$.

1) أ) مثل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) عين النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C .

ج) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2) أ) أكتب على الشكل الجبري $\dfrac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$،ثم إستنتج أن المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان .

ب) بين أن H هي نقطة تلاقي إرتفاعات المثلث ABC .

3) بين أن النقط G ، H و I هي في إستقامية ،ثم إستنتج وجود تحويل نقطي h يحول G إلى I يطلب تعيين عناصره المميزة .

4) (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=z_I+\sqrt{5}e^{i\theta}$.

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (γ) .

ب) بين أن (γ) هي دائرة مركزها I يطلب تعيين نصف قطرها ،ثم أحسب مساحة (γ).

ج) تحقق أن B و C تنتميان إلى الدائرة (γ).ثم إستنتج أن I هي نقطة تلاقي محاور المثلث ABC .

د) أحسب مساحة (γ') صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S .

التمرين الثالث: (4نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$: $u_0=\frac{1}{8}$ و $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$.

1) f دالة عددية معرفة على $[0;2]$: $f(x)=x(2-x)$ ، و (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس(الوحدة $4cm$)

أ- أنشئ (C) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ في نفس المعلم.

بـ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع ترك أثر الإنشاء.

جـ- ماهو تخمينك حول إتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

2) أ- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$.

بـ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ،ثم إستنتج أن (u_n) متقاربة .

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - u_n$

أ- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n .

بـ- خمن عبارة v_n بدلالة n . ثم برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n صحة تخمينك.

جـ- أحسب نهاية (v_n) ثم إستنتج نهاية (u_n).

4) (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$: $w_n = \ln(v_n)$.

أ- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

بـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = w_1 + w_3 + w_5 + w_7 + ... + w_{2n+1}$

جـ- إستنتج بدلالة n الجداء P_n : $P_n = v_1 \times v_3 \times v_5 \times v_7 \times .... \times v_{2n+1}$

التمرين الرابع: (6.5نقط)

I] g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x) = e^x - x$

1) أحسب نهايات الدالة g على طرفي مجال مجموعة التعريف .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) > 0$

II] f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $f(x) = x + \dfrac{x-1}{e^x - 1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$

1) أ) *أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة التعريف .*

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \dfrac{e^x.g(x)}{(e^x - 1)^2}$

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ) بين أن للمنحني (C_f) ثلاثة مستقيمات مقاربة إحداها المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) على المجال $]0 ; +\infty[$.

3) بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث : $0.5 < \alpha < 0.6$.

4) أنشئ المنحني (C_f) .

5) h دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$: $h(x) = \dfrac{(x+1)e^x - 1}{e^x - 1}$. و (C_h) منحناها البياني في نفس المعلم

أ- أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_h) على المجال $]0;+\infty[$.

بـ- أحسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_h) المستقيمين اللذان معادلتيهما $x = 1$ و $x = 2$.

مفتاح الثقة بالنفس هو أن تحدد ماذاتريد .. وأن تتصرف كأنك من المستحيل أن تفشل.

بالتوفيق والسداد

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات المدة 4 سا

الموضوع الأول

التمرين الأول

نعتبرفي $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) التالية: $3x-5y=13$.

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .
2. بين أن $p\gcd(5k+1,3k-2)=p\gcd(k-5,13)$ حيث k عدد صحيح.
3. عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ p\gcd(x,y)=13 \end{cases}$.
4. عين الثنائيات الصحيحة (x,y) حلول المعادلة (1) حيث $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثاني

I. لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة ب $u_0=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=1+\sqrt[3]{u_n-1}$.

1. برهن باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $1\prec u_n\prec 2$.
2. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}-u_n=\sqrt[3]{u_n-1}\left(1-\sqrt[3]{u_n-1}\right)\left(1+\sqrt[3]{u_n-1}\right)$.
3. بين أن (u_n) متزايدة .
4. استنتج أن (u_n) متقاربة .

II. نضع $v_n=\ln(u_n-1)$.

1. تحقق $v_0=-\dfrac{1}{3}$ ثم بين أن (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$.
2. أكتب v_n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ الجملة ذات المجهولين z و z' التالية $\begin{cases} z+\overline{z'}=2+2i\sqrt{3} \\ 2\overline{z}-z'=1-i\sqrt{3} \end{cases}$ ....(1)

1. اوجد في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ حلول الجملة (1) .

نرمز ب z_1 للحل الذي جزءه التخيلي موجب و z_2 للحل الأخر.

2. أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي
3. اكتب العدد $(z_1)^n-(z_2)^n$ على الشكل الجبري ثم استنتج العدد $\left(z_1^{\,5}+z_1^{\,7}+z_1^{\,1962}\right)-\left(z_2^{\,5}+z_2^{\,7}+z_2^{\,1962}\right)$ على الشكل الجبري .

II. ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A,B,C ذات اللواحق على الترتيب $z_A=2, z_B=1+i\sqrt{3}, z_C=1-i\sqrt{3}$.

1. بين ان C, B, A نقط من دائرة مركزها O يطلب تعين نصف قطرها .
2. بين أن الرباعي $(OCAB)$ معين ثم أحسب مساحته .

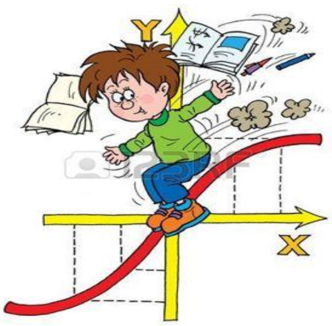
S تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = (1-i)z + 2i$.

1. بين ان A صامدة بالتحويل S .
2. ماهي طبيعة التحويل S وعناصره المميزة .
3. ماهي طبيعة ومساحةالرباعي $(O'C'AB')$ حيث $S(O) = O', S(C) = C', S(B) = B'$.

<u>التمرين الرابع</u>

لتكن g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب $g(x) = -(\ln x)^2 - 2\ln x + 1$.

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.
2. بين أنه من أجل كل x موجب تماما $g'(x) = \dfrac{-2\ln x - 2}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة .
3. تحقق أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين β, α على $]0, +\infty[$ حيث $1.5 \prec \alpha \prec 2$ و $0 \prec \beta \prec e^{-1}$.
4. استنتج إشارة $g(x)$.



لتكن f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ ب $\begin{cases} f(x) = x\left(1 - (\ln x)^2\right) & x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس .

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
2. بين أن f مستمرة عند 0.
3. هل f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين ماذا تستنتج .
4. بين أنه من أجل كل x موجب تماما $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
5. أدرس الوضع النسبي ل (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
6. أنشىء (C_f) و (Δ) (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,30$ و $f(\beta) \approx -0,45$).
7. أحسب مشتقة الدالة h المعرفة على $]0, +\infty[$ ب $h(x) = -\dfrac{x^2}{2}(\ln x)^2 + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.
8. استنتج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد ب (C_f) (Δ) والمستقيمات ذات المعادلات $x = 1$ $x = \lambda$ حيث $0 \prec \lambda \le 1$.
9. أحسب $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda)$.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات(الموضوع الثاني) المدة 4سا

التمرين الأول

I.

1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 8 .
2. استنتج أن العدد $3^{2n+2}+7$ يقبل القسمة على 8.
3. عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^{n} على 8.

II. ليكن p عدد طبيعي و A_p العدد المعرف ب $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}+3^{4p}$.

1. عين باقي قسمة A_p على 8 من أجل p فردي و p زوجي .
2. استنتج ياقي قسمة العدد ين A_{2017} و A_{2016} .
3. عين باقي قسمة العدد a على 8 علما أن a يكتب $\overline{1110}_3$ في نظام ذي الأساس 3 .

التمرين الثاني

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس .

نعتبر المستوي (P_1) ذو المعادلة $3x+4y-2z+5=0$ و النقط $C(1,-1,0),B(0,0,1),A(1,0,2)$.

(S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $x^2+y^2+z^2-10x+6y-2z+19=0$.

1. بين أن النقط C,B,A تعين مستوي نرمز له ب (Q) .
2. تحقق أن $\vec{n}(1,2,-1)$ ناظمي ل (Q) وأكتب معادلة له .
3. أثبت أن (S) سطح كرة يطلب تعين مركزها ونصف قطرها .
4. تحقق أن (S) تشمل النقطة $D(5,-7,1)$.
5. أكتب معادلة المستوي (P) العمودي على (S) في D .
6. بين أن (Q) و (P_1) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعين تمثيلا وسيطيا له .
7. أوجد في $\mathbb{R}^3$ حلول الجملة $\begin{cases}3x+4y-2z+5=0\\ x+2y-z+1=0\\ y+7=0\end{cases}$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين الثالث

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث $P(z)=z^3-2z^2-(2+2i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}$.

1. تحقق أن $P(z)=(z-2)\left(z^2-(2+2i\sqrt{3})\right)$.
2. استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z)=0$.

في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط C,B,A ذات اللواحق $z_C=2, z_B=\sqrt{3}-i, z_A=\sqrt{3}+i$.

1. . مثل النقط C,B,A .
2. عين لاحقة النقطة D نظيرة C بالنسبة ل (AB) ثم استنتج طبيعة الرباعي $(ADBC)$.
3. أكتب على الشكل الأسي العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$.
4. هل يمكن ايجاد عدد طبيعي n حيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف .
5. حدد طبيعة التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=2z-(1-i)$

لتكن G نقطة من المستوي لاحقتها $z_G=1-i$ و (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

6. بين أن المجموعة (Γ) صامدة اجماليا بالتحويل T .

التمرين الرابع

I. لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب $g(x)=4(1-x)e^{2x}-1$.

1. أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}$ حيث $0.8\prec\alpha\prec1$ و $-1.5\prec\beta\prec-1$.

II. لتكن فيما يلي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-1}{2e^{2x}-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\left(e^{2x}-x\right)^2}$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
3. فسر النتيجتين هندسيا .
4. شكل جدول تغيرات الدالة f
5. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا ل $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
6. أنشىء (C_f) موضحا وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ), ذو المعادلة $y=1$ (نقبل أن $e^{2x}-x\succ0$ من أجل كل عدد حقيقي x)
7. أحسب ب cm^2 $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد ب (C_f), (Δ) ذو المعادلة $y=1$ و المستقيمات ذات المعادلات $x=\lambda, x=1$. $\lambda\succ1$.
8. أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

لتكن M و M' نقطتين من المستوي حيث M مرجح النقطتين M' , O مرفقتين بنفس المعامل α .

9. تحقق أن M' هي صورة M بتحاكي يطلب تعين مركزه ونسبته .
10. عين مجموعة النقط M' لما M تمسح (C_f).

بالتوفيق أساتذة المادة

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات المدة 4سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي $\begin{cases} u_0=-1 \quad u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$.

نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n ب $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ $w_n=\frac{u_n}{v_n}$.

1. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .
2. تحقق أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 2 .
3. استنتج عبارة u_n بدلالة n .
4. برهن باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$.
5. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
6. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 5 ثم عين باقي قسمة العدد $2016u_5$ على 5 .

ليكن العدد A حيث $A=2^{2n}u_n+2^{n+2}$.

7. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $A\equiv 0[5]$.

التمرين الثاني

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن النقطة $A(-3,1,1)$ و (E) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $(x+3y-z+1)^2-(y+z-2)^2=0$.

1. تحقق أن (E) هي اتحاد مستويين (P) و (Q) يطلب تعينهما .
2. بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب إعطاء تمثيله الوسيطي .

ليكن (Δ) المستقيم المعرف كما يلي $\begin{cases} x=0 \\ y=2t-1 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}$.

3. تحقق أن (Δ) لا ينتمي الى (E) ثم بين أن (D) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .
4. تحقق أن $A\in(D)$ و أن $O\in(\Delta)$.

5. أكتب معادلة المستوي الذي يشمل A والعمودي على (D) .

6. أكتب معادلة المستوي الذي يشمل O والعمودي على (Δ) .

7. أوجد معادلة سطح الكرة التي تمس (D) في A وتمس (Δ) في O .

التمرين الثالث

ليكن a عدد مركب طويلته 1 وعمدته θ حيث $0 \prec \theta \prec \pi$.

نضع $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}, z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$.

1. بين أن $a-1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$.

2. استنتج الشكل الأسي للعددين المركبين z_1 و z_2 .

في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط B',C,B,A ذات اللواحق على الترتيب $z_{B'}=1, z_c = i, z_B = -i, z_A = a$ حيث $\mathrm{Re}(a) \prec 0$.

J منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف القطعة $[AB]$.

R_1 الدوران الذي مركزه J وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه K وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

نضع $C' = R_1(C)$ و $A' = R_2(A)$.

1. تحقق أن $z_{A'} = z_1$ و $z_{C'} = z_2$.

2. أحسب $\dfrac{z_{A'} - z_{C'}}{z_A - z_{B'}}$ ثم استنتج أن (AB') ارتفاع في المثلث $(A'B'C')$.

ليكن S تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z' = -2aZ + 2a^2 - a$.

3. عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة .

نضع $S(A') = K, S(B') = D$ و $S(C') = E$.

4. بين أن المثلثين (EDK) و $(A'B'C')$ متشابهين .

التمرين الرابع

I. لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب $g(x) = 4(1-x)e^{2x} - 1$.

1. أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}$ حيث $0.8 \prec \alpha \prec 1$ و $-1.5 \prec \beta \prec -1$.

II. لتكن فيما يلي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-1}{2e^{2x}-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2(e^{2x}-x)^2}$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. فسر النتيجتين هندسيا .
4. شكل جدول تغيرات الدالة f
5. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا ل $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
6. أنشىء (C_f) موضحا وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ), ذو المعادلة $y=1$ (نقبل أن $e^{2x}-x\succ 0$ من أجل كل عدد حقيقي x)
7. أحسب ب cm^2 $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد ب (C_f) , (Δ) ذو المعادلة $y=1$ و المستقيمات ذات المعادلات $x=\lambda, x=1$ $\lambda\succ 1$.
8. أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

لتكن M و M' نقطتين من المستوي حيث M مرجح النقطتين M' , O مرفقتين بنفس المعامل α .

9. تحقق أن M' هي صورة M بتحاكي يطلب تعين مركزه ونسبته .
10. عين مجموعة النقط M' لما M تمسح (C_f) .

بالتوفيق أستاذة المادة

ثانوية حيرش محمد وهران 2016-2017 قسم 3رياضيات

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات المدة 4سا

(الموضوع الثاني)

التمرين الأول

I.

1. أكتب على ورقة الإجابة مبرهنة بيزو .

لتكن c,b,a أعداد صحيحة .

2. برهن أنه اذا كان $p\gcd(a,b)=1$ و $p\gcd(a,c)=1$ فان $p\gcd(a,bc)=1$.

II. ليكن فيما يلي b,a عددين طبيعيين غير معدومين وأوليين فيما بينهما .نضع $S=a+b$ و $P=ab$.

1. برهن أن $p\gcd(a,S)=1$ و $p\gcd(b,S)=1$ ثم استنتج أن $p\gcd(P,S)=1$.
2. تحقق أن S و P شفعية مختلفة (أحدهما فردي و الأخر زوجي)
3. حلل 84الى جداء عوامل أولية ثم أذكر كل قواسم 84.
4. عين العددين الطبيعيين الأوليين فيما بينهما a و b حيث $SP=84$.ثم استنتج الأعداد الطبيعية β,α حيث $\begin{cases} p\gcd(\alpha,\beta)=d \\ \alpha+\beta=84 \\ \alpha\beta=d^3 \end{cases}$.

التمرين الثاني

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0,1,-1)$, $B(1,-1,0)$, $C(0,0,-2)$ والمستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+4 \\ z=-t \end{cases}$

اثبت أن المعادلة $2x-y+z+2=0$ هي معادلة للمستوي (P) الذي يشمل A ويحوي (D) .

1. اكتب معادلة المستوي (Q) الذي يشمل A ويعامد (BC).
2. تحقق أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم يطلب تعين تمثيلا وسيطيا له .
3. اثبت أنه يوجد سطح كرة (S) مركزها $I(1,0,0)$ تمس (P) و (Q) .
4. أكتب معادلة ديكارتية ل (S).

نعتبر فيما يلي (S_m) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $x^2+y^2+z^2-2mx-4my+5m^2-6=0$ $(m\in\mathbb{R})$.

1. اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي m تكون (S_m) سطح كرة يطلب تعين مركزها I_m ونصف قطرها .
2. ماهي مجموعة المراكز I_m لما m يمسح $\mathbb{R}$.
3. ناقش حسب قيم الوسيط m تقاطع (S_m) و (Q).
4. من أجل أي قيمة ل m (Q) يقطع (S_m) في أكبردائرة ممكنة .

التمرين الثالث

ليكن $(ABCD)$ مربع طول ضلعه 1ومركزه O حيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

1. برهن أنه يوجد تشابه مباشر S حيث $S(C)=D$ و $S(B)=O$ يطلب تعين مركزه .

نعتبر في مايلي المعلم المتعامد والمتجانس $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

2. تحقق أن S يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)Z$.

ليكن S' التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=(1+i)Z$.

3. حدد طبيعة التحويليين S' و T حيث $T=S\circ S'$.

نضع $T(B)=E$ و $T(C)=F$.

4. أكتب Z_F, Z_E و $\frac{Z_F-Z_E}{Z_A-Z_E}$ على الشكل الأسي .

5. استنتج طبيعة المثلث (AEF) بطريقتين مختلفتين .

6. من أجل أي قيمة ل n يكون التحويل T^n $\left(T^n=\overbrace{T\circ T\circ T......\circ T}^{n\ \text{مرة}}\right)$ انسحابا استنتج طبيعة T^{2016}.

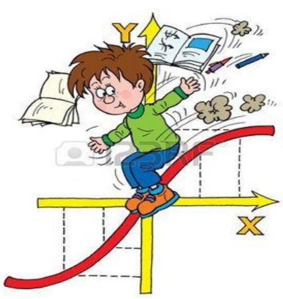
<u>التمرين الرابع</u>

I. نعتبر الدوال f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ ب $f_n(x)=n\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$ حيث n عدد طبيعي يحقق $n\geq 4$.

(C_n) تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس .

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا .
2. أدرس تغيرات الدوال f_n وشكل جدول تغيراتها .
3. أدرس اشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ ثم استنتج وضعية (C_{n+1}) و (C_n) .
4. بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين u_n و v_n حيث $1\leq u_n\leq\sqrt{e}\leq v_n$.
5. أكتب معادلة المماس ل(C_4) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ثم أنشىء (C_4)

II.



1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب t لدينا $1-t\leq\frac{1}{t+1}\leq 1$.
2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب a لدينا $a-\frac{a^2}{2}\leq\ln(a+1)\leq a$ ....(1)
3. باستعمال المتباينة (1) أثبت أن $\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leq\ln(u_n)\leq u_n-1$.
4. استنتج أن $\frac{{u_n}^2}{2n}\leq u_n-1\leq\frac{{u_n}^2}{n(3-u_n)}$.
5. تحقق أن $\frac{1}{2n}\leq u_n-1\leq\frac{e}{n}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية ميلود المهاجي" الضاية " وهران

إمتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي

دورة : ماي 2017

الشعبة : تقني رياضي

إختبار في مادة : الرياضيات

المدة : 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

1. لتكن في $Z \times Z$ المعادلة

$3x - 8y = 5$ ....(E)

أ – بين أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x ; y)$ حيث $x = 8k - 1$ و $y = 3k - 1$ ، $k \in Z$

2. لتكن $x ; n$ و y ثلاثة أعداد صحيحة حيث $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$

أ – بين أن $(x ; y)$ حل للمعادلة (E)

ب – نعتبر الجملة $n \in Z$ ، (S) : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ بين أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23[24]$

3. أ – ليكن m عدد طبيعي ، عين باقي قسمة 2^{2m} على 3 و باقي قسمة 7^{2m} على 8

ب - تحقق أن 1991 حل للجملة (S) و بين أن $1991^{1434} - 1$ يقبل القسمة على 24

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; I ; J ; K)$ نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية

$$(1 - 2m)x + my - (2 + m)z + 3 = 0$$

1. أ – بين أن كل المستويات (P_m) تحوي مستقيم ثابت (Δ) يطلب إعطاء تمثيلا وسيطيا له

ب – تحقق أن $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$ $t \in R$ تمثيلا وسيطيا ل (Δ)

2. أ – عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار بالنقطة $A(1 ; -2 ; 3)$ و العمودي على المستوي (P_1)

ب – عين إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستوي (P_1) و المستقيم (D)

3. برهن أن المستقيمين (Δ) و (D) ليسا من نفس المستوي

4. أ – عين معادلة لسطح الكرة (S) التي تشمل النقطة A و مركزها النقطة B

ب – حدد تقاطع (S) و (P_1)

التمرين الثالث : (05 نقاط)

I. نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 + 4\sqrt{3}z^2 + 24z + 24\sqrt{3}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z + 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)$

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$

3. إستنتج في C حلول المعادلة : $P(z) = 0$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; I ; J)$ نعتبر النقط $A ; B ; C$ التي لواحقها على الترتيب $Z_A = -2\sqrt{3}$; $Z_B = -\sqrt{3} + 3i$; $Z_C = -\sqrt{3} - 3i$

1. أكتب كلا من $Z_A ; Z_B ; Z_C$ على الشكل الأسي

2. ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{3}$

أ – عين العبارة المركبة للدوران R

ب – بين أن صورة A بالدوران R هي B

ج – عين على الشكل الجبري لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R

3. لتكن (φ) الدائرة التي قطرها [CD]

أ – تحقق أن O هي مركز الدائرة (φ)

35 copies

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية ميلود المهاجي" الضاية " وهران

إمتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — دورة : ماي 2017

الشعبة : تقني رياضي

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى (φ) و آستنتج طبيعة كل من المثلثين CAD و CBD

التمرين الرابع : (06 نقاط)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I;J)$

الجزء الأول : (P) هو التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ النقط

$B(e;\frac{e^2}{2})$; $A(\sqrt{e};\frac{e+1}{2})$; $E(1;\frac{3}{2})$ تنتمي إلى (P) و المماس عند النقطة E يوازي محور الفواصل

1. عين $f(\sqrt{e})$; $f(e)$ و $f'(1)$
2. عين الأعداد الحقيقية c ; b ; a علما أن الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $f(x)=ax^2+b+c\ln x$

الجزء الثاني : نقبل أن الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^2}{2}+1-\ln x$

1. عين نهاية الدالة f عند 0 , أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
2. أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
3. إستنتج إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم أرسم (P)

الجزء الثالث : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}$

(C) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق الوحدة 1 cm

1. أحسب نهايتي الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها
2. بين أن $g'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g
3. بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تحديدهما
4. نقبل وجود عدد حقيقي α من المجال $[\frac{1}{2};1]$ بحيث $g(\alpha)=0$

أ – أنشئ المنحنى (C)

ب – بين أن $\ln\alpha=\frac{-\alpha^2}{2}$ ثم آستنتج أن $g'(\alpha)=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$

الجزء الرابع : أ – عين مشتقة الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=(\ln x)^2$

ب – إستنتج حساب $\int_{\alpha}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$

ج – أحسب ب cm^2 و بدلالة α , المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=\alpha$ و $x=e$

و – عين حصرا للعدد A

إنتهى الموضوع الأول

35 copies

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (03 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد α_n حيث : $\alpha_n = 2^{n+1} + 1$

1. تحقق أن $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1$ ثم آستنتج أن α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما
2. نعتبر العدد β_n حيث $\beta_n - 2\alpha_n = 3$
   أ – ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n و β_n
   ب – أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي قسمة 2^n على 3
3. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $\beta_n \equiv 0[3]$, ثم آستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل α_n و β_n أوليان فيما بينهما

التمرين الثاني : (03 نقاط)

يحتوي كيس على 32 بطاقة متماثلة 8 منها تحمل الرقم 1 و 10 تحمل الرقم 2 و 14 تحمل الرقم 3

نسحب 4 بطاقات بصفة عشوائية و في آن واحد

1. ما هو عدد الأمكانيات لسحب 4 بطاقات من الكيس ؟
2. ما هو إحتمال سحب 4 بطاقات تحمل الرقم 1 ؟
3. ما هو إحتمال سحب 4 بطاقات تحمل الرقم 3 ؟
4. ما هو إحتمال سحب 4 بطاقات تحمل ثلاثة منها الرقم 3 ؟

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة على N مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي : $U_n = 3n - 2 + 3^n$

1. *أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n)*
2. نضع $U_n = V_n + W_n$ حيث $V_n = 3n - 2$ و $W_n = 3^n$
   أ – بين أن المتتالية (V_n) حسابية و المتتالية (W_n) هندسية
   ب – أحسب المجموع $S = U_0 + U_1 + \dots\dots + U_n$ بدلالة n
3. نعتبر العددين الطبيعيين α و β حيث $\alpha = n.U_1 - 2U_0$ و $\beta = n.U_2 + U_1$
   أ – بين أن كل قاسم d للعددين α و β يقسم 10
   ب – نضع $d = 2$ بين أن $\alpha = 8k + 2$ حيث k عدد طبيعي
   ج – أوجد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $4\beta \equiv 0[\alpha]$
4. *نعتبر العدد الطبيعي λ يكتب $\overline{bbac}$ في نظام أساسه 7 و $\overline{abca}$ في نظام أساسه 11*
   أ – بين أن المعادلة $265x + 2y = 271$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة N^2
   ب – بين أن $5(265a + 2c) = 271b$ ثم أوجد قيمة العدد λ ثم أكتبه في النظام العشري

التمرين الرابع : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; I; J; K)$ نعتبر النقط

$C(3; -8; 2); B(5; -4; 3); A(7; -4; 2)$

1. *أ – بين أن النقط $A; B; C$ ليست في إستقامية*
   ب – بين أن الشعاع $\vec{n}(-1; 1; -2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ج – إستنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2. لتكن $\Omega(1;-2;3)$ نقطة من الفضاء

أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها Ω و تمس المستوي (ABC) في نقطة H

3. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل Ω و عمودي على المستوي (ABC)

إستنتج إحداثيات النقطة H

4. أ – عين إحداثيات النقطتين E و D نقطتي تقاطع سطح الكرة (S) مع محور الرواقم

ب – عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه ΩHED

التمرين الخامس : (06 نقاط)

نعتبر الدالة f_n المعرفة على R بالعبارة : $f_n(x)=\dfrac{e^X}{(1+e^X).e^{nX}}$

(C_n) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I;J)$

الجزء الأول :

1. عين نهاية الدالة f_0 عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ محددا المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_0)
2. بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_0)
3. أدرس تغيرات الدالة f_0
4. حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_0) في النقطة A
5. أدرس وضعية (C_0) بالنسبة إلى (T) . أنشئ (C_0) و (T)
6. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , النقطتان $M(x;f_0(x))$ و $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم $(D): y=\frac{1}{2}$. أنشئ (C_1)

الجزء الثاني : نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على N كما يلي : $V_n=\int_0^1 f_n(X)dX$

1. بين أن : $V_0=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
2. بين أن المتتالية (V_n) موجبة
3. نضع : $K(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$

أ – بين أن : $K(x)=\dfrac{1-e^X}{(1+e^X).e^{nX}}$ من أجل كل عدد حقيقي x

ب – أدرس إشارة $K(x)$ لكل x من المجال $[0;1]$, إستنتج أن المتتالية (V_n) متناقصة

إنتهى الموضوع الثاني

ثانوية محمد بن عثمان الكبير
السنة الدراسية : 2017/2016

المستوى : 3
المدة : 4 سا

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

التمرين الأول (05 نقاط)

(c) منحنى الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وحدته $2\,cm$.

1. أنشئ جدول تغيرات f.
2. حل المعادلة $f(x)=0$ ثم أحسب $f(1)$ و أرسم (c).
3. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.
4. أ)- عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون الدالة g أصلية لـ f على $\mathbb{R}$ حيث $g(x)=(ax+b)e^{2x}$.

ب)- أحسب ب cm^2 . $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد ب (c) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=\alpha$ حيث $\alpha<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} S(\alpha)$.

5. أ)- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ حيث: $f^{(n)}$ مشتقة f من الرتبة n.

ب)-بين أن $(c_{f^{(n)}})$ منحنى الدالة يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في $M(X_n,Y_n)$

ج)- بين أن (X_n) متتالية حسابية يطلب عناصرها .و (Y_n) متتالية هندسية يطلب عناصرها.

التمرين الثاني (05 نقاط)

(c) منحنى الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e\ln(x)-x$

1. أنشئ جدول تغيرات f.
2. أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (c) عند النقطة ذات الفاصلة e ثم استنتج اشارة $f(x)$.
3. أوجد العدد الحقيقي a بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ واستنتج اشارة $f(x)-ax$ و فسر ذلك هندسيا.
4. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+$ بـ

$$g(x)=\begin{cases} e[x\ln(x)-x]-\dfrac{x^2}{2} & : x>0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

أ)- أدرس استمرارية و قابلية اشتقاق g على يمين العدد 0 .

ب)- أنشئ جدول تغيرات g.

ج)- أحسب ب cm^2 . S مساحة الحيز المحدد ب (c) و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=1$ و $x=e$.

5. (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} U_0=e^2 \\ U_{n+1}=f(U_n)+n \end{cases}$

أ)- بين أن (U_n) محدودة من الأعلى الأسفل بالعدد e.

ب)- أدرس اتجاه تغير (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$.

التمرين الثالث (03 نقاط):

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x,y) : $5x-4y=2$

2. عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة و تحقق $|x|+|y|\prec 15$.

3. بين أنه توجد ثنائية وحيدة (x,y) حل المعادلة و تحقق : $\begin{cases} PGCD(x,y)=2 \\ PPCM(x,y)=60 \end{cases}$

4. a عدد طبيعي يكتب على شكل $\overline{43}^{\beta}$ و $\overline{51}^{\alpha}$ وتحقق $30\prec a\prec 120$

5. عين مجموعة قيم aثم حدد طبيعة هذه الاعداد .

التمرين الرابع ☺ (03,5 نقاط):

1. عين العددين المركبين Z_1 و Z_2 بحيث $\begin{cases} Z_1+Z_2=-1 \\ Z_1.Z_2=1 \end{cases}$ حيث Z_1 الذي جزؤه التخيلي سالب.

2. المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط A وB و M ذات اللواحق $Z_A=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $Z_B=\overline{Z_A}$ و Z .

أ)-أحسب Z_A على الشكل الاسي ثم استنتج الشكل الاسي Z_B .

ب)- عين قيم n الطبيعية حتى يكون Z_A^n حقيقي سالب .

ج)-عين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $Arg(Z-Z_A)^2=Arg(Z_A)-Arg(Z_B)$

3. S تحويل نقطي يحول $M(Z)$ الى $M'(Z')$ بحيث $Z'-i=2e^{\frac{\pi}{3}i}(Z-i)$

أ)-حدد طبيعة و عناصر S.

ب)- T تحويل نقطي معرف : $T=\underbrace{SoSoSo...oS}_{nfois}$

عين طبيعة و عناصر T .

ج)-عين العدد الطبيعي n حتى تكون M و M' و W على استقامية حيث W مركز S

4. لتكن النقط C و D و E بحيث $S(O)=C$ و $S(C)=D$ و $S(D)=E$

أ)-بين أن O و W و E على استقامية .

ب)-عين (E') مجموعة النقط M بحيث $Z=2e^{\theta i}+i$

ثم أوجد صورة (E) بالتحويل S.

التمرين الخامس ☺ (03,5 نقاط):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(0,1,-1)$ و $B(-2,2,-1)$

والمستقيم (Δ) المعرف ب $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

1. أكتب تمثيلا وسيطيا لـ (AB) ثم بين أن (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

2. α عدد حقيقي $W(-2+\alpha,1+\alpha,-1-\alpha)$ نقطة كيفية من (Δ).

أ)- بين أن معادلة المستوي (P) العمودي على (Δ) والذي يشمل W هي $x+y-z-3\alpha=0$

ب)- بين أن المستقيم (AB) و (P) يتقاطعان في النقطة H يطلب تعيينها .

3. أ)- بين أن المستقيم (WH) عمودي على (Δ).

ب)- هل توجد قيمة لـ α حتى يكون (WH) عمودي على (AB).

4. أ)- أكتب WH^2 بدلالة α ثم عين α . حتى تأخذ المسافة WH أصغر ما يمكن .ثم استنتج المسافة بين (AB) و (Δ).

ب)- نضع $\alpha=\frac{3}{7}$ عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overline{MH}.\overline{WH}=\frac{2}{7}$

بالتوفيق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية وهران
امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: علوم تجريبية
اختبار في مادة: الرياضيات

ثانوية محمد بن عثمان الكبير
ماي 2017
المستوى: الثالث ثانوي
المدة: 3 ساعة

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(3;1;0)$ ، $B(2;0;-3)$ ، $C(0;4;1)$ ، $D(1;1;1)$ والمستوي (P) ذو المعادلة $-x+y-z+3=0$

1. أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[BC]$
2. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (OAD) ثم استنتج معادلته الديكارتية.
3. أدرس الوضع النسبي للمستويات (P) و (Q) و (OAD)
4. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) والمستقيم (Δ) الذي يشمل B وشعاع توجيهه $\overrightarrow{OC}$
5. أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (AD) و (Δ)
6. G نقطة من الفضاء تحقق : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

أ- بين أن G مرجح النقط A ، B ، C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها

ب- عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}\right\|=12\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط A ، B ، C و D ذات اللواحق:

$z_A=1+i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=4i$ و $z_D=\frac{1}{6}z_C$

أ) علم النقاط A ، B ، C و D في المعلم المذكور.

ب) نعتبر (C) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z التي تحقق العلاقة:

$$(3z-2i)(3\bar{z}+2i)+(3z-12i)(3\bar{z}+12i)=100$$

أحسب الطول CD ثم عبر عن هذه العلاقة بدلالة الأطوال: CM ، DM و CD . واستنتج طبيعة (C).

ج) تحقق أن المجموعة (C) تشمل النقاط A ، B ، C و D ثم أرسمها في نفس المعلم.

2) الهدف هو إنشاء صورة الرباعي $ACBD$ بالتحويل النقطي المباشر S الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)z$. اشرح كيف يمكن تركيب التحويل S انطلاقا من تحويلين نقطيين بسيطين ثم أنشئ صورة الرباعي $ACBD$ بالتحويل S دون حساب الصور.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

ولتكن المتتالية العددية (v_n) حيث $v_n = u_n + n - 1$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

1 بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

2 أ) اكتب v_n بدلالة n

ب) استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$

3- نضع $t_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

-احسب كل من المجموعين t_n و s_n .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. $\|\vec{i}\| = 1cm$

1 – نضع : $h(x) = x^3 - 1 + \ln|x|$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$

أحسب $h'(x)$ ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة h .

أحسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة المقدار $h(x)$.

2 – أدرس تغيرات الدالة f.

3 – بين أن المنحنى ذو المعادلة $(\Gamma): y = x^2 + 1$ هو مقارب للمنحنى (C)

4 – بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

5 – أرسم المنحنيين (C) و (Γ) في نفس المعلم .

6 – ناقش بيانيا و تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^3 + (1-m)x - 2\ln|x| = 0$

II نسمي A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المنصف الأول و المستقيمين $x = 3$ و $x = 1$.

1 – حدد دالة أصلية للدالة f في المجال $]0, +\infty[$.

2 – أحسب المساحة A (أعط النتيجة مقربة إلى 10^{-2}).

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5نقط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $C\left(-1;-2;2\right), B\left(1;0;1\right), A\left(-2;6;-2\right)$

1) أ- بين أن الجملة $\begin{cases} x = 4\alpha + 5 \\ y = 4\alpha + 4 \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2\alpha - 1 \end{cases}$ هي التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC).

ب- إستنتج أن النقط C, B, A تعين مستو يطلب المعادلة الديكارتية له.

2) (P) المستوي الذي يشمل المستقيم (BC) ويعامد المستوي (ABC)

أ- أثبت أن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي : $5x - 4y + 2z - 7 = 0$

ب- بين المسافة بين النقطة A والمستقيم (BC) هي : $d\left(A;(CB)\right) = 3\sqrt{5}$

3) نعتبر (Δ) المستقيم الممثل ب $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \quad\quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ ولتكن النقط F, N, M حيث $F\left(1;1;2\right), N \in (\Delta), M \in (CB)$

أ- أوجد إحداثيات النقطة $G_{\alpha,t}$ مرجح الجملة $\left\{(F,1);(N,1);(M,-1)\right\}$ بدلا لة α, t

ب- إستنتج أن مجموعة النقط $G_{\alpha,t}$ لما يتغير α, t في $\mathbb{R}$ هي مستو يطلب المعادلة له .

التمرين الثاني (4نقط)

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ ب : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{1 - u_n^{\,3}}{7}} \end{cases}$ و $v_n = 8u_n^{\,3} - 1$

1- أحسب كلا من الحدين u_1 و v_0 .

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0 \prec u_n \prec 1$. ثم إستنتج أن $-1 \prec v_n \prec 7$

3- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب أساسها.

4- أكتب u_n بدلالة n ثم أوجد $\lim u_n$

5- أحسب المجموع : $s_n = u_0^{\,3} + u_1^{\,3} + \ldots + u_n^{\,3}$

التمرين الثالث (5نقط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر النقطة M ذات اللاحقة Z.

وليكن العدد المركب i ذي الطويلة 1 والعمدة $\dfrac{\pi}{2}$

1- عين العددين الحقيقيين b, a بحيث : $z^3 - 64 = 0$ تكافئ $(z-4)\left(z^2 + az + b\right) = 0$

2- حل في $\mathbb{C}$ عندئذ المعادلة $z^3 - 64 = 0$

3- لتكن النقط D, C, B, A ذات اللواحق $z_A = -2+2i\sqrt{3}$ ، $z_B = -2-2i\sqrt{3}$ ، $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_D = 3\sqrt{3}+3i$ على الترتيب

أ- أكتب العدد z_C على شكله الجبري ثم الأعداد z_A و z_B على شكلها المثلثي .

ب- إستنتج أن النقط C, B, A تنتمي إلى دائرة يطلب مركزها ونصف قطرها.

4- نذكر أن الدوران الذي مركزه ω وزاويته θ يحول M إلى M' ذات اللاحقتين z و z' على الترتيب

بحيث $\omega M = \omega M'$ و $\left(\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta + 2k\pi$

أ- بين أن $z' - z_\omega = e^{i\theta}\left(z - z_\omega\right)$

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسي ثم إستنتج أن النقطة A هي صورة B بدوران يطلب عناصره المميزة .

ت- حدد مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق : $\left|z-2\sqrt{3}-2i\right| = \left|i\bar{z}+2\sqrt{3}+2i\right|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z.

التمرين الرابع (6نقط) I) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$

1- أحسب $\lim\limits_{|x| \to +\infty} h(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

2-بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $e^{-2x}h'(x) = \frac{-1}{(1+e^x)^2}$ ، ثم إستنتج إتجاه تغيرات الدالة h واذكر إشارتها

3- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[h(x)-(1-x)\right]$ ماذا تستنتج ؟

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

1- قارن بين $f'(x)$ و $e^{-x}.h(x)$

2 - أدرس إتجاه تغيرات الدالة f موضحا الحسابات المتعلقة بالنهايات .

3- انشئ المنحنى (C_f) الخاص بالدالة f في نفس المعلم السابق.

4- بين أن $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ثم إستنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة $k(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

5- بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب مساحة الحيز المحدود بمنحنى الدالة f ومحور الفواصل والمستقيمات $x=0$ و $x=-\ln 3$

-إنتهى-

بالتوفيق للجميع

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4,5 نقطة)

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ ، $C(0;5;1)$ و I منتصف $[AC]$

1. برهن أن من أجل كل نقطة M من الفضاء : $AM^2+CM^2=2IM^2+2AI^2$
2. استنتج المجموعة (E) للنقط M من الفضاء حيث : $AM^2+CM^2=41$
3. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .
4. أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) المحوري للقطعة $[AC]$.
5. تحقق أن النقطة $D(4;6;0)$ لا تنتمي الى المستوي (ABC) .
6. أحسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.
7. برر الطبيعة و العناصر المميزة لتقاطع المجموعة (E) و المستوي (ABC) .

التمرين الثاني : (4,5 نقاط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

1. بين أن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
2. احسب $\lim_{x\to 0}f(x)$ ثم $\lim_{x\to +\infty}f(x)$

II. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots\dots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$

1. بين أن $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots\dots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$
2. استنتج ان : $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$
3. باستعمال الجزء I ، استنتج ان (u_n) متقاربة نحو $e-1$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

❖ نعتبر المعادلة ذات المجهول z التالية : (E_θ) ...... $z^2-(2\sin\theta)\,z+2\,(\sin\theta)^2=0$ مع $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ)
2. اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل الاسي حيث z_1 الحل الذي جزءه التخيلي موجب و z_2 الحل الاخر .
3. بين ان العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2017}$ تخيلي صرف .

❖ في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (الوحدة $2cm$)

نعتبر العدد المركب $z_A=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ لاحقة النقطة A و $z_B=\overline{z_A}$ لاحقة النقطة B .

1. عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
2. لتكن النقطة D نظيرة النقطةA بالنسبة الى O ، برر طبيعة الرباعي $ABDC$.

❖ ليكن التحويل النقطي S المعرف بعبارته المركبة : $z'=\ z_B\,z+2i$

1. عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .
2. عين (φ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'|=2$.
3. احسب مساحة صورة الرباعي $ABDC$ بالتحويل S .

التمرين الرابع : (6 نقاط)

❖ لتكن الدالة g معرفة على$]0;+\infty[$بـ : $g(x)=-1+x+2\ln x$

1. أدرس إتجاه تغير الدالة g
2. أحسب $g(1)$ ثم عين إشارة $g(x)$ على$]0;+\infty[$

❖ نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases}f(x)=x-x^2\ln x\ ;x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

نرمز بـ (C) إلى منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

1. أحسب $f'(x)$ و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$
2. بين أن الدالة f متناقصة تماما $[1;+\infty[$ على و متزايدة تماما على $[0;1]$
3. شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α حيث $\frac{7}{4}<\alpha<2$
5. تحقق أن المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة o معادلته $y=x$
6. أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)
7. أرسم (Δ)و(C)
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي mعدد و إشارة حلول المعادلة $m+1-x+x^2lnx=0$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (5 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط المعرفة بـ :

$A(1;3;3)$ ، $B(3;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-1;-1)$

1. برهن أن النقط A ، B و C تعين مستويا يطلب تعيين معادلة ديكارتية له
2. نعتبر (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\begin{cases} x-2y+2z-1=0 \\ x-3y+2z+1=0 \end{cases}$
3. بين ان (Δ) هي مستقيم يشمل النقطة C و شعاع توجيهه $\vec{u}\,(2;0;-1)$
4. استنتج تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) بدلالة الوسيط الحقيقي t .
5. لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) و f دالة للمتغير الحقيقي t معرفة بـ : $f(t)=AM$
6. أدرس تغيرات الدالة f مستنتجا المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

التمرين الثاني : (4,5 نقطة)

❖ لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-x\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g
2. حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة $x(1-\ln x)\leq 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

❖ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$.

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 و u_7 . خمن اتجاه تغير (u_n) و سلوكها التقاربي
2. لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بـ : $v_n=\ln u_n$
3. بين ان $v_n=g(n)$ مستنتجا اتجاه تغير المتتالية (v_n) .
4. استنتج اتجاه تغير (u_n) .
5. بين ان المتتالية (u_n) محدودة .
6. بين ان (u_n) متقاربة يطلب تعيين نهايتها .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام -2 ، 1 ، 2 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 1 ، 1

- نسحب كرة واحدة من الكيس .

1. ما احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 .
2. اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما احتمال ان يكون لونها احمر ؟

- نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون ارجاع

1. ما احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منها رقما فرديا ؟
2. ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟
3. ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 .

التمرين الرابع : (6,5 نقطة)

الجزء A :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(ax+b)e^{cx}$ مع a ، b و c أعداد حقيقية .

نرمز بـ (φ) للمنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب a ، b و c حتى المنحنى (φ)يشمل النقطتين $A(-\frac{1}{2};0)$ و $B(0;1)$ و يقبل عند النقطة B مماس معامل توجيهه يساوي 1 .

2) نفرض الأن f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x+1)e^{-x}$

أ) عين نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ مستنتجا وجود مستقيم مقارب لـ (φ) .

ب) أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ مستنتجا إشارة f على $\mathbb{R}$.

4) برهن أن على المجال $\left[\frac{1}{2};2\right]$, المعادلة $f(x)=1$ تقبل حل وحيد α .

أعط القيمة العشرية المقربة إلى 10^{-1} لـ α .

5) أكتب معادلة المماس (T) لـ (φ) عند النقطة B .

6) أنشئ (T) و (φ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة البيانية $2cm$)

الجزء B :

تعطى الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=(-2x-3)e^{-x}+3$

1) برهن أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند $x=0$.

2) أحسب بـ cm^2 , القيمة المضبوطة لمساحة الحيز المحددة بالمنحنى (φ) , محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ و $x=-\frac{1}{2}$.

أعط القيمة المقربة لهذه المساحة إلى 10^{-2} .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي(تجريبي) — دورة : ماي 2017

الشعبة:علوم تجريبية — ثانوية زرقاني لحسن — السانية -

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة :3 ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3,-2,2)$ ، $B(6,1,5)$ ، $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$

1) بين أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي (ABC) ثم إستنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

2) بين أن المثلث ABC قائم في A ثم أحسب حجم الرباعي $ABCD$

3) بين أن $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية BDC

4) أحسب مساحة المثلث BDC ثم إستنتج المسافة بين النقطة A و المستوي BDC

لا يطلب المعادلة الديكارتية للمستوي

التمرين الثاني (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2=2+2i\sqrt{3}$ و أكتب الحلول على الشكل الأسي

2) ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط C,B,A لواحقها $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ على الترتيب .

أحسب z_D لاحقة النقطة D حيث D مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,+1);(C,+1)\}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDC$

3) أحسب: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954}$ ، $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962}$ ، $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2017}$

4) أ) بين أن مجموعة النقط (Γ) المعرفة بـ : $(z-z_A)(\overline{z}-z_B)=z_C\overline{z_C}$ هي دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة و حساب مساحتها

ب) عين (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2 .

ج) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(\overline{z}-z_A)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

عين طبيعة المجموعة (E).

التمرين الثالث (04,5 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[1\ ;\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=1+\sqrt{x-1}$

و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 2cm معطى في الملحق

II) (u_n) متتالية معرفة على N بالعلاقة: $u_0=\frac{5}{4}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أن : $1<u_n<2$

ب) بإستعمال المنحنى (C) والمستقيم $(\Delta): y=x$ ، علم على محور الفواصل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0

ت) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) برهن تخمينك .

ث) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها .

III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n=\ln(u_n-1)$

أ) برهن أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب) أكتب v_n ثم u_n بدلالة n.

ت) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$

التمرين الرابع (06,5 نقاط)

لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2+2-2\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

2) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x-1$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا .

أدرس وضعية (C_f) مع مستقيمه المقارب (Δ)

3) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;\,+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب) إستنتج إشارة f' ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) عند نقطة يطلب تعيين إحداثييها ثم أكتب معادلة لـ (T)

5) أنشئ كلا من المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $2\ln x-xm=x$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط : $A\left(4;1;5\right)$ ، $B\left(-3;2;0\right)$ ، $C\left(1;3;6\right)$ ، $F\left(-7;0;4\right)$.

1) ا) بين أن النقط A , B و C ليست في استقامية

ب) برهن أن المستوي (ABC) له معادلة من الشكل : $x+2y-z-1=0$

ج) أحسب المسافة بين F و المستوي (ABC) .

2) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة F و العمودي على المستوي (ABC) .

ب) عين احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة F على المستوي (ABC)

3) لتكن (S) سطح كرة مركزها F و نصف قطرها 6 .

أ) بين أن النقطة B تنتمي إلى (S).

ب) بين أن المستوي (ABC) و سطح الكرة (S) يتقاطعان وفق دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها r .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1- في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق $z_A=1+i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-3+i$ على الترتيب

أ- علم النقط A ، B ، C

ب- h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C. عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز التحاكي h

2- أ- نضع $L=\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$.احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث L^n تخيليا صرفا

3- لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

أ- بيّن أن D مرجح النقط A ، B ، C مرفقة بمعاملات حقيقية يُطلب تعيينها

ب- عيّن z_D لاحقة D و z_I لاحقة I

ج- عين وانشئ المجموعة (φ) للنقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

4- نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $z_E=1+5i$

أ- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_I-z_A}{z_D-z_E}$ ثم استنتج أن $DE=2AI$ و (DE) يعامد (AI)

ب- عيّن مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحول D إلى I و يحول E إلى A.

التمرين الثالث (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

1) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n>0$

أ) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعيn غير معدوم كما يلي : $V_n=\frac{u_n}{n}$

أثبت أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن $u_n=\frac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\ln x-x\ln 2$

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على R كما يلي : $g(x)=1+(1-x)e^x$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,27<\alpha<1,28$

3) إستنتج إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2+\frac{x}{e^x+1}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) بين انه من أجل كل x من R : $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

2-أدرس تغيرات الدالة f

3- بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل معادلته $y=x+2$ نرمز له بالرمز (Δ)

ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) أ) بين أن: $f(\alpha)=\alpha+1$ (حيث α العدد المعرف في السؤال I)

ب) أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$

5- أحسب $f(-2)$ و $f(-3)$ بتقريب 10^{-2} ثم أنشئ (C)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $me^x-x+m=0$

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية وهران — ثانوية مصطفى هدام

بكالوريا تجريبي — دورة ماي 2017

الشعبة: علوم تجريبية — المدة: 3 ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول :(04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(-1,0,3)$ ، $B(3,0,0)$ ، $C(7,1,-3)$ و ليكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$$x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$$

1-أ/ بين أن النقط A ، B ، C تعين مستوي

ب/ $\vec{n}(3,0,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ج/ استنتج معادلة ديكارتية لـ (ABC)

2- بين أن المجموعة (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها δ و نصف قطرها

3- حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) و الذي يشمل δ و يعامد (ABC)

4- بين أن المستقيم (Δ) يقطع (S) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

2/ نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ،B ،C التي لاحقاتها على الترتيب

$$z_A=-1+i\sqrt{3} \quad ، \quad z_B=-1-i\sqrt{3} \quad ، \quad z_C=2$$

أ- بين أن $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب - عين طبيعة المثلث ABC

3/ عين الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق

$$2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$$

تحقق أن النقط A , B تنتميان الى (δ)

4/ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- عين صورة النقطة B بالدوران R

ب - عين z_D لاحقة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي BCDA

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة على N بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ 3U_{n+1} = U_n + 1 \end{cases}$$

n≥1 n=0

1/ أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \frac{1}{2}$

ب - بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

ج – عين نهاية U_n

2/ نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على N بـ : $V_n = \ln\left(U_n - \frac{1}{2}\right)$:

أ - بين أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعين أساسها و حدها الأول

ب -عبر عن U_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I - لتكن g دالة معرفة على R بـ : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1/ أدرس تغيرات الدالة g

2/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.35 < \alpha < 0.36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II - لتكن f دالة معرفة على R بـ : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1/ أدرس تغيرات الدالة f

2/ بين أن $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

3/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة (C_f)

4/ أنشئ كل من (Δ) و (C_f) على المجال $]-1, +\infty[$

5/ عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c حتى تكون F الدالة المعرفة بـ: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $x \to (x^2 + 2)e^{-x}$ ثم أحسب بدلالة α المساحة A(α) للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات $x = 0$ ، $x = -\alpha$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :(04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(-2, 0, 0)$ ، $B(0, -2, 0)$ ، $C(0, 0, -2)$ و I منتصف القطعة المستقيمة [AB]

1-أ/ بين أن النقط A ، B ، C تعين مستوي نرمز له ب (Q)

ب/ أكتب المعادلة الديكارتية لـ (Q)

2- ليكن (P) المستوي المحوري للقطعة [AB]

أ/ أكتب المعادلة الديكارتية لـ (P)

ب/ بين أن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم(Δ) يشمل C و $\vec{U}(1, 1, -2)$ توجيه له ثم أكتب تمثيلا وسيطيا له

3- بين أن الشعاعين $\vec{AI}$ ، $\vec{CI}$ متعامدان

4/ أحسب المسافة $d(O, (Q))$ ثم أحسب حجم رباعي الوجوه OAIC

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(U_n) و (V_n) متتاليتان حيث :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n + V_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{3}(U_n + 2V_n) \end{cases}$$

1/ U_1 ، V_1 ، U_2 ، V_2

2/ بين أن المتتالية (W_n) حيث $W_n = U_n - V_n$ هندسية يطلب تعين أساسها

3/بين أن المتتالية (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة

4/بين أن المتتالية (U_n) و (V_n) يتقاربان نحو نفس النهاية . ماذا تستنتج ؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1/ حل في C المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

2 / أكتب الحلول على الشكل المثلثي

3/نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ،B ،C التي لواحقها على الترتيب

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -\sqrt{3} - i$

عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

4/ ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + 3i$$

عرف بطبيعة التحويل S و اعط عناصره

5/بين أن المجموعة (E) مجموعة النقط M و التي تحقق

$$z_C \bar{z}_C = (z - z_A)\overline{(z - z_A)}$$

هي دائرة يطلب تعين مركزها و نصف قطرها.

<u>التمرين الرابع :</u> (07 نقاط)

I - لتكن g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$

1/ أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة التعريف

2/ بين أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ $g'(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3/ أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1/ أحسب نهايتي f عند الصفر و $+\infty$

2/ بين أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3/ أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

ثم أرسم كل (Δ) و (C_f)

4/ باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_2^4 \ln x \, dx$

5/ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ منحنى الدالة (C_f) والمستقيم (Δ)و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x = 2$ ، $x = 4$

انتهى بالتوفيق